This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

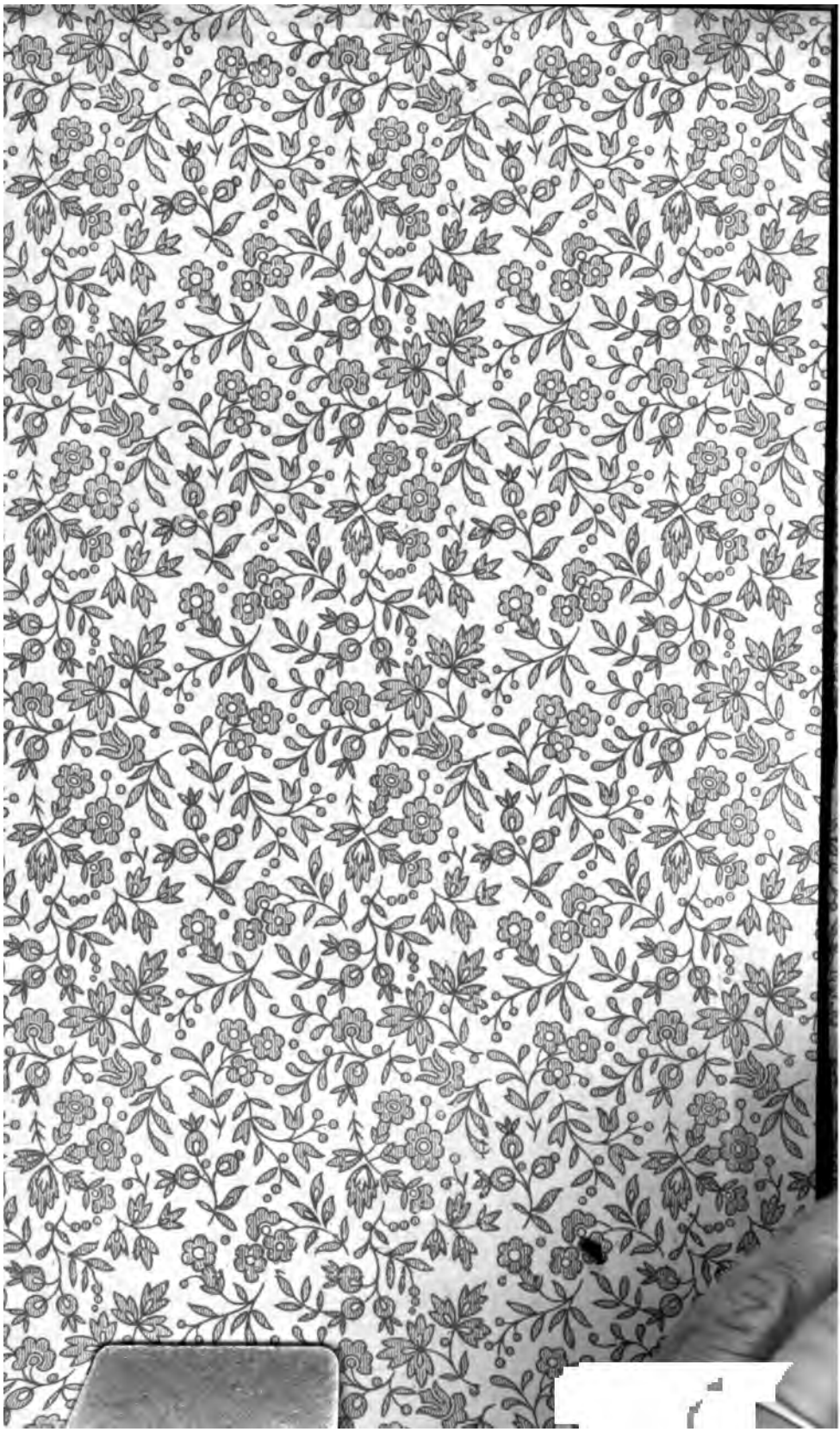
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

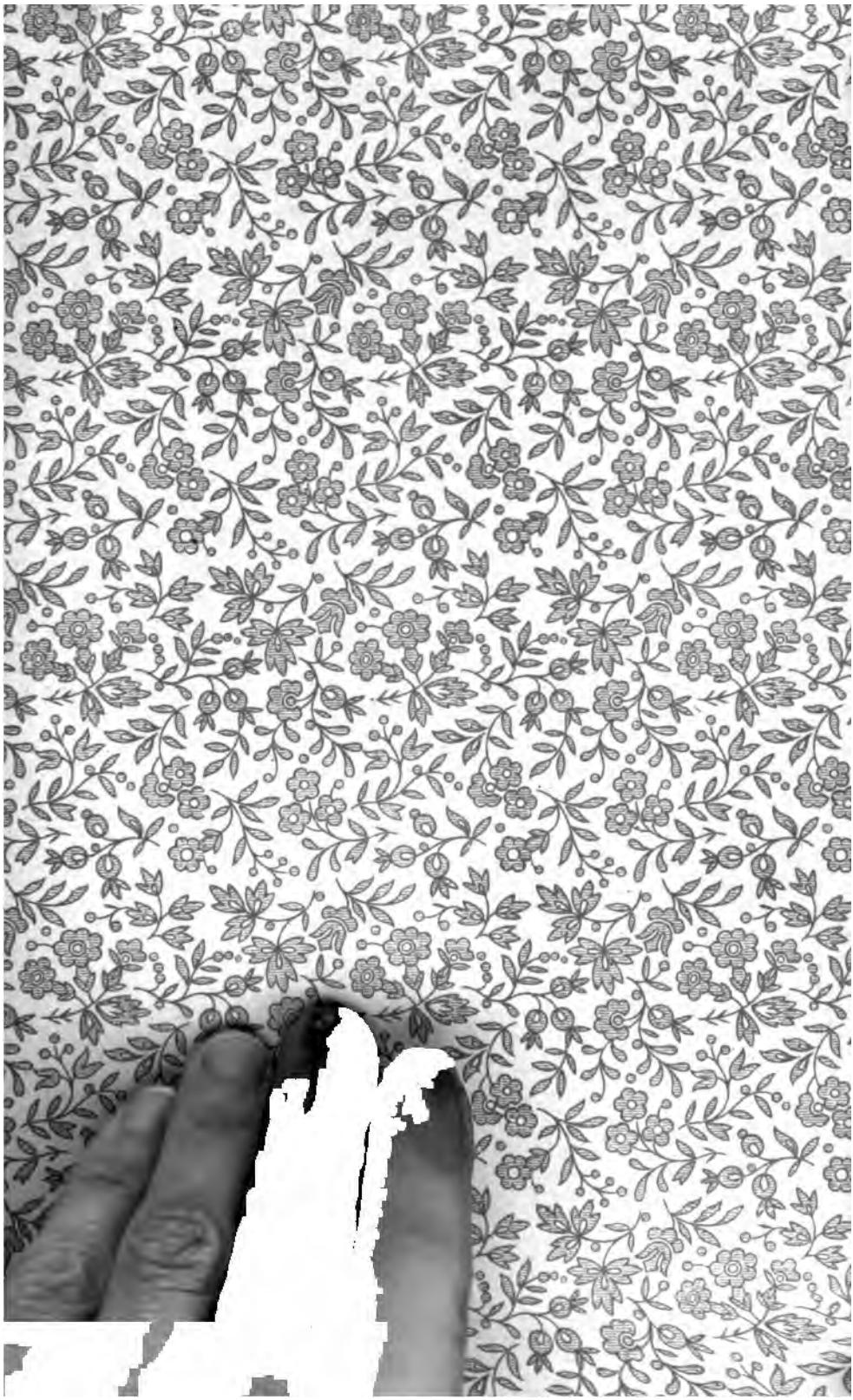
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries





# MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

## RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu München und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XI. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1877.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.

Q 28306

# Inhalt des elften Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)


Seite

**Bäcklund** in Lund. Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen . . . . . 199

———— Ueber Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung . 412

**Bertini** in Pisa. Système simultané de deux formes biquadratiques. (Uebersetzt vom Verfasser aus dem XIV. Bd. des Giornale di Napoli) . . . 30

**du Bois-Reymond** in Tübingen. Zwei Sätze über Grenzwerthe von Functionen zweier Veränderlichen . . . . . 145

———— Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls . . . . . 149

**Brioschi** in Mailand. Extrait d'une lettre à M. F. Klein . . . . . 111

———— La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre . . . . . 401

**Cayley** in Cambridge. On the theory of Partial Differential Equations . . 194

**Dillner** in Upsala. Versuch einer neuen Entwicklung der Hamilton'schen Methode, genannt „Calculus of Quaternions“ . . . . . 168

**Enneper** in Göttingen. Ueber einige elliptische Integrale . . . . . 567

**Herstowski** in Breslau. Zur Theorie der Jacobi'schen Thetafunctionen . 1

**Holst** in Christiania. Ein paar allgemeine metrische Sätze für algebraische Curven . . . . . 341

———— Nachtrag zu diesem Aufsatze . . . . . 575

**Klein** in München. Ueber lineare Differentialgleichungen. (Aus den Sitzungsber. der phys.-med. Societät zu Erlangen) . . . . . 115

———— Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades. (Zweiter Aufsatz.) (Hierzu eine lithogr. Tafel.) . . . 293

**Königsberger** in Dresden. Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen . . . . . 119

**Korkine** in Petersburg. Sur les formes quadratiques positives. (Zus. mit S. Zolotareff) . . . . . 242

**Lie** in Christiania. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. (Zweite Abhandlung) . . . . . 464

**Lüroth** in Karlsruhe. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. (Zweite Abhandlung) . . . . . 84

**Neumann** in Leipzig. Ueber correspondirende Flächenelemente. (Aus den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Februar 1876) . . . . . 306

———— Ueber die Zuverlässigkeit des Ampère'schen Gesetzes. (Aus den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Februar 1876) . . . . . 309

Seite

**Neumann** in Leipzig. Ueber die gegen das Weber'sche Gesetz erhobenen Einwände . . . . . 318

——— — Die Zerlegung und Zusammensetzung der unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers als Hülfsmittel bei Aufstellung der dynamischen Differentialgleichungen . . . . . 379

——— ——— Zur Theorie des Logarithmischen und des Newton'schen Potentials. (Aus den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. April u. October 1870) 558

**Nöther** in Erlangen. Zur Eliminationstheorie. (Aus den Sitzungsber. der phys.-med. Soc. zu Erlangen) . . . . . 571

**Schubert** in Hamburg. Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche . . . . . 347

**Stolz** in Innsbruck. Allgemeine Theorie der Asymptoten der algebraischen Curven . . . . . 41

**Toeplitz** in Lissa (Posen). Ueber ein Flächennetz zweiter Ordnung . . . 434

**Zolotareff** in Petersburg. Sur les formes quadratiques positives. (Zus. mit A. Korkine) . . . . . 242

# Zur Theorie der Jacobi'schen Thetafunctionen.

Von F. Herstowski in Breslau.

Die nachfolgende Arbeit ist aus der Anregung hervorgegangen, welche ich in dem mathematischen Seminar zu Breslau empfangen habe. Im Winter-Semester 1872/73 habe ich nämlich in demselben an den Uebungen theilgenommen, in welchen unter der Leitung des Herrn Professor Dr. Schröter „die Theilung der Θ-Functionen" bearbeitet wurde. Es wurde dabei ausgegangen von der vom Professor Schröter selbst*) hergeleiteten allgemeinen Formel, welche das Product $\vartheta(x, q^m) \cdot \vartheta(y, q^n)$ durch eine endliche Summe von Producten je zweier Θ-Functionen ausdrücken lehrt.

Dieselbe Methode, vermittelst welcher Professor Schröter diese Formel aus den Summenentwicklungen der Jacobi'schen Functionen abgeleitet hatte, habe ich auf die Productentwickelungen dieser Functionen angewandt und bin dadurch zu den im Folgenden angegebenen Resultaten gekommen.

Wir bedienen uns durchweg der Bezeichnungen Jacobi's; namentlich gebrauchen wir die 4 $\vartheta$-Functionen so, wie sie von ihm eingeführt worden sind. Es gelten für dieselben bekanntlich folgende Definitionen:

$$\vartheta(x, q) = \prod_1^\infty (1-q^{2h})(1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2}),$$

$$\vartheta_3(x, q) = \prod_1^\infty (1-q^{2h})(1+2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2}),$$

$$\vartheta_2(x, q) = 2\sqrt[4]{q}\cos x \prod_1^\infty (1-q^{2h})(1+2q^{2h}\cos 2x+q^{4h}),$$

$$\vartheta_1(x, q) = 2\sqrt[4]{q}\sin x \prod_1^\infty (1-q^{2h})(1-2q^{2h}\cos 2x+q^{4h}).$$

Wo wir auf die elliptischen Functionen kommen, haben wir nicht überall diese selbst vermittelst der Jacobi'schen Bezeichnungsweise expli-

*) Inaugural-Diss. Königsberg, 1850.

cite angedeutet, sondern einfach die Verhältnisse der Θ-Functionen stehen lassen, schon aus dem Grunde, um gewisse Weitläufigkeiten, namentlich Hinzufügung von Factoren und drgl., zu vermeiden.

## § 1.

Bevor wir zum Gegenstande selbst übergehen, wollen wir uns eine Relation ableiten, die in der Folge immerfort Anwendung finden wird. Wir wollen nämlich den Factor $\prod_1^\infty (1-q^{2h})$, welcher in den Productentwicklungen der $\vartheta$-Functionen auftritt, durch diese selbst ausdrücken. Dieses lässt sich leicht ausführen. Es ist nämlich:

$$\vartheta_2(0, q) = 2\sqrt[4]{q} \prod_1^\infty (1-q^{2h})(1+q^{2h})^2,$$

$$\vartheta_3(0, q) = \prod_1^\infty (1-q^{2h})(1+q^{2h-1})^2,$$

$$\vartheta(0, q) = \prod_1^\infty (1-q^{2h})(1-q^{2h-1})^2.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit einander und beachtet, dass allgemein:

$$\prod_1^\infty f(2h)\cdot f(2h-1) = \prod_1^\infty f(h),$$

so ergiebt sich:

$$\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta(0, q) = 2\sqrt[4]{q} \prod_1^\infty (1-q^{2h})^3.$$

Bezeichnet man nun die Derivirte von $\vartheta_1$ durch $\vartheta_1'$, so ist ja bekanntlich:

$$\vartheta_1'(0, q) = \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta(0, q);$$

mithin haben wir:

$$2\sqrt[4]{q} \prod_1^\infty (1-q^{2h})^3 = \vartheta_1'(0, q). \tag{1}$$

Es ist nun gemäss der Definition:

$$\frac{\vartheta_1(x, q)}{2\sqrt[4]{q}\,\sin x \prod_1^\infty (1-q^{2h})} = \prod_1^\infty (1-q^{2h}\cdot e^{2ix})(1-q^{2h}\cdot e^{-2ix}).$$

Auf der rechten Seite der obigen Gleichung setzen wir nun für $h$ in dem ersteren der beiden unter $\prod$ stehenden Factoren die Form $\lambda h - \mu$, in dem zweiten die Form $\lambda h + \mu$, wo

$$h = 1, 2, 3, \cdots \infty,$$
$$\mu = 0, 1, 2, \cdots \lambda - 1;$$

es ergiebt sich dann:

$$\frac{\vartheta_1(x, q)}{2\sqrt[4]{q}\,\sin x \prod_1^{\infty}(1-q^{2h})} = \prod_1^{\lambda-1}(1-q^{2\mu}\cdot e^{-2ix}) \times$$

$$\times \prod_0^{\lambda-1}\prod_1^{\infty}(1-q^{2\lambda h}\cdot e^{2i(x+\mu ilq)})(1-q^{2\lambda h}\cdot e^{-2i(x+\mu ilq)}).$$

Gemäss der Definition ist aber auch:

$$\prod_0^{\lambda-1}\vartheta_1(x+\mu ilq, q^\lambda) = \left[2\sqrt[4]{q^\lambda}\prod_1^{\infty}(1-q^{2\lambda h})\right]^\lambda \times$$

$$\times \prod_0^{\lambda-1}\sin(x+\mu ilq)\prod_0^{\lambda-1}\prod_1^{\infty}(1-q^{2\lambda h}\cdot e^{2i(x+\mu ilq)})(1-q^{2\lambda h}\cdot e^{-2i(x+\mu ilq)}).$$

Vergleicht man nun die beiden letzten Gleichungen mit einander, so erhält man:

$$\prod_0^{\lambda-1}\vartheta_1(x+\mu ilq, q^\lambda) = P\cdot\vartheta_1(x, q),$$

und zwar ist der Factor $P$, so wie er sich unmittelbar darbietet, folgender:

$$P = \frac{\left[2\sqrt[4]{q^\lambda}\prod_1^{\infty}(1-q^{2\lambda h})\right]^\lambda}{2\sqrt[4]{q}\prod_1^{\infty}(1-q^{2h})} \times \frac{\prod_0^{\lambda-1}\sin(x+\mu ilq)}{\sin x\prod_1^{\lambda-1}(1-q^{2\mu}\cdot e^{-2ix})};$$

zieht man aber den obigen Ausdruck zusammen und berücksichtigt die Relation (1), so findet man:

$$P = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\cdot e^{(\lambda-1)ix}\cdot 2^{\frac{1-\lambda}{3}}\cdot q^{-\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2\frac{\lambda^2-1}{12}}\frac{\vartheta_1'(0, q^\lambda)^{\frac{\lambda}{3}}}{\vartheta_1'(0, q)^{\frac{1}{3}}}.$$

Setzt man also $P = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\cdot e^{(\lambda-1)ix}\cdot C$, so hat man:

$$\prod_0^{\lambda-1}\vartheta_1(x+\mu ilq, q^\lambda) = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\cdot e^{(\lambda-1)ix}\cdot C\vartheta_1(x, q).$$

Hieraus ergeben sich vermittels Substitution von $x+\frac{\pi}{2}$, $x-\frac{\lambda}{2}ilq$, $x+\frac{\pi}{2}-\frac{\lambda}{2}ilq$ an Stelle von $x$ die analogen Formeln für die drei übrigen $\vartheta$-Functionen, so dass wir nun folgende vier Formeln zusammenstellen können:

$$(2)\quad \begin{cases} \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu}\, \vartheta_1(x+\mu i l q, q^\lambda) = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \cdot e^{(\lambda-1)ix} \cdot C\vartheta_1(x,q), \\ \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu}\, \vartheta_2(x+\mu i l q, q^\lambda) = e^{(\lambda-1)ix} \cdot C\vartheta_2(x,q), \\ \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu}\, \vartheta_3(x+\mu i l q, q^\lambda) = e^{(\lambda-1)ix} \cdot C\vartheta_3(x,q), \\ \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu}\, \vartheta(x+\mu i l q, q^\lambda) = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \cdot e^{(\lambda-1)ix} \cdot C\vartheta(x,q). \end{cases}$$

Die entsprechenden Formeln für die reelle Periode könnte man ebenfalls direct aus den Productentwickelungen ableiten; der Kürze halber ziehen wir jedoch die Methode der Transformation durchs Imaginäre vor. Substituirt man nämlich in (2) für $x \cdots ix$ und beachtet die bekannte Relation:

$$\vartheta(ix,p) = \sqrt{-\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{x^2}{p}}\, \vartheta_2\left(-\frac{\pi}{p}x, \frac{\pi^2}{p}\right),$$

wo

$$p = lq;$$

so findet man leicht nach einigen Umformungen die folgenden vier Formeln:

$$(3)\quad \begin{cases} \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu}\, \vartheta_1\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}, q\right) = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \cdot C'\vartheta_1(\lambda x, q^\lambda), \\ \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu}\, \vartheta_2\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}, q\right) = C'\vartheta_2(\lambda x, q^\lambda), \\ \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu}\, \vartheta_3\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}, q\right) = C'\vartheta_3(\lambda x, q^\lambda), \\ \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu}\, \vartheta\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}, q\right) = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} C'\vartheta(\lambda x, q^\lambda), \end{cases}$$

und zwar ist jetzt:

$$C' = 2^{\frac{1-\lambda}{3}} \frac{\vartheta_1'(0,q)^{\frac{\lambda}{3}}}{\vartheta_1'(0,q^\lambda)^{\frac{1}{3}}}.$$

Die Formeln (3) sind zuerst von Jacobi angegeben worden*). Jacobi hat jedoch die Constante $C'$ nicht näher bestimmt. An der betreffenden Stelle steht allerdings:

*) Crelle, Bd. III, p. 305.

$$\prod_{0}^{\lambda-1}{}_{\mu}\,\vartheta\left(x+2\frac{\mu\pi}{\lambda},\,q\right)=C'\vartheta(\lambda x,\,q^{\lambda});$$

man überzeugt sich jedoch leicht, dass:

$$\prod_{0}^{\lambda-1}{}_{\mu}\,\vartheta\left(x+2\frac{\mu\pi}{\lambda},\,q\right)=\prod_{0}^{\lambda-1}{}_{\mu}\,\vartheta\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda},\,q\right).$$

Setzt man in (2) und (3) $\lambda$ als ungerade voraus und nimmt gleichzeitig $x=0$ an, so erhält man specielle Formeln, welche zuerst von Dr. Göring*) angegeben worden sind.

So einfach die Formeln (2) und (3) scheinen mögen, so können sie doch als die Grundlage der gesammten Theorie der Transformation, der Multiplication und der Division der elliptischen Functionen angesehen werden.

Substituirt man in der Gleichung (2):

$$\prod_{0}^{\lambda-1}{}_{\nu}\,\vartheta_1(x+\nu il q,\,q^{\lambda})=(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\cdot e^{(\lambda-1)ix}\cdot 2^{\frac{1-\lambda}{3}}\cdot q^{\frac{1-\lambda^2}{12}-\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2}\times$$

$$\times\frac{\vartheta_1'(0,\,q^{\lambda})^{\frac{\lambda}{3}}}{\vartheta_1'(0,\,q)^{\frac{1}{3}}}\cdot\vartheta_1(x,\,q),$$

für $x\cdots x+\frac{\mu\pi}{\varrho}$, indem $\varrho$ eine positive, ganze Zahl bedeuten soll, nimmt dann $\mu=0,\,1,\,2,\,\cdots\varrho-1$ an und multiplicirt die so erhaltenen $\varrho$ Gleichungen mit einander, so findet man, unter Berücksichtigung der Gleichung (3):

$$\prod_{0}^{\varrho-1}{}_{\mu}\,\vartheta_1\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho},\,q\right)=(-1)^{\frac{\varrho-1}{2}}\cdot 2^{\frac{1-\varrho}{3}}\,\frac{\vartheta_1'(0,\,q)^{\frac{\varrho}{3}}}{\vartheta_1'(0,\,q^{\varrho})^{\frac{1}{3}}}\cdot\vartheta_1(\varrho x,\,q^{\varrho}),$$

folgendes Resultat:

$$(4)\quad\begin{cases}\displaystyle\prod_{0}^{\varrho-1}{}_{\mu}\prod_{0}^{\lambda-1}{}_{\nu}\,\vartheta_1\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\nu il q,\,q^{\lambda}\right)=(-1)^{\frac{\lambda(\varrho-1)}{2}+\frac{\varrho(\lambda-1)}{2}}\times\\ \times e^{\varrho(\lambda-1)ix}\cdot 2^{\frac{1-\varrho\lambda}{3}}\cdot q^{\varrho\left(\frac{(1-\lambda^2)}{12}-\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2\right)}\cdot\frac{\vartheta_1'(0,\,q^{\lambda})^{\frac{\varrho\cdot\lambda}{3}}}{\vartheta_1'(0,\,q^{\varrho})^{\frac{1}{3}}}\times\vartheta_1(\varrho x,\,q^{\varrho});\\ \text{ebensoleicht findet man die drei folgenden Gleichungen:}\\ \displaystyle\prod_{0}^{\varrho-1}{}_{\mu}\prod_{0}^{\lambda-1}{}_{\nu}\,\vartheta_2\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\nu il q,\,q^{\lambda}\right)=e^{\varrho(\lambda-1)ix}\cdot 2^{\frac{1-\varrho\lambda}{3}}\times\\ \times q^{\varrho\left(\frac{(1-\lambda^2)}{12}-\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2\right)}\cdot\frac{\vartheta_1'(0,\,q^{\lambda})^{\frac{\varrho\cdot\lambda}{3}}}{\vartheta_1'(0,\,q^{\varrho})^{\frac{1}{3}}}\cdot\vartheta_2(\varrho x,\,q^{\varrho}),\end{cases}$$

*) Inaugural-Diss. Leipzig, 1874.

$$(4)\quad \begin{cases} \prod_{0}^{\varrho-1}\prod_{0}^{\lambda-1}\vartheta_3\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\frac{\nu i\log q}{\varrho}, q^{\lambda}\right) = e^{\varrho(\lambda-1)ix}\cdot 2^{\frac{1-\varrho\lambda}{3}}\times \\ \qquad \times q^{\varrho\left(\frac{(1-\lambda^2)}{12}-\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2\right)}\cdot\frac{\vartheta_1'(0,q^{\lambda})^{\frac{\varrho\cdot\lambda}{3}}}{\vartheta_1'(0,q^{\varrho})^{\frac{\lambda}{3}}}\vartheta_3(\varrho x, q^{\varrho}), \\ \prod_{0}^{\varrho-1}\prod_{0}^{\lambda-1}\vartheta\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\frac{\nu i\log q}{\varrho}, q^{\lambda}\right) = (-1)^{\frac{\lambda(\varrho-1)}{2}+\frac{\varrho(\lambda-1)}{2}}\times \\ \times e^{\varrho(\lambda-1)ix}\cdot 2^{\frac{1-\varrho\cdot\lambda}{3}}\cdot q^{\varrho\left(\frac{(1-\lambda^2)}{12}-\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2\right)}\cdot\frac{\vartheta_1'(0,q^{\lambda})^{\frac{\varrho\cdot\lambda}{3}}}{\vartheta_1'(0,q^{\varrho})^{\frac{\lambda}{3}}}\times\vartheta(\varrho x, q^{\varrho}). \end{cases}$$

Man sieht, dass die Formeln (2) und (3) als specielle Fälle der letzten vier Formeln zu betrachten sind. In der That, setzt man $\varrho=1$, so bekommt man aus (4) die Gleichungen (2); wird dagegen $\lambda=1$ angenommen, so folgen daraus die Gleichungen (3). Man kann nun noch eine dritte interessante, specielle Voraussetzung über $\varrho$ und $\lambda$ machen, nämlich $\varrho=\lambda$; alsdann ergiebt sich folgendes System von Formeln:

$$(5)\quad \begin{cases} \prod_{0}^{\lambda-1}\prod_{0}^{\lambda-1}\vartheta_1\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}+\frac{\nu i\log q}{\lambda}, q\right) = e^{\lambda(\lambda-1)ix}\cdot 2^{\frac{1-\lambda^2}{3}}\times \\ \qquad \times q^{\frac{1-\lambda^2}{12}-\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2}\cdot\vartheta_1'(0,q)^{\frac{\lambda^2-1}{3}}\cdot\vartheta_1(\lambda x, q), \\ \prod_{0}^{\lambda-1}\prod_{0}^{\lambda-1}\vartheta_2\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}+\frac{\nu i\log q}{\lambda}, q\right) = e^{\lambda(\lambda-1)ix}\cdot 2^{\frac{1-\lambda^2}{3}}\times \\ \qquad \times q^{\frac{1-\lambda^2}{12}-\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2}\cdot\vartheta_1'(0,q)^{\frac{\lambda^2-1}{3}}\vartheta_2(\lambda x, q), \\ \prod_{0}^{\lambda-1}\prod_{0}^{\lambda-1}\vartheta_3\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}+\frac{\nu i\log q}{\lambda}, q\right) = e^{\lambda(\lambda-1)ix}\cdot 2^{\frac{1-\lambda^2}{3}}\times \\ \qquad \times q^{\frac{1-\lambda^2}{12}-\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2}\cdot\vartheta_1'(0,q)^{\frac{\lambda^2-1}{3}}\cdot\vartheta_3(\lambda x, q), \\ \prod_{0}^{\lambda-1}\prod_{0}^{\lambda-1}\vartheta\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}+\frac{\nu i\log q}{\lambda}, q\right) = e^{\lambda(\lambda-1)ix}\cdot 2^{\frac{1-\lambda^2}{3}}\times \\ \qquad \times q^{\frac{1-\lambda^2}{12}-\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2}\cdot\vartheta_1'(0,q)^{\frac{\lambda^2-1}{3}}\vartheta(\lambda x, q). \end{cases}$$

Dividirt man je zwei dieser Gleichungen durch einander, so bekommt man Formeln für die Multiplication der elliptischen Functionen, wie sie zuerst von Abel*) aufgestellt worden sind.

*) Oeuvr. compl. T. I, p. 188.

## § 2.

Bevor wir die Entwickelungen des vorhergehenden § weiter führen, wollen wir zunächst eine Zerlegung der $\vartheta$-Functionen nach den Wurzeln der Modulargleichung angeben, da dieselbe nach dem, was vorhergeht, sich wie von selbst darbietet und sich an das Vorhergehende unmittelbar anschliesst. Wir untersuchen in dieser Beziehung zuerst die Function $\vartheta_2(x, q)$, da diese Untersuchung etwas einfacher zu sein scheint, als die entsprechende für $\vartheta_3(x, q)$.

Wenn $lq = p$ gesetzt wird, so kann man $\vartheta_2$ in folgender Form darstellen:

$$\vartheta_2(x, p) = 2c^{\frac{p}{4}} \cos x \prod_1^\infty{}_h (1 - c^{2hp})(1 + c^{2hp+2ix}) \times (1 + c^{2hp-2ix}).$$

Substituirt man hierin für $p \cdots p + \frac{2\mu i\pi}{\lambda}$, so wird:

$$\vartheta_2\left(x, p + \tfrac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = 2c^{\frac{p}{4} + \frac{\mu i\pi}{2\lambda}} \cos x \prod_1^\infty{}_h \left(1 - c^{2hp+4h\frac{\mu i\pi}{\lambda}}\right) \times$$

$$\times \left(1 + c^{2hp+4h\frac{\mu i\pi}{\lambda}+2ix}\right)\left(1 + c^{2hp+4h\frac{\mu i\pi}{\lambda}-2ix}\right).$$

Nimmt man nun $\mu = 0, 1, 2, \cdots \lambda - 1$ an und multiplicirt die sämmtlichen $\lambda$ Gleichungen, welche man dadurch erhält, mit einander, so bekommt man:

$$(1)\quad \prod_0^{\lambda-1}{}_\mu \vartheta_2\left(x, p + \tfrac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = i^{\lambda-1}\left(2\sqrt[4]{q}\cos x\right)^\lambda \times$$

$$\times \prod_0^{\lambda-1}{}_\mu \prod_1^\infty{}_h \left(1 - c^{2hp+4h\frac{\mu i\pi}{\lambda}}\right)\left(1 + c^{2hp+4h\frac{\mu i\pi}{\lambda}+2ix}\right) \times$$

$$\times \left(1 + c^{2hp+4h\frac{\mu i\pi}{\lambda}-2ix}\right).$$

Ordnet man die Zahlen $h$ in dem unendlichen Product der rechten Seite der obigen Gleichung nach der Form $\lambda h - \nu$ und beachtet, dass:

$$c^{4h\mu i\pi} = 1,$$

so findet man:

$$\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu \vartheta_2\left(x, p + \tfrac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = i^{\lambda-1}\left(2\sqrt[4]{q}\cos x\right)^\lambda \times$$

$$\times \prod_0^{\lambda-1}{}_\nu \prod_0^{\lambda-1}{}_\mu \prod_1^\infty{}_h \left(1 - c^{2\lambda hp-2\nu p-\frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda}}\right) \times$$

$$\times \left(1 + c^{2\lambda hp-2\nu p-\frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda}+2ix}\right)\left(1 + c^{2\lambda hp-2\nu p-\frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda}-2ix}\right).$$

Wir heben nun diejenigen Factoren des unendlichen Products, welche dem Werthe $\nu = 0$ entsprechen, besonders hervor und bekommen:

$$\prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu} \vartheta_2\left(x, p + \frac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = i^{\frac{\lambda-1}{2}} (2\sqrt[4]{q}\cos x)^{\lambda} \times$$
$$\times \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu} \prod_1^{\infty}{}_{h} (1-q^{2\lambda h})(1+q^{2\lambda h}\cdot e^{2ix})(1+q^{2\lambda h}e^{-2ix}) \times$$
$$\times \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu} \prod_1^{\lambda-1}{}_{\nu} \prod_1^{\infty}{}_{h} \left(1 - e^{2\lambda hp - 2\nu p - \frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda}}\right) \times$$
$$\times \left(1 + e^{2\lambda hp - 2\nu p - \frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda} + 2ix}\right)\left(1 + e^{2\lambda hp - 2\nu p - \frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda} - 2ix}\right).$$

Der eine Theil des letzten Ausdrucks lässt sich nun leicht durch die Function $\vartheta_2$ darstellen; es ist nämlich offenbar:

$$\prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu} \prod_0^{\infty}{}_{h} (1-q^{2\lambda h})(1+q^{2\lambda h}e^{2ix})(1+q^{2\lambda h}e^{-2ix}) = \frac{\vartheta_2^{\lambda}(x, \lambda p)}{(2\sqrt[4]{q^{\lambda}}\cos x)^{\lambda}}.$$

Es ist also nur noch zu behandeln das Product:

$$\prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu} \prod_1^{\lambda-1}{}_{\nu} \prod_1^{\infty}{}_{h} \left(1 - e^{2\lambda hp - 2\nu p - \frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda}}\right) \times$$
$$\times \left(1 + e^{2\lambda hp - 2\nu p - \frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda} + 2ix}\right)\left(1 + e^{2\lambda hp - 2\nu p - \frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda} - 2ix}\right).$$

In demselben kommt der Ausdruck $e^{-\frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda}}$ vor, in welchem $\mu = 0, 1, \cdots \lambda - 1$; $\nu = 1, 2, \cdots \lambda - 1$, genommen werden soll. Legt man nun dem $\nu$ einen der obigen Werthe bei, so stellt, *wofern $\lambda$ eine ungerade Primzahl ist*, $e^{\frac{4\nu i\pi}{\lambda}}$ eine primitive, $\lambda^{\text{te}}$ Wurzel aus der Einheit dar; wenn nun also dem $\mu$ alle Zahlenwerthe von 0 bis $\lambda - 1$ beigelegt werden, so durchläuft der Term $e^{\frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda}}$ die sämmtlichen $\lambda$ Werthe der $\lambda^{\text{ten}}$ Wurzel aus der Einheit. Diese stellen sich aber einfacher unter der Form $e^{\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}$ dar. Beachtet man dieses, so ist klar, dass das unendliche Product, um welches es sich handelt, identisch mit dem folgenden ist:

$$\prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu} \prod_1^{\lambda-1}{}_{\nu} \prod_1^{\infty}{}_{h} \left(1 - e^{2\lambda hp - 2\nu p - \frac{2\mu i\pi}{\lambda}}\right) \times$$
$$\times \left(1 + e^{2\lambda hp - 2\nu p - \frac{2\mu i\pi}{\lambda} + 2ix}\right)\left(1 + e^{2\lambda hp - 2\nu p - \frac{2\mu i\pi}{\lambda} - 2ix}\right).$$

Wir haben jetzt also gefunden:

$$\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\,\vartheta_2\left(x, p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = i^{\frac{\lambda-1}{2}}\cdot q^{\frac{\lambda(1-\lambda)}{4}}\cdot\vartheta_2{}^\lambda(x,\lambda p)\times$$
$$\times\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\prod_1^{\lambda-1}{}_\nu\prod_1^{\infty}{}_h\left(1-e^{2\lambda hp-2\nu p-\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}\right)\times$$
$$\times\left(1+e^{2\lambda hp-2\nu p-\frac{2\mu i\pi}{\lambda}+2ix}\right)\left(1+e^{2\lambda hp-2\nu p-\frac{2\mu i\pi}{\lambda}-2ix}\right).$$

Eine der obigen ähnliche Gleichung bekommt man, wenn man in der Gleichung (1) dieses § die Zahlen $h$ nach der Form $\lambda h+\nu$ ordnet, nämlich:

$$\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\,\vartheta_2\left(x, p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = i^{\frac{\lambda-1}{2}}\cdot q^{\frac{\lambda(1-\lambda)}{4}}\vartheta_2{}^\lambda(x,\lambda p)\times$$
$$\times\prod_1^{\lambda-1}{}_\nu\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\left(1-e^{2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}\right)\left(1+e^{2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}+2ix}\right)\times$$
$$\times\left(1+e^{2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}-2ix}\right)\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\prod_1^{\lambda-1}{}_\nu\prod_1^{\infty}{}_h\left(1-e^{2\lambda hp+2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}\right)\times$$
$$\times\left(1+e^{2\lambda hp+2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}+2ix}\right)\left(1+e^{2\lambda hp+2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}-2ix}\right).$$

Multiplicirt man die beiden letzten Gleichungen mit einander, so bekommt man:

$$\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\,\vartheta_2{}^2\left(x, p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\cdot q^{\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}}\cdot P\cdot Q\vartheta_2^{2\lambda}(x,\lambda p),$$

wenn:

$$P=\prod_1^{\lambda-1}{}_\nu\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\left(1-e^{2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}\right)\times$$
$$\times\left(1+e^{2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}+2ix}\right)\left(1+e^{2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}-2ix}\right),$$
$$Q=\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\prod_1^{\lambda-1}{}_\nu\prod_1^{\infty}{}_h\left(1-e^{2\lambda hp-2\nu p-\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}\right)\times$$
$$\times\left(1-e^{2\lambda hp+2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}\right)\left(1+e^{2\lambda hp+2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}+2ix}\right)\times$$
$$\times\left(1+e^{2\lambda hp-2\nu p-\frac{2\mu i\pi}{\lambda}-2ix}\right)\left(1+e^{2\lambda hp+2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}-2ix}\right)\times$$
$$\times\left(1+e^{2\lambda hp-2\nu p-\frac{2\mu i\pi}{\lambda}+2ix}\right).$$

Der letztere Ausdruck lässt sich aber sehr leicht durch $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$ darstellen. Bezeichnet man nämlich mit $R$ die Grösse:

$$\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\prod_1^{\lambda-1}{}_\nu\sin\left(\frac{\mu\pi}{\lambda}-\nu ip\right)\cos\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}-\nu ip\right)\cos\left(x-\frac{\mu\pi}{\lambda}+\nu ip\right),$$

so ist, wie man unmittelbar sieht:

$$(2\sqrt[4]{q^2})^{3\lambda(\lambda-1)} \prod_1^{\infty h} (1-q^{2\lambda h})^{3\lambda(\lambda-1)} R \cdot Q =$$

$$= \prod_0^{\lambda-1 \mu} \prod_1^{\lambda-1 \nu} \vartheta_1\left(\tfrac{\mu\pi}{\lambda} - vip, \lambda p\right) \times$$

$$\times \vartheta_2\left(x + \tfrac{\mu\pi}{\lambda} - vip, \lambda p\right) \vartheta_2\left(x - \tfrac{\mu\pi}{\lambda} + vip, \lambda p\right).$$

Stellt man aber in dem Ausdrucke $R$ die trigonometrischen Functionen durch Exponentialgrössen dar, so findet man, dass:

$$R = \frac{(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \cdot P}{(2\sqrt[4]{q^2})^{3\lambda(\lambda-1)}},$$

so dass wir jetzt schreiben können:

$$\prod_1^{\infty h} (1-q^{2\lambda h})^{3\lambda(\lambda-1)} \times P \cdot Q = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} (\sqrt[4]{q^2})^{3\lambda(\lambda-1)} \times$$

$$\times \prod_0^{\lambda-1 \mu} \prod_1^{\lambda-1 \nu} \vartheta_1\left(\tfrac{\mu\pi}{\lambda} - vip, \lambda p\right) \vartheta_2\left(x + \tfrac{\mu\pi}{\lambda} - vip, \lambda p\right) \times$$

$$\times \vartheta_2\left(x - \tfrac{\mu\pi}{\lambda} + vip, \lambda p\right).$$

Es sind nun sämmtliche Terme in dem Ausdrucke $P \cdot Q$ so eingerichtet, dass man sie fast unmittelbar mit Hilfe der Formeln (1), (3) und (5) des vorigen § in der möglichst einfachen Weise durch $\vartheta$-Functionen darzustellen in Stande ist. Nachdem wir alles zusammengezogen, finden wir:

$$P \cdot Q = q^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}} \frac{\vartheta_2^{\lambda}(\lambda x, \lambda p)}{\vartheta_2(\lambda x, \lambda^2 p)};$$

demnach ergiebt sich schliesslich:

$$\prod_0^{\lambda-1 \mu} \vartheta_2\left(x, p + \tfrac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = i^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{\vartheta_2^{\lambda}(x, \lambda p)\vartheta_2(\lambda x, \lambda p)}{\vartheta_2(\lambda x, \lambda^2 p)},$$

oder:

$$\vartheta_2(\lambda x, \lambda p) \prod_0^{\lambda-1 \mu} \vartheta_2\left(x, \tfrac{p}{\lambda} + \tfrac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = i^{\frac{\lambda-1}{2}} \vartheta_2^{\lambda}(x, p)\vartheta_2(\lambda x, p).$$

Substituirt man in der obigen Gleichung für $x \cdots x + \frac{\pi}{2}$, so bekommt man:

$$\vartheta_1(\lambda x, \lambda p) \prod_0^{\lambda-1 \mu} \vartheta_1\left(x, \tfrac{p}{\lambda} + \tfrac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = i^{\frac{\lambda-1}{2}} \vartheta_1^{\lambda}(x, p)\vartheta_1(\lambda x, p).$$

Wir gehen nun zur Ableitung der entsprechenden Formeln für $\vartheta_3(x, p)$ und $\vartheta(x, p)$ über. Die Methode, nach welcher wir dabei ver-

fahren, ist ganz dieselbe wie die im Vorhergehenden angewandte, so dass wir diese Untersuchung erheblich abkürzen und uns auf die Andeutung der Operationen beschränken können. Wir setzen also zunächst in:

$$\vartheta_3(x,p) = \prod_1^{\infty h} (1-e^{2hp})(1+e^{(2h-1)p+2ix})(1+e^{(2h-1)p-2ix})$$

für $p \cdots p + \frac{2\mu i\pi}{\lambda}$, nehmen dann $\mu = 0, 1, 2, \cdots \lambda - 1$, multipliciren die $\lambda$ Gleichungen, welche wir daraus erhalten, mit einander, ordnen dann, nach dem bereits wiederholt angewandten Verfahren, die in dem unendlichen Product der rechten Seite der hieraus resultirenden Gleichung auftretenden Zahlen $h$ nach der Form $\lambda h - \nu$, beachten, dass:

$$e^{4h\mu i\pi} = 1,$$

und finden zunächst:

$$\prod_0^{\lambda-1 \mu} \vartheta_3\left(x, p + \tfrac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = \prod_0^{\lambda-1 \nu} \prod_0^{\lambda-1 \mu} \prod_1^{\infty h} \left(1 - e^{2\lambda hp - 2\nu p - \frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda}}\right) \times$$
$$\times \left(1 + e^{2\lambda hp - (2\nu+1)p - (2\nu+1)\frac{2\mu i\pi}{\lambda} + 2ix}\right) \times$$
$$\times \left(1 + e^{2\lambda hp - (2\nu+1)p - (2\nu+1)\frac{2\mu i\pi}{\lambda} - 2ix}\right).$$

In der rechten Seite der obigen Gleichung treten nun die beiden Ausdrücke: $e^{\frac{4\mu\nu i\pi}{\lambda}}$ und $e^{(2\nu+1)\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}$ auf. Der erstere ist bereits früher erörtert worden; es bleibt also nur $e^{(2\nu+1)\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}$ zu discutiren übrig. Wofern nun $\lambda$ *wiederum als eine ungerade Primzahl* vorausgesetzt wird, stellt $e^{(2\nu+1)\frac{2i\pi}{\lambda}}$ eine primitive, $\lambda^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit dar, mit Ausnahme des Falles, dass $\lambda$ in $(2\nu+1)$ aufgeht. Wenn nun $\nu$ die ganze Werthreihe: $0, 1, 2, \cdots \lambda - 1$ durchläuft, kann nur ein einziges Mal der Fall eintreten, dass $\lambda$ in $(2\nu+1)$ aufgeht, nämlich wenn:

$$\nu = \frac{\lambda - 1}{2}$$

wird.

Mit Ausschluss dieses Falles, in welchem:

$$e^{(2\nu+1)\frac{2i\pi}{\lambda}} = 1,$$

ist sonst stets $e^{(2\nu+1)\frac{2i\pi}{\lambda}}$ eine primitive $\lambda^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit, so dass, wenn der Reihe nach $\mu = 0, 1, 2, \cdots \lambda - 1$ angenommen wird, der Ausdruck $e^{(2\nu+1)\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}$ die sämmtlichen $\lambda$ Werthe der $\lambda^{\text{ten}}$ Wurzel der Einheit durchläuft. Hiernach können wir also schreiben:

$$\prod_{0}^{\lambda-1}\vartheta_3\left(x,p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}\right)=\left\{\prod_{1}^{\infty}\left(1-q^{2\lambda k}\right)\left(1+q^{2\lambda k}\cdot e^{2i\left(x-\frac{i}{2}\lambda p\right)}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(1+q^{2\lambda k}\cdot e^{-2i\left(x-\frac{i}{2}\lambda p\right)}\right)\right\}^{\lambda}\times$$
$$\times\prod_{0}^{\lambda-1}\prod_{1}^{\lambda-1}\prod_{1}^{\infty}\left(1-e^{2\lambda kp-2\nu p-\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}\right)\times$$
$$\times\prod_{0}^{\lambda-1}\prod_{0}^{\frac{\lambda-3}{2}}\prod_{1}^{\infty}\left(1+e^{2\lambda kp+2i\left(x-\frac{\mu\pi}{\lambda}+\frac{2\nu+1}{2}ip\right)}\right)\times$$
$$\times\left(1+e^{2\lambda kp-2i\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}-\frac{2\nu+1}{2}ip\right)}\right)\times$$
$$\times\prod_{0}^{\lambda-1}\prod_{0}^{\frac{\lambda-1}{2}}\prod_{1}^{\infty}\left(1+e^{2\lambda kp+2i\left(x-\frac{\mu\pi}{\lambda}+\frac{2\nu+1}{2}ip\right)}\right)\times$$
$$\times\left(1+e^{2\lambda kp-2i\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}-\frac{2\nu+1}{2}ip\right)}\right).$$

Multiplicirt man beide Seiten der obigen Gleichung mit:

$$\prod_{0}^{\lambda-1}\prod_{1}^{\infty}\left(1+e^{2\lambda kp+2i\left(x-\frac{\mu\pi}{\lambda}+\frac{\lambda}{2}ip\right)}\right)\times\left(1+e^{2\lambda kp-2i\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}-\frac{\lambda}{2}ip\right)}\right),$$

so kann man sie in folgender Form schreiben:

(2) $$\prod_{0}^{\lambda-1}\prod_{1}^{\infty}\left(1+e^{2\lambda kp+2i\left(x-\frac{\mu\pi}{\lambda}+\frac{\lambda}{2}ip\right)}\right)\times$$
$$\times\left(1+e^{2\lambda kp-2i\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}-\frac{\lambda}{2}ip\right)}\right)\times$$
$$\times\prod_{0}^{\lambda-1}\vartheta_3\left(x,p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}\right)=\left\{\prod_{1}^{\infty}\left(1-q^{2\lambda k}\right)\left(1+q^{2\lambda k}\cdot e^{2i\left(x+\frac{i}{2}\lambda p\right)}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(1+q^{2\lambda k}\cdot e^{-2i\left(x-\frac{i}{2}\lambda p\right)}\right)\right\}^{\lambda}\times$$
$$\times\prod_{0}^{\lambda-1}\prod_{1}^{\lambda-1}\prod_{1}^{\infty}\left(1-e^{2\lambda kp-2\nu p-\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}\right)\times$$
$$\times\prod_{0}^{\lambda-1}\prod_{0}^{\lambda-1}\prod_{1}^{\infty}\left(1+e^{2\lambda kp+2i\left(x-\frac{\mu\pi}{\lambda}+\frac{2\nu+1}{2}ip\right)}\right)\times$$
$$\times\left(1+e^{2\lambda kp-2i\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}-\frac{2\nu+1}{2}ip\right)}\right).$$

Wir können nun $\vartheta_3(x,p)$ auch folgendermassen darstellen:

$$\vartheta_3(x,p)=(1+q\cdot e^{2ix})(1+q\cdot e^{-2ix})\times$$
$$\times\prod_{1}^{\infty}\left(1-q^{2k}\right)\left(1+q^{2k+1}\cdot e^{2ix}\right)\left(1+q^{2k+1}\cdot e^{-2ix}\right).$$

An dieser Form von $\vartheta_3(x, p)$ führen wir nun der Reihe nach ganz dieselben Operationen aus, die wir an der Form

$$\prod_1^{\infty}{}_h \left(1-q^{2h}\right)\left(1+q^{2h-1}\cdot e^{-2ix}\right)\left(1+q^{2h-1}\cdot e^{2ix}\right)$$

ausgeführt haben, ordnen jedoch die Zahlen $h$ nach der Form $\lambda h+\nu$ und nicht, wie vorher, nach $\lambda h-\nu$. Wir finden dann die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}(3)\quad &\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu \prod_1^{\infty}{}_h \left(1+e^{2\lambda hp-2i\left(x-\frac{\mu\pi}{\lambda}+\frac{\lambda}{2}ip\right)}\right)\times\left(1+e^{2\lambda hp+2i\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}-\frac{\lambda}{2}ip\right)}\right)\times\\ &\times\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\,\vartheta_3\left(x, p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}\right)=P\cdot\left\{\prod_1^{\infty}{}_h\left(1-q^{2\lambda h}\right)\times\right.\\ &\left.\times\left(1+q^{2\lambda h-1}\cdot e^{-2i\left(x+\frac{i}{2}\lambda p\right)}\right)\left(1+q^{2\lambda h-1}\cdot e^{2i\left(x-\frac{i}{2}\lambda p\right)}\right)\right\}^{\lambda}\times\\ &\times\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\prod_1^{\lambda-1}{}_\nu\prod_1^{\infty}{}_h\left(1-e^{2\lambda hp+2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}\right)\times\\ &\times\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\prod_0^{\lambda-1}{}_\nu\prod_1^{\infty}{}_h\left(1+q^{2\lambda h-1}\cdot e^{-2i\left(x-\frac{\mu\pi}{\lambda}+\frac{2\nu+1}{2}ip\right)}\right)\times\\ &\times\left(1+q^{2\lambda h-1}\cdot e^{2i\left(x+\frac{\mu\pi}{\lambda}-\frac{2\nu+1}{2}ip\right)}\right).\end{aligned}$$

Der Factor $P$ ist, wie man sich leicht überzeugen kann, folgender:

$$\begin{aligned}P=&\left\{\left(1+e^{\lambda p-2ix}\right)\left(1+e^{\lambda p+2ix}\right)\right\}^{\lambda}\prod_1^{\lambda-1}{}_\nu\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\left(1-e^{2\nu p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}}\right)\times\\ &\times\frac{\prod_0^{\lambda-1}{}_\nu\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\left(1+e^{(2\nu+1)p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}+2ix}\right)\left(1+e^{(2\nu+1)p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}-2ix}\right)}{\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\left(1+e^{\lambda p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}+2ix}\right)\left(1+e^{\lambda p+\frac{2\mu i\pi}{\lambda}-2ix}\right)}.\end{aligned}$$

Multiplicirt man nun die beiden Gleichungen (2) und (3) mit einander, so sieht man, dass die unendlichen Producte, welche in der resultirenden Gleichung auftreten, sich sämmtlich durch $\vartheta$-Functionen ausdrücken lassen, und zwar durch $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$. Wir haben, um die Gleichung so einzurichten, dass wir unmittelbar die Definitionen der $\vartheta$-Functionen anwenden können, dieselbe nur noch mit den beiden Factoren:

$$Q = \left(2\sqrt[4]{q^\lambda}\right)^{2\lambda}\left\{\cos\left(x+\tfrac{i}{2}\lambda p\right)\cos\left(x-\tfrac{i}{2}\lambda p\right)\right\}^\lambda \times$$

$$\times\left[2\sqrt[4]{q^\lambda}\prod_1^\infty{}_h\left(1-q^{2\lambda h}\right)\right]^{\lambda(\lambda-1)}\times\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\prod_1^{\lambda-1}{}_\nu\sin\left(\tfrac{\mu\pi}{\lambda}-\nu ip\right)\times$$

$$\times\left[2\sqrt[4]{q^\lambda}\prod_1^\infty{}_h\left(1-q^{2\lambda h}\right)\right]^{2\lambda^2}\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\prod_0^{\lambda-1}{}_\nu\cos\left(x-\tfrac{\mu\pi}{\lambda}+\tfrac{2\nu+1}{2}ip\right)\times$$

$$\times\cos\left(x+\tfrac{\mu\pi}{\lambda}-\tfrac{2\nu+1}{2}ip\right),$$

und:

$$\left(2\sqrt[4]{q^\lambda}\prod_1^\infty{}_h\left(1-q^{2\lambda h}\right)\right)^{2\lambda}\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\cos\left(x-\tfrac{\mu\pi}{\lambda}+\tfrac{\lambda}{2}ip\right)\cos\left(x+\tfrac{\mu\pi}{\lambda}-\tfrac{\lambda}{2}ip\right)=R$$

zu multipliciren; alsdann finden wir:

$$Q\cdot\prod_1^{\lambda-1}{}_\mu\,\vartheta_2\left(x+\tfrac{\lambda}{2}ip-\tfrac{\mu\pi}{\lambda},\lambda p\right)\vartheta_2\left(x-\tfrac{\lambda}{2}ip+\tfrac{\mu\pi}{\lambda},\lambda p\right)\times$$

$$\times\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\,\vartheta_3{}^2\left(x,p+\tfrac{2\mu i\pi}{\lambda}\right)=P\cdot R\vartheta_2{}^\lambda\left(x+\tfrac{\lambda}{2}ip,\lambda p\right)\vartheta_2{}^\lambda\left(x-\tfrac{\lambda}{2}ip,\lambda p\right)\times$$

$$\times\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\prod_1^{\lambda-1}{}_\nu\,\vartheta_1\left(\tfrac{\mu\pi}{\lambda}-\nu ip,\lambda p\right)\times$$

$$\times\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\prod_0^{\lambda-1}{}_\nu\,\vartheta_2\left(x+\tfrac{ip}{2}-\tfrac{\mu\pi}{\lambda}+\nu ip,\lambda p\right)\vartheta_2\left(x-\tfrac{i}{2}p+\tfrac{\mu\pi}{\lambda}-\nu ip,\lambda p\right).$$

Wenn nun $N$, $N'$, $N''$ gewisse Factoren bedeuten, so ist, wie man sofort sieht:

$$\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\,\vartheta_2\left(x+\tfrac{\lambda}{2}ip-\tfrac{\mu\pi}{\lambda},\lambda p\right)\vartheta_2\left(x-\tfrac{\lambda}{2}ip+\tfrac{\mu\pi}{\lambda},\lambda p\right)=$$

$$=N\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\,\vartheta_3{}^2\left(x+\tfrac{\mu\pi}{\lambda},\lambda p\right)\text{ und vermöge (2) § 1.:}$$

$$=N'\vartheta_3{}^2(\lambda x,\lambda^2 p);$$

ferner:

$$\vartheta_2{}^\lambda\left(x+\tfrac{\lambda}{2}ip,\lambda p\right)\vartheta_2{}^\lambda\left(x-\tfrac{\lambda}{2}ip,\lambda p\right)=N''\vartheta_3{}^{2\lambda}(x,\lambda p).$$

Das Product

$$\prod_0^{\lambda-1}{}_\mu\prod_0^{\lambda-1}{}_\nu\,\vartheta_2\left(x+\tfrac{ip}{2}-\tfrac{\mu\pi}{\lambda}+\nu ip,\lambda p\right)\times\vartheta_2\left(x-\tfrac{ip}{2}+\tfrac{\mu\pi}{\lambda}-\nu ip,\lambda p\right)$$

lässt sich aber zunächst mit Hülfe der zweiten der Formeln (5) § 1. durch

$$\vartheta_2(\lambda x+\tfrac{\lambda}{2}ip,\lambda p)\,\vartheta_2(\lambda x-\tfrac{\lambda}{2}ip,\lambda p)$$

ausdrücken und dann in $\vartheta_3^2(\lambda x, \lambda p)$ umformen; die Grösse

$$\prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu} \prod_0^{\lambda-1}{}_{\nu} \vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{\lambda} - \nu i p, \lambda p\right)$$

lässt sich vermöge (3) und (5) § 1. in einfachere Form kleiden; endlich das in den beiden Factoren $Q$ und $R$ auftretende unendliche Product

$$\prod_1^{\infty}{}_{\lambda} (1 - q^{2\lambda\lambda})$$

wird vermöge der Formel (1) § 1. durch $\vartheta_1'(0, q^2)$ ausgedrückt.

Wir sehen also, dass sich unsere Gleichung bedeutend zusammenzieht und, nachdem die Quadratwurzel aus derselben genommen ist, folgende Gestalt annimmt:

$$\vartheta_3(\lambda x, \lambda^2 p) \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu} \vartheta_3\left(x, p + \frac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = S\vartheta_3^{\lambda}(x, \lambda p)\vartheta_3(\lambda x, \lambda p).$$

Was den Ausdruck $S$ betrifft, so könnte derselbe nur eine gewisse Potenz von $q$, eine Exponentialgrösse und einen Zahlenfactor enthalten; denn, wenn man die angedeuteten Umformungen übersieht, bemerkt man sofort, dass die Grössen $\vartheta_1'(0, q^{\lambda})$ und $\vartheta_1'(0, q^{\lambda^2})$, welche noch in denselben eingehen könnten, sich vollständig aufheben. Indess bei näherer Prüfung findet man ohne Mühe, dass auch jene ersten Grössen sich wegheben. Es bleibt nur, ganz analog dem bei der entsprechenden Untersuchung für $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$ erhaltenen Resultat:

$$S = i^{\frac{\lambda-1}{2}}.$$

Wir können jetzt also folgende vier Formeln zusammenstellen:

$$(4)\quad \begin{cases} \vartheta_1(\lambda x, \lambda p) \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu} \vartheta_1\left(x, \frac{p}{\lambda} + \frac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = i^{\frac{\lambda-1}{2}} \vartheta_1^{\lambda}(x, p)\vartheta_1(\lambda x, p), \\ \vartheta_2(\lambda x, \lambda p) \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu} \vartheta_2\left(x, \frac{p}{\lambda} + \frac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = i^{\frac{\lambda-1}{2}} \vartheta_2^{\lambda}(x, p)\vartheta_2(\lambda x, p), \\ \vartheta_3(\lambda x, \lambda p) \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu} \vartheta_3\left(x, \frac{p}{\lambda} + \frac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = (i)^{\frac{\lambda-1}{2}} \vartheta_3^{\lambda}(x, p)\vartheta_3(\lambda x, p), \\ \vartheta(\lambda x, \lambda p) \prod_0^{\lambda-1}{}_{\mu} \vartheta\left(x, \frac{p}{\lambda} + \frac{2\mu i\pi}{\lambda}\right) = i^{\frac{\lambda-1}{2}} \vartheta^{\lambda}(x, p)\vartheta(\lambda x, p). \end{cases}$$

Die letzte Formel ergiebt sich aus der vorletzten durch die Substitution von $x + \frac{\pi}{2}$ an Stelle $x$.

Durch Division je zweier der obigen Formeln durch einander bekommt man Productbeziehungen zwischen denjenigen elliptischen Func-

tionen, deren Modulen die $(\lambda+1)$ Wurzeln der Modulargleichung sind, und denjenigen, deren Modul der ursprünglich gegebene ist. Wir wollen diese Beziehungen nicht hinschreiben, denn man sieht das Resultat unmittelbar. Aber einige Sätze über die Wurzeln der Modulargleichung selbst, die sich aus den obigen Formeln unmittelbar ergeben, möchten wir angeben.

Bezeichnet, wie gewöhnlich, $\varkappa$ den Modul eines elliptischen Integrals, K das demselben entsprechende vollständige elliptische Integral erster Gattung, $\varkappa'$ den zu $\varkappa$ complementären Modul und K′ das demselben entsprechende vollständige elliptische Integral derselben Gattung; so bestehen bekanntlich zwischen diesen Grössen und zwischen $q = e^p$ die folgenden Relationen:

$$\frac{2\varkappa K}{\pi} = \vartheta_2^2(0,p), \quad \frac{2\varkappa' K}{\pi} = \vartheta^2(0,p), \quad \frac{2K}{\pi} = \vartheta_3^2(0,p).$$

Es sollen ferner $\lambda$, $\lambda'$, $\Lambda$, $\Lambda'$, resp. $\lambda_\mu$, $\lambda'_\mu$, $\Lambda_\mu$, $\Lambda'_\mu$ diejenigen Grössen bedeuten, welche aus den Grössen $\varkappa$, $\varkappa'$, K und K′ entstehen; wenn man in denselben für $p \cdots \varrho p$ resp. $\frac{p}{\varrho} + \frac{2\mu i\pi}{\varrho}$ substituirt, so dass also $\lambda$ und $\lambda_0$ die beiden reellen Wurzeln und $\lambda_i\,(i \neq 0)$ eine der imaginären Wurzeln der Modulargleichung bedeuten. $\varrho$ soll die Ordnung der Transformation sein.

Setzen wir nun in dem letzten Formelsystem (4): $x = 0$, so erhalten wir:

$$(5) \qquad \begin{cases} \lambda\Lambda\prod_0^{\varrho-1}{}_\mu\,\lambda_\mu\Lambda_\mu = (-1)^{\frac{\varrho-1}{2}}(\varkappa K)^{\varrho+1}, \\ \Lambda\prod_0^{\varrho-1}{}_\mu\,\Lambda_\mu = (-1)^{\frac{\varrho-1}{2}}K^{\varrho+1}, \\ \lambda'\Lambda\prod_0^{\varrho-1}{}_\mu\,\lambda'_\mu\Lambda_\mu = (-1)^{\frac{\varrho-1}{2}}(\varkappa' K)^{\varrho+1}, \end{cases}$$

also auch:

$$(6) \qquad \begin{cases} \lambda\prod_0^{\varrho-1}{}_\mu\,\lambda_\mu = \varkappa^{\varrho+1}, \\ \lambda'\prod_0^{\varrho-1}{}_\mu\,\lambda'_\mu = \varkappa'^{\varrho+1}. \end{cases}$$

## § 3.

Von der in den beiden vorhergehenden §§ aufgestellten Zerlegung der $\vartheta$-Functionen in endliche Producte eben dieser Functionen kann man sehr leicht zu einer ähnlichen Zerlegung in Summen übergehen. Hierzu bieten sich zunächst zwei Mittel dar. Das eine ist das der Zer-

legung in Partialbrüche, das andere besteht in der logarithmischen Differentiation. Wir wollen beide Mittel anwenden und zwar zunächst das erste. Wir bedienen uns dabei des bekannten Satzes*):

$$(1) \qquad \prod_0^{n-1}{}_\mu \frac{\vartheta_1(a_\mu)}{\vartheta_1(b_\mu)} = \frac{1}{\vartheta_1(\delta)} \sum_0^{n-1}{}_\mu C(\mu) \frac{\vartheta_1(\delta+b_\mu)}{\vartheta_1(b_\mu)} ;$$

und zwar ist:

$$(2) \qquad C(\mu) = \frac{\prod_\nu \vartheta_1(a_\nu - b_\mu)}{\prod_\nu \vartheta_1(b_\nu - b_\mu)},$$

indem im Zähler $\nu = 0, 1, 2, \cdots n-1$, dagegen im Nenner $\nu = 0, 1, 2, \cdots \mu - 1, \mu + 1, \cdots n - 1$; ferner ist:

$$(3) \qquad \delta = \sum_0^{n-1}{}_\mu a_\mu - b_\mu .$$

Den Satz (1) wenden wir an auf die rechte Seite der aus der ersten Formel des Systems (4) § 1. resultirenden Gleichung:

$$e^{\varrho(\lambda-1)i(x-y)} \cdot \frac{\vartheta_1(\varrho x, \varrho p)}{\vartheta_1(\varrho y, \varrho p)} = \frac{\prod_0^{\varrho-1}{}_\mu \prod_0^{\lambda-1}{}_\nu \vartheta_1(x + \frac{\mu\pi}{\varrho} + \nu ip, \lambda p)}{\prod_0^{\varrho-1}{}_m \prod_0^{\lambda-1}{}_n \vartheta_1(y + \frac{m\pi}{\varrho} + nip, \lambda p)};$$

darnach ergiebt sich dieselbe als:

$$(4) \qquad = \frac{1}{\vartheta_1(\delta, \lambda p)} \sum_{m=0,\, n=0}^{m=\varrho-1,\, n=\lambda-1}{}_{m,n} C(m, n) \frac{\vartheta_1(\delta + y + \frac{m\pi}{\varrho} + nip, \lambda p)}{\vartheta_1(y + \frac{m\pi}{\varrho} + nip, \lambda p)} .$$

Die Constante $C(m, n)$ ist nach (2):

$$C(m, n) = \frac{\prod_\mu \prod_\nu \vartheta_1(x - y + (\mu - m)\frac{\pi}{\varrho} + (\nu - n) ip, \lambda p)}{\prod_\mu \prod_\nu \vartheta_1((\mu - m)\frac{\pi}{\varrho} + (\nu - n) ip, \lambda p)},$$

wobei im Zähler

$$\mu = 0, 1, 2, \cdots \varrho - 1,$$
$$\nu = 0, 1, 2, \cdots \lambda - 1,$$

im Nenner dagegen nehmen $\mu$ und $\nu$ ebenfalls die sämmtlichen obigen Zahlenwerthe an, jedoch mit der einen Beschränkung, dass nicht gleichzeitig $\mu = m$ und $\nu = n$ werden dürfen, wodurch der Nenner verschwinden und somit die ganze Entwickelung illusorisch würde. Es ist ferner nach (3):

$$\delta = \varrho\lambda(x - y) = \varrho\lambda z,$$

*) Schellbach, Thetafunctionen, p. 100.

wenn

$$x - y = z$$

gesetzt wird.

Es kommt nun zunächst darauf an, den Zähler und Nenner von $C(m, n)$ in einfacherer Form auszudrücken. Dieses lässt sich leicht mit Hülfe des ersten Satzes (4) § 1. bewerkstelligen. Vermöge desselben ist nämlich der Zähler:

$$Z = \prod_0^{\varrho-1}{}_{\mu} \prod_0^{\lambda-1}{}_{\nu} \vartheta_1\left(z - \frac{m\pi}{\varrho} - nip + \frac{\mu\pi}{\varrho} + \nu ip, \lambda p\right) =$$

$$= P e^{\varrho(\lambda-1)i\left(z - \frac{m\pi}{\varrho} - nip\right)} \vartheta_1(\varrho z - m\pi - n\varrho ip, \varrho p) =$$

$$= P' \cdot e^{\varrho[(\lambda-1) - 2n]iz} \cdot \vartheta_1(\varrho z, \varrho p),$$

wenn $P$ und $P'$ gewisse Constanten bezeichnen.

Den Nenner $N$ von $C$ aber kann man offenbar aus dem Zähler $Z$ dadurch ableiten, dass man in diesem $z = 0$ setzt und gleichzeitig denselben durch $\vartheta_1(0, \lambda p)$ dividirt; er nimmt dann die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Also:

$$N = \lim_{z=0} \frac{Z(z)}{\vartheta_1(z, \lambda p)} = P' \lim_{z=0} \frac{\vartheta_1(\varrho z, \varrho p)}{\vartheta_1(z, \lambda p)} = \varrho P' \frac{\vartheta_1'(0, \varrho p)}{\vartheta_1'(0, \lambda p)}.$$

Hiernach können wir jetzt schreiben:

$$C = \frac{1}{\varrho} e^{\varrho(\lambda-1-2n)iz} \cdot \frac{\vartheta_1'(0, \lambda p)}{\vartheta_1'(0, \varrho p)} \vartheta_1(\varrho z, \varrho p).$$

Setzt man diesen Werth von $C$ in (4) ein, so ergiebt sich:

$$\varrho \frac{\vartheta_1'(0, \varrho p)}{\vartheta_1'(0, \lambda p)} \frac{\vartheta_1(\varrho x, \varrho p)}{\vartheta_1(\varrho y, \varrho p)} \frac{\vartheta_1(\varrho\lambda z, \lambda p)}{\vartheta_1(\varrho z, \varrho p)} =$$

$$= \sum_{m=0, n=0}^{m=\varrho-1, n=\lambda-1}{}_{m,n} e^{-2n\varrho iz} \frac{\vartheta_1\left(\varrho\lambda z + y + \frac{m\pi}{\varrho} + nip, \lambda p\right)}{\vartheta_1\left(y + \frac{m\pi}{\varrho} + nip, \lambda p\right)},$$

oder, wenn man das $x$ vermöge $x - y = z$ eliminirt und dann für $\varrho z$ einfach $x$ schreibt:

$$(5) \quad \varrho \frac{\vartheta_1'(0, \varrho p)}{\vartheta_1'(0, \lambda p)} \frac{\vartheta_1(\lambda x, \lambda p)}{\vartheta_1(x, \varrho p)} \frac{\vartheta_1(\varrho y + x, \varrho p)}{\vartheta_1(\varrho y, \varrho p)} =$$

$$= \sum_{m=0, n=0}^{m=\varrho-1, n=\lambda-1}{}_{m,n} e^{-2nix} \frac{\vartheta_1\left(\lambda x + y + \frac{m\pi}{\varrho} + nip, \lambda p\right)}{\vartheta_1\left(y + \frac{m\pi}{\varrho} + nip, \lambda p\right)}.$$

Aus der letzten Formel lassen sich durch einfache Substitutionen zwölf Hauptformeln herleiten, welche hinzuschreiben wir nicht unterdrücken können, damit wir sie später bei Gelegenheit stets fertig zur Hand haben. Sie sind folgende:

$$(6)\quad \varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta_2(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta_2(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta_2(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta_1(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{m=0,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1} (-1)^n\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta_2(\lambda x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)}{\vartheta_1(y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)};$$

$$(7)\quad \varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta_2(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta_2(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta_1(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta_2(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{m=0,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1} (-1)^n\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta_1(\lambda x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)}{\vartheta_2(y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)};$$

$$(8)\quad (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\cdot\varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta_2(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta_2(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta_3(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{m=0,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1} (-1)^n\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta_3(\lambda x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)}{\vartheta(y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)};$$

$$(9)\quad (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta_2'(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta_2(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta_3(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{m=0,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1} (-1)^n\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta(\lambda x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)}{\vartheta_3(y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)};$$

$$(10)\quad \varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta_3(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta_3(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta_3(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta_1(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{m=0,n=1}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1} (-1)^{n+m}\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta_3(\lambda x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)}{\vartheta_1(y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)};$$

$$(11)\quad (-1)^{\frac{\varrho-1}{2}}\cdot\varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta_3(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta_3(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta_2(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{m=0,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1} (-1)^{n+m}\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta(\lambda x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)}{\vartheta_2(y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)};$$

$$(12)\quad (-1)^{\frac{\varrho+\lambda-1}{2}}\cdot\varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta_3(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta_3(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta_1(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta_3(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{m=0,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1} (-1)^{n+m}\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta_1(\lambda x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)}{\vartheta_3(y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)};$$

$$(13)\quad (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\cdot\varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta_3(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta_3(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta_2(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{m=0,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1} (-1)^{n+m}\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta_2(\lambda x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)}{\vartheta(y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)};$$

$$(14)\quad \varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta_1(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{m=0,\,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1} (-1)^m\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta(\lambda x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)}{\vartheta_1(y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)};$$

$$(15)\quad (-1)^{\frac{\varrho-1}{2}}\cdot\varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta_2(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta_2(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{m=0,\,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1} (-1)^m\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta_3(\lambda x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)}{\vartheta_2(y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)};$$

$$(16)\quad (-1)^{\frac{\varrho-1}{2}}\,\varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta_2(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta_3(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{m=0,\,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1} (-1)^m\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta_2(\lambda x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)}{\vartheta_3(y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)};$$

$$(17)\quad \varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta_1(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{m=0,\,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1} (-1)^m\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta_1(\lambda x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)}{\vartheta(y+\frac{m\pi}{\varrho}+nip,\lambda p)};$$

Die Formeln (6) bis (17) liefern durch specielle Voraussetzungen über $\varrho$ und $\lambda$, sowie über $x$ und $y$ einige wichtige Resultate. Nehmen wir zunächst $\lambda = 1$ an, so liefert z. B. die letzte Gleichung (17):

$$\varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,p)}\,\frac{\vartheta(x,p)}{\vartheta(x,\varrho p)}\,\frac{\vartheta_1(\varrho y+x,\varrho p)}{\vartheta(\varrho y,p)} = \sum_{0}^{\varrho-1}{}_m (-1)^m\,\frac{\vartheta_1(x+y+\frac{m\pi}{\varrho},p)}{\vartheta(y+\frac{m\pi}{\varrho},p)}.$$

Setzt man jetzt $x = 0$, so bekommt man:

$$\varrho\,\frac{\vartheta_1'(0,\varrho p)}{\vartheta_1'(0,p)}\,\frac{\vartheta(0,p)}{\vartheta(0,\varrho p)}\,\frac{\vartheta_1(\varrho y,\varrho p)}{\vartheta(\varrho y,\varrho p)} = \sum_{0}^{\varrho-1}{}_m (-1)^m\,\frac{\vartheta_1(y+\frac{m\pi}{\varrho},p)}{\vartheta(y+\frac{m\pi}{\varrho},p)},$$

eine zuerst von Jacobi*) angegebene Formel über die Transformation der elliptischen Functionen.

Nimmt man in der Gleichung (17) $\varrho = 1$ an, so findet man:

$$\frac{\vartheta_1'(0,p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta(x,p)}\,\frac{\vartheta_1(y+x,p)}{\vartheta(y,p)} = \sum_{0}^{\lambda-1}{}_n e^{-2nix}\,\frac{\vartheta_1(\lambda x+y+nip,\lambda p)}{\vartheta(y+nip,\lambda p)},$$

und setzt man hierin wiederum $x = 0$, so ergiebt sich die ebenfalls von Jacobi herstammende Formel:

---

*) Crelle, Bd. IV, p. 188.

$$\frac{\vartheta_1'(0,p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta(0,\lambda p)}{\vartheta(0,p)}\,\frac{\vartheta_1(y,p)}{\vartheta(y,p)}=\sum_{0}^{\lambda-1}{}_n\,\frac{\vartheta_1(y+nip,\lambda p)}{\vartheta(y+nip,\lambda p)}.$$

Die vorletzte Formel kann man aber offenbar auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{\vartheta_1'(0,p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta(\lambda x,\lambda p)}{\vartheta(x,p)}\,\frac{\vartheta_1(x+y,p)}{\vartheta(y,p)}=\frac{\vartheta_1(\lambda x+y,\lambda p)}{\vartheta(y,\lambda p)}+$$

$$+\sum_{1}^{\frac{\lambda-1}{2}}{}_n\left\{e^{-2nix}\,\frac{\vartheta_1(\lambda x+y+nip,\lambda p)}{\vartheta(y+nip,\lambda p)}+e^{2nix}\,\frac{\vartheta_1(\lambda x+y-nip,\lambda p)}{\vartheta(y-nip,\lambda p)}\right\},$$

setzt man nun hierin $y=0$, $x=\frac{r\pi}{\lambda}$, wo $r$ irgend eine ganze Zahl bedeuten möge, so erhält man:

$$i(-1)^r\,\frac{\vartheta_1'(0,p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta(0,\lambda p)}{\vartheta(0,p)}\,\frac{\vartheta_1(\frac{r\pi}{\lambda},p)}{\vartheta(\frac{r\pi}{\lambda},p)}=2\sum_{0}^{\frac{\lambda-1}{2}}{}_n\sin 2n\frac{r\pi}{\lambda}\,\frac{\vartheta_1(nip,\lambda p)}{\vartheta(nip,\lambda p)}.$$

Eine der obigen ähnliche Formel liefert eine jede der unter (6)—(17) aufgeführten allgemeineren Gleichungen. Wir wollen indess nur noch das Resultat angeben, das man aus der Formel (7) in dieser Richtung findet; es ist:

$$i\,\frac{\vartheta_1'(0,p)}{\vartheta_1'(0,\lambda p)}\,\frac{\vartheta_2(0,\lambda p)}{\vartheta_2(0,p)}\,\frac{\vartheta_1(\frac{r\pi}{\lambda},p)}{\vartheta_2(\frac{r\pi}{\lambda},p)}=2\sum_{0}^{\frac{\lambda-1}{2}}{}_n(-1)^n\,\frac{\vartheta_1(nip,\lambda p)}{\vartheta_2(nip,\lambda p)}\sin 2n\frac{r\pi}{\lambda}.$$

Dass diese Formel mit der von Herrn Professor Kronecker*) angegebenen:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1}{}_r\sin\frac{4rs\pi}{n}\sin\mathrm{am}\frac{4rk}{n}=i\frac{\lambda\mu}{k}\sin\mathrm{am}\left(\frac{2s\Lambda' i}{n},\lambda\right)$$

identisch ist, sieht man ohne viele Mühe ein. Die zweite der beiden an der unten citirten Stelle angegebenen Formeln ergiebt sich aus unserer allgemeineren Formel (11).

Setzt man in den Gleichungen (5) bis (17) $\varrho=\lambda$, so erhält man die Lösung des Multiplicationsproblems der elliptischen Functionen. Die Gleichung (17) z. B. liefert:

$$\varrho\,\frac{\vartheta(\varrho x,p)}{\vartheta(x,p)}\,\frac{\vartheta_1(\varrho y+x,p)}{\vartheta(\varrho y,p)}=\sum_{m=0,n=0}^{m=\varrho-1,n=\lambda-1}{}^{*}(-1)^m\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta_1(\varrho x+y+\frac{m\pi}{\varrho}+\frac{nip}{\varrho},p)}{\vartheta(y+\frac{m\pi}{\varrho}+\frac{nip}{\varrho},p)};$$

nimmt man hierin $x=0$ an, so bekommt man:

*) Monatsber. d. K. Akad. d. W. z. Berlin. Math. Classe. 19. Juli 1875. p. 500.

$$\varrho\,\frac{\vartheta_1(\varrho y,p)}{\vartheta(\varrho y,p)}=\sum_{m=0,\,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1}\frac{\vartheta_1\left(y+\frac{m\pi}{\varrho}+\frac{nip}{\varrho},p\right)}{\vartheta\left(y+\frac{m\pi}{\varrho}+\frac{nip}{\varrho},p\right)},$$

eine zuerst von Abel*) angegebene Formel, welche sin am $\varrho u$ durch sin am $u$ auszudrücken lehrt.

Nimmt man dagegen in der vorletzten Gleichung $y=0$ an, so erhält man:

$$\varrho\,\frac{\vartheta_1(x,p)}{\vartheta(x,p)}=\sum_{m=0,\,n=0}^{m=\varrho-1,\,n=\lambda-1}(-1)^m\cdot e^{-2nix}\,\frac{\vartheta(0,p)\,\vartheta_1\left(\varrho x+\frac{m\pi}{\varrho}+\frac{nip}{\varrho},p\right)}{\vartheta\left(\frac{m\pi}{\varrho}+\frac{nip}{\varrho},p\right)\vartheta(\varrho x,p)}.$$

Diese Formel scheint eine Lösung des Divisionsproblems der elliptischen Functionen zu enthalten; allerdings kommen auf der rechten Seite nicht direct die elliptischen Functionen vor.

## § 4.

Wir schreiten zur zweiten Methode des Uebergangs von Product- zu Summenentwickelungen vor. Nimmt man von der letzten Gleichung des Systems (4) § 1. auf beiden Seiten die Logarithmen, so findet man zunächst:

$$(1)\qquad \sum_{\mu=0,\,\nu=0}^{\mu=\varrho-1,\,\nu=\lambda-1} l\vartheta\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\nu ip,\,\lambda p\right)=C+(\lambda-1)\varrho ix+l\vartheta(\varrho x,\varrho p),$$

wenn man durch $C$ eine Constante bezeichnet. Differenziirt man diese Gleichung nach $x$, so erhält man:

$$(2)\qquad \sum_{\mu=0,\,\nu=0}^{\mu=\varrho-1,\,\nu=\lambda-1} l'\vartheta\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\nu ip,\,\lambda p\right)=(\lambda-1)\varrho i+\varrho\, l'\vartheta(\varrho x,\varrho p).$$

Da nun aber:

$$l'\vartheta(x,p)=\frac{2K}{\pi}Z\left(\frac{2K}{\pi}x,p\right),$$

so liefert uns die Gleichung (2) den Satz:

$$(3)\qquad \sum_{\mu=0,\,\nu=0}^{\mu=\varrho-1,\,\nu=\lambda-1}\frac{2\Lambda}{\pi}Z\left(\frac{2\Lambda}{\pi}\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\nu ip\right),\lambda p\right)=$$
$$=(\lambda-1)\varrho i+\varrho\,\frac{2P}{\pi}Z\left(\frac{2P}{\pi}\varrho x,\varrho p\right).$$

Wir haben hierin die Bezeichnung P für das vollständige elliptische Integral erster Gattung mit dem Modul $\varrho p$ eingeführt. Unter Modul eines elliptischen Integrals versteht man allerdings gewöhnlich die Grösse $\varkappa$, die in demselben auftritt; indessen ist ja kaum ein Missver-

*) Oeuvr. comp. T. I, p. 189.

ständniss möglich, wenn wir die Grösse $p$ oder die Grösse $q = e^{\pi}$ den Modul nennen. Es ist ja bekannt, wie diese Grössen mit einander zusammenhängen.

Nimmt man in der obigen Formel $\lambda = 1$ an, so erhält man:

$$(4)\quad \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} \frac{2K}{\pi} Z\left(\frac{2K}{\pi}\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}\right), p\right) = \frac{2\varrho P}{\pi} Z\left(\frac{2\varrho P}{\pi} x, \varrho p\right);$$

setzt man dagegen in (3) $\varrho = 1$, so ergiebt sich:

$$(5)\quad \sum_{\nu=0}^{\nu=\lambda-1} \frac{2\Lambda}{\pi} Z\left(\frac{2\Lambda}{\pi}(x+\nu ip), \lambda p\right) = (\lambda-1)i + \frac{2K}{\pi} Z\left(\frac{2K}{\pi} x, p\right).$$

Die beiden letzten Gleichungen drücken die Transformation der elliptischen Integrale zweiter Gattung aus. Sie sind bekanntlich zuerst von Jacobi*) angegeben worden.

Setzt man schliesslich in (3) $\varrho = \lambda$, so erhält man:

$$(6)\quad \frac{2K}{\pi} Z\left(\frac{2K}{\pi}\varrho x, p\right) + (\varrho-1)i = \\ = \frac{1}{\varrho} \sum_{\mu=0,\nu=0}^{\mu=\varrho-1,\nu=\varrho-1} \frac{2K}{\pi} Z\left(\frac{2K}{\pi}\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\frac{\nu ip}{\varrho}\right), p\right),$$

eine Gleichung, welche $Z(\varrho u)$ durch $Z(u)$ auszudrücken lehrt.

An das Vorhergehende schliessen sich noch die betreffenden Sätze über die elliptischen Integrale dritter Gattung an. Behalten wir die Bezeichnung Jacobi's bei, so ist ja:

$$\Pi\left(\frac{2K}{\pi} x, \frac{2K}{\pi} a, p\right) = xl'\vartheta(a,p) + \tfrac{1}{2} l \frac{\vartheta(x-a,p)}{\vartheta(x+a,p)}.$$

Hiernach ergiebt sich aus der Verbindung der beiden Sätze (1) und (2) Folgendes:

$$(7)\quad \Pi\left(\frac{2\varrho P}{\pi} x, \frac{2\varrho P}{\pi} a, \varrho p\right) = \sum_{\mu=0,\nu=0}^{\mu=\varrho-1,\nu=\lambda-1} \Pi\left(\frac{2\Lambda}{\pi} x, \frac{2\Lambda}{\pi}\left(a+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\nu ip\right), \lambda p\right),$$

eine Gleichung, welche zugleich die Transformation und die Multiplication der elliptischen Integrale III. Gattung ausdrückt. Man vergleiche hierüber die wiederholt citirte Stelle**).

Nimmt man auf beiden Seiten der vier Gleichungen (4) § 1. die Logarithmen und differenziirt dann zweimal nach $x$, so erhält man:

$$(8)\quad \begin{cases} \sum_{\mu=0,\nu=0}^{\mu=\varrho-1,\nu=\lambda-1} l''\vartheta_1\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\nu ip, \lambda p\right) = \varrho^2 l'\vartheta_1(\varrho x, \varrho p), \\ \sum_{\mu=0,\nu=0}^{\mu=\varrho-1,\nu=\lambda-1} l'\vartheta_2\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\nu ip, \lambda p\right) = \varrho^2 l'\vartheta_2(\varrho x, \varrho p), \end{cases}$$

*) Crelle, Bd. IV, p. 189.
**) Crelle, Bd. IV, p. 189.

$$(8)\quad \begin{cases} \sum_{\mu=0,\,\nu=0}^{\mu=\varrho-1,\,\nu=\lambda-1} l''\vartheta_3\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\nu ip,\ \lambda p\right)=\varrho^2 l''\vartheta_3(\varrho x,\ \varrho p), \\ \sum_{\mu=1,\,\nu=0}^{\mu=\varrho-1,\,\nu=\lambda-1} l''\vartheta\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}+\nu ip,\ \lambda p\right)=\varrho^2 l''\vartheta(\varrho x,\ \varrho p). \end{cases}$$

Es gelten aber bekanntlich folgende Gleichungen:

$$(9)\quad \begin{cases} l''\vartheta_1(x,p)=\frac{4}{\pi^2}(\mathsf{K}^2-E\mathsf{K})-\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}\right)^2\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}x,\ \varkappa\right)}, \\ l''\vartheta_2(x,p)=-\frac{4E\mathsf{K}}{\pi^2}-\left(\frac{2\varkappa'\mathsf{K}}{\pi}\right)^2\frac{\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}x,\ \varkappa\right)}{\cos^2\operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}x,\ \varkappa\right)}, \\ l''\vartheta_3(x,p)=\frac{4}{\pi^2}((\varkappa'\mathsf{K})^2-E\mathsf{K})-\left(\frac{2\varkappa\varkappa'\mathsf{K}}{\pi}\right)^2\frac{\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}x,\ \varkappa\right)}{\Delta^2\operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}x,\ \varkappa\right)}, \\ l''\vartheta(x,p)=\frac{4}{\pi^2}(\mathsf{K}^2-E\mathsf{K})-\left(\frac{2\varkappa\mathsf{K}}{\pi}\right)^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}x,\ \varkappa\right). \end{cases}$$

Setzt man also in den Gleichungen (8) zunächst $\lambda=1$ und bezeichnet den Modul, welcher vermittelst der Transformation $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung aus $\varkappa$ hervorgeht, durch $\lambda$, ferner das vollständige elliptische Integral II. Ordnung mit dem Modul $\lambda$ durch $L$; so ergiebt uns die Combination der Gleichungen (8) und (9) die folgenden vier Sätze:

$$(10)\quad \begin{cases} \varrho(\mathsf{K}^2-E\mathsf{K})-(\varkappa\mathsf{K})^2\sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1}\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}\right),\ \varkappa\right)= \\ \qquad=\varrho^2(\Lambda^2-L\Lambda)-\varrho^2(\lambda\Lambda)^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x,\ \lambda\right), \\ \varrho(\mathsf{K}^2-E\mathsf{K})-\mathsf{K}^2\sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1}\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}\right),\ \varkappa\right)}= \\ \qquad=\varrho^2(\Lambda^2-L\Lambda)-\frac{(\varrho\Lambda)^2}{\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x,\ \lambda\right)}, \\ \varrho E\mathsf{K}+(\varkappa'\mathsf{K})^2\sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1}\frac{\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}\right),\ \varkappa\right)}{\cos^2\operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}\right),\ \varkappa\right)}= \\ \qquad=\varrho^2 L\Lambda+(\varrho\lambda'\Lambda)^2\frac{\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x,\ \lambda\right)}{\cos^2\operatorname{am}\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x,\ \lambda\right)}, \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\varrho((\varkappa'\mathsf{K})^2 - E\mathsf{K}) + (\varkappa\varkappa'\mathsf{K})^2 \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} \frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}\right), \varkappa\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}\left(x+\frac{\mu\pi}{\varrho}\right), \varkappa\right)} = \\
&\qquad = \varrho^2((\lambda'\Lambda)^2 - L\Lambda) + (\varrho\lambda\lambda'\Lambda)^2 \frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x, \lambda\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x, \lambda\right)}.
\end{aligned}\right.$$

Den obigen analoge Sätze für die imaginäre Periode der elliptischen Functionen ergeben sich dadurch, dass man in (8) $\varrho = 1$ setzt. Schreibt man alsdann wiederum $\varrho$ für $\lambda$, so findet man:

$$\left\{\begin{aligned}
&\varrho(\Lambda^2 - L\Lambda) - (\lambda\Lambda)^2 \sum_{\mu=1}^{\mu=\varrho-1} \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\Lambda}{\pi}(x+\mu ip), \lambda\right) = \\
&\qquad = \mathsf{K}^2 - E\mathsf{K} - (\varkappa\mathsf{K})^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}x, \varkappa\right), \\
&\varrho(\Lambda^2 - L\Lambda) - \Lambda^2 \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\Lambda}{\pi}(x+\mu ip), \lambda\right)} = \\
&\qquad = \mathsf{K}^2 - E\mathsf{K} - \frac{\mathsf{K}^2}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}x, \varkappa\right)}, \\
&\varrho L\Lambda + (\lambda'\Lambda)^2 \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} \frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\Lambda}{\pi}(x+\mu ip), \lambda\right)}{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\Lambda}{\pi}(x+\mu ip), \lambda\right)} = \\
&\qquad = E\mathsf{K} + (\varkappa'\mathsf{K})^2 \frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}x, \varkappa\right)}{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}x, \varkappa\right)}, \\
&\varrho((\lambda'\Lambda)^2 - L\Lambda) + (\lambda\lambda'\Lambda)^2 \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} \frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\Lambda}{\pi}(x+\mu ip), \lambda\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\Lambda}{\pi}(x+\mu ip), \lambda\right)} = \\
&\qquad = (\varkappa'\mathsf{K})^2 - E\mathsf{K} + (\varkappa\varkappa'\mathsf{K})^2 \frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}x, \varkappa\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\mathsf{K}}{\pi}x, \varkappa\right)}.
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Der erste der Sätze (10) ist zuerst von Jacobi*) angegeben worden.

An die Formeln (11) lässt sich eine Bemerkung anknüpfen, die interessant genug zu sein scheint, um sie hervorzuheben. Es hat nämlich Gauss**) in seinem handschriftlichen Nachlasse gewisse algebraische Beziehungen zwischen Grössen aufgestellt, die nichts anderes sind

*) Crelle, Bd. IV, p. 188.

**) Gauss' Werke, herausgegeben von der Ges. d. Wiss. z. Gött. Bd. III, p. 436—479.

als die Functionen $\vartheta_3(0, q)$, $\vartheta(0, q)$, $\vartheta_2(0, q)$ resp. $\vartheta_3(0, q^3)$, $\vartheta(0, q^3)$, $\vartheta_2(0, q^3)$ und $\vartheta_3(0, q^5)$ u. s. w. Diese Gauss'schen Untersuchungen sind von Herrn Dr. Göring*) namentlich für die Transformation 7ter Ordnung weiter geführt worden. Vermöge der Gleichungen:

$$\vartheta_3(0, p) = \sqrt{\frac{2\mathsf{K}}{\pi}}, \quad \vartheta(0, p) = \sqrt{\frac{2\varkappa'\mathsf{K}}{\pi}}, \quad \vartheta_2(0, p) = \sqrt{\frac{2\varkappa\mathsf{K}}{\pi}}$$

und

$$\vartheta_3(0, \varrho p) = \sqrt{\frac{2\Lambda}{\pi}} \text{ etc.}$$

kann man aber jene Relationen auch auffassen als Beziehungen zwischen den Grössen $\varkappa$, $\varkappa'$, $\mathsf{K}$ und $\lambda$, $\lambda'$, $\Lambda$. Es lassen sich nun aus den Formeln (11) in gleicher Weise algebraische Beziehungen zwischen $\varkappa$, $\varkappa'$, $\mathsf{K}$, $E$ resp. $\lambda$, $\lambda'$, $\Lambda$, $L$ ableiten. Suchen wir zunächst die betreffenden Formeln für die Transformation III. Ordnung auf. Zu diesem Zwecke setzen wir in den Formeln (11) $\varrho = 3$ und $x = 0$. Beachtet man nun die Gleichungen (2) § 1., so findet man zunächst:

$$(12) \quad \begin{cases} 3(\Lambda^2 - L\Lambda) + 2\mathsf{K}\Lambda\sqrt{\varkappa\lambda} = \mathsf{K}^2 - E\mathsf{K}, \\ 3L\Lambda - 2\mathsf{K}\Lambda\sqrt{\varkappa'\lambda'} = E\mathsf{K}, \\ 3((\lambda'\Lambda)^2 - L\Lambda) - 2\mathsf{K}\Lambda\sqrt{\varkappa\lambda\varkappa'\lambda'} = (\varkappa'\mathsf{K})^2 - E\mathsf{K}. \end{cases}$$

Diese Relationen lassen sich symmetrischer ausdrücken, wenn man die Gleichung

$$3\frac{\Lambda}{\mathsf{K}} = \frac{\Lambda'}{\mathsf{K}'}$$

berücksichtigt. Dadurch kann man die erste der obigen 3 Gleichungen auch folgendermassen schreiben:

$$L\Lambda' - \Lambda\Lambda' - E\mathsf{K}' + \mathsf{K}\mathsf{K}' = 2\mathsf{K}'\Lambda\sqrt{\varkappa\lambda},$$

oder auch in folgender Weise:

$$L\Lambda' - \Lambda\Lambda' - E\mathsf{K}' + \mathsf{K}\mathsf{K}' = \frac{2}{3}\mathsf{K}\Lambda'\sqrt{\varkappa\lambda};$$

multiplicirt man die beiden letzten Gleichungen mit einander und nimmt dann auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so findet man:

$$L\Lambda' - \Lambda\Lambda' - E\mathsf{K}' + \mathsf{K}\mathsf{K}' = 2\sqrt{\frac{\varkappa\lambda\mathsf{K}\mathsf{K}'\Lambda\Lambda'}{3}},$$

berücksichtigt man aber die Relation Legendre's:

$$E\mathsf{K}' + E'\mathsf{K} - \mathsf{K}\mathsf{K}' = \frac{\pi}{2},$$

so folgt aus der obigen Gleichung die folgende:

$$(13) \qquad L'\Lambda - E'\mathsf{K} + 2\sqrt{\frac{\varkappa\lambda\mathsf{K}\mathsf{K}'\Lambda\Lambda'}{3}} = 0.$$

In ähnlicher Weise kann man auch die zweite Gleichung in (12) umgestalten; man findet:

*) Inaug. Diss. Leipzig, 1874.

$$(14) \qquad L\Lambda' - EK' = 2\sqrt{\frac{\varkappa'\lambda' K K' \Lambda \Lambda'}{3}}.$$

Subtrahirt man nun die letzte Gleichung von der vorletzten und berücksichtigt, dass:

$$\sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} = 1,$$

so ergiebt sich:

$$(15) \qquad L'\Lambda - L\Lambda' - E'K + EK' + 2\sqrt{\frac{KK'\Lambda\Lambda'}{3}} = 0.$$

Aus der letzten Gleichung in (12) lässt sich folgende mehr symmetrische Relation ableiten:

$$(16) \qquad L'\Lambda - \lambda^2\Lambda\Lambda' - E'K + \varkappa^2 KK' = 2\sqrt{\frac{\varkappa\lambda\varkappa'\lambda' K\Lambda K'\Lambda'}{3}}.$$

Aehnliche Beziehungen lassen sich mit gleicher Leichtigkeit für die Transformationen $5^{ter}$ resp. $7^{ter}$ Ordnung aufstellen.

## § 5.

Wir gehen dazu über, aus den Formeln (4) § 2. vermittels der logarithmischen Differenziation Summenentwickelungen abzuleiten. Wir behalten die bereits einmal gebrauchte Bezeichnungsweise bei d. h. wir bezeichnen mit $\lambda, \Lambda, L$ resp. $\lambda_\mu, \Lambda_\mu, L_\mu$ diejenigen Grössen, welche mit $\varrho p$ resp. $\frac{p}{\varrho} + \frac{2\mu i\pi}{\varrho}$ in derselben Weise zusammenhängen, wie $\varkappa$, K, $E$ mit $p$. $\varrho$ soll die Ordnung der Transformation bezeichnen. Logarithmirt man nun die letzte Formel in (4) § 2., so erhält man zunächst:

$$(1) \qquad l\vartheta(\varrho x, \varrho p) + \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} l\vartheta\left(x, \frac{p}{\varrho} + \frac{2\mu i\pi}{\varrho}\right) = C + \varrho\, l\vartheta(x, p) + l\vartheta(\varrho x, p);$$

differenziirt man diese Gleichung nach $x$, so folgt aus derselben:

$$(2) \qquad \varrho\, l'\vartheta(\varrho x, \varrho p) + \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} l'\vartheta\left(x, \frac{p}{\varrho} + \frac{2\mu i\pi}{\varrho}\right) = \varrho\, l'\vartheta(x, p) + \varrho\, l'\vartheta(\varrho x, p),$$

oder, da $l'\vartheta(x, p) = \frac{2K}{\pi} Z\left(\frac{2K}{\pi} x, \varkappa\right)$:

$$(3) \qquad \frac{2\varrho\Lambda}{\pi} Z\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi} x, \lambda\right) + \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} \frac{2\Lambda_\mu}{\pi} Z\left(\frac{2\Lambda_\mu}{\pi} x, \lambda_\mu\right) = \frac{2\varrho K}{\pi} Z\left(\frac{2K}{\pi} x, \varkappa\right) + \frac{2\varrho K}{\pi} Z\left(\frac{2\varrho K}{\pi} x, \varkappa\right).$$

Eine analoge Formel leitet man leicht aus dem Obigen für das elliptische Integral III. Gattung ab. Sie lautet:

$$(4)\quad \Pi\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x, \frac{2\varrho\Lambda}{\pi}a, \lambda\right) + \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} \Pi\left(\frac{2\Lambda_\mu}{\pi}x, \frac{2\Lambda_\mu}{\pi}a, \lambda_\mu\right) =$$
$$= \varrho\,\Pi\left(\frac{2K}{\pi}x, \frac{2K}{\pi}a, \varkappa\right) + \Pi\left(\frac{2K}{\pi}\varrho x, \frac{2K}{\pi}\varrho a, \varkappa\right).$$

Nimmt man von jeder der Formeln (4) § 4. die Logarithmen und differenziirt dann dieselben zweimal nach $x$, so erhält man vier Gleichungen, welche vermöge der Hülfsgleichungen (9) § 4. sich in die folgenden vier umwandeln lassen:

$$(5)\quad \begin{cases} C_1 + \dfrac{(\varrho\Lambda)^2}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x, \lambda\right)} + \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} \dfrac{\Lambda_\mu^2}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\Lambda_\mu}{\pi}x, \lambda_\mu\right)} = \\ \qquad = \varrho\,\dfrac{K^2}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi}x, \varkappa\right)} + \dfrac{(\varrho K)^2}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho K}{\pi}x, \varkappa\right)}, \\ C_2 + (\varrho\lambda'\Lambda)^2 \dfrac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x, \lambda\right)}{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x, \lambda\right)} + \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} (\lambda'_\mu\Lambda_\mu)^2 \dfrac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\Lambda_\mu}{\pi}x, \lambda_\mu\right)}{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\Lambda_\mu}{\pi}x, \lambda_\mu\right)} = \\ \qquad = \varrho(\varkappa' K)^2 \dfrac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi}x, \varkappa\right)}{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi}x, \varkappa\right)} + (\varrho\varkappa' K)^2 \dfrac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho K}{\pi}x, \varkappa\right)}{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho K}{\pi}x, \varkappa\right)}, \\ C_3 + (\varrho\lambda\lambda'\Lambda)^2 \dfrac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x, \lambda\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x, \lambda\right)} + \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} (\lambda_\mu\lambda'_\mu\Lambda_\mu)^2 \dfrac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\Lambda_\mu}{\pi}x, \lambda_\mu\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\Lambda_\mu}{\pi}x, \lambda_\mu\right)} = \\ \qquad = \varrho\,(\varkappa\varkappa' K)^2 \dfrac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi}x, \varkappa\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi}x, \varkappa\right)} + \varrho\,(\varkappa\varkappa' K)^2 \dfrac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho K}{\pi}x, \varkappa\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho K}{\pi}x, \varkappa\right)}, \\ C_1 + (\varrho\lambda\Lambda)^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho\Lambda}{\pi}x, \lambda\right) + \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} (\lambda_\mu\Lambda_\mu)^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\Lambda_\mu}{\pi}x, \lambda_\mu\right) = \\ \qquad = \varrho\,(\varkappa K)^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi}x, \varkappa\right) + (\varrho\varkappa K)^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\varrho K}{\pi}x, \varkappa\right). \end{cases}$$

Die Constanten $C_1$, $C_2$, $C_3$ ergeben sich als folgende:

$$C_1 = \varrho^2(L\Lambda - \Lambda^2) + \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1}(L_\mu\Lambda_\mu - \Lambda_\mu^2) - \varrho(\varrho+1)(EK - K^2),$$

$$C_2 = \varrho^2 L\Lambda + \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} L_\mu\Lambda_\mu - \varrho(\varrho+1)EK,$$

$$C_3 = \varrho^2(L\Lambda - (\lambda'\Lambda)^2) + \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1}(L_\mu\Lambda_\mu - (\lambda'_\mu\Lambda_\mu)^2) - \varrho(\varrho+1)(EK - (\varkappa' K)^2).$$

Setzt man aber in dem Formelsystem (5) $x=0$, so sieht man, dass:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Hiernach findet man leicht aus den letzten drei Gleichungen die folgenden bemerkenswerthen Relationen:

(6)
$$\begin{cases} \varrho^2 L\Lambda + \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} L_\mu \Lambda_\mu = \varrho(\varrho+1) E\mathsf{K}, \\ (\varrho\Lambda)^2 + \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} \Lambda_\mu^2 = \varrho(\varrho+1)\mathsf{K}^2, \\ (\varrho\lambda'\Lambda)^2 + \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} (\lambda'_\mu\Lambda_\mu)^2 = \varrho(\varrho+1)(\varkappa'\mathsf{K})^2, \\ (\varrho\lambda\Lambda)^2 + \sum_{\mu=0}^{\mu=\varrho-1} (\lambda_\mu\Lambda_\mu)^2 = \varrho(\varrho+1)(\varkappa\mathsf{K})^2. \end{cases}$$

# Système simultané de deux formes biquadratiques*).

Par E. Bertini.

Je viens faire avec cette note une application des méthodes et des resultats que M. Clebsch a exposés dans son ouvrage classique, *Theorie der binären algebraischen Formen*, en y ajoutant un exemple aux autres que l'illustre auteur a donnés sur la formation des systèmes simultanés des formes binaires (V. Abschnitt).

1. Soient les deux formes biquadratiques (désignées symboliquement)

$$f = a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = \cdots,$$
$$\varphi = \alpha_x^4 = \beta_x^4 = \gamma_x^4 = \cdots.$$

Le système complet, pour la forme $f$, est constitué de cette forme même et de celles qui suivent (Clebsch § 43.);

$$H = (ab)^2 a_x^2 b_x^2, \quad T = (aH) a_x^3 H_x^3,$$
$$i_f = (ab)^4 \quad , \quad j_f = (aH)^4 \quad ;$$

et, pour la forme $\varphi$, de cette forme même et des suivants;

$$\chi = (\alpha\beta)\alpha_x^2 \beta_x^2 \ , \quad \tau = (\alpha\chi)\alpha_x^5 \chi_x^3 \ ,$$
$$i_\varphi = (\alpha\beta)^4 \quad , \quad j_\varphi = (\alpha\chi)^4 \quad .$$

Tous les covariants et les invariants du système des deux biquadratiques, qui ne sont pas dans les formations précédents, sont des réunions (sommes avec des coefficients numériques) des *glissements* (*Ueberschiebungen***)) des deux produits (C. § 31)

$$\text{(P)} \qquad f^{m_1} \cdot H^{m_2} \cdot T^{m_3}, \quad \varphi^{\mu_1} \cdot \chi^{\mu_2} \cdot \tau^{\mu_3}.$$

Pour former le système complet, c'est-à-dire un système de covariants et d'invariants dont tous les autres soient des fonctions entières (rationelles)***), on doit supposer que ces glissements soient ordonnés de

---

*) Uebersetzt vom Verfasser aus dem XIV. Bd. des Giornale di Napoli.

**) *Composés* — Jordan Théorème sur la composition des covariants (comptes rendus, t. LXXXI, p. 495).

***) La démonstration que ce système soit fini, fut donné premièrement par M. Gordan (Mathem. Annalen, t. II, p. 227). M. Clebsch a reproduite, dans son ouvrage, cette démonstration avec quelques simplifications (§ 52. et suiv.). Après M. Gordan a donné une autre élégante démonstration de la même pro-

manière que les formations où le degré est moindre (dans les coefficients) précèdent les autres et que, quand elles sont du même degré, celles où l'ordre du glissement est moindre doivent être prises les premières; et alors on doit omettre tous les glissements, qui ont des parties (*Theile der Ueberschiebung* — C. § 53.) que l'on puisse exprimer en fonctions entières des formations précédentes (C. § 54).

On peut omettre de suite les glissements des produits (P), pour lesquels on a

$$m_3 > 1, \quad \mu_3 > 1$$

en observant que $T^2$ (et pareillement $\tau^2$) s'exprime rationellement par $f$, $H$, $i_f$, $j_f$ (C. § 42.). On a encore que les glissements des produits

(P') $\qquad X \cdot Y, \quad \Xi \cdot \Upsilon$

où $X$ est $f$ ou $H$ et $\Xi$ est $\varphi$ ou $\chi$, ont une partie qui se compose des formations précédentes, c'est-à-dire celle qui s'obtient faisant glisser $X$ sur $\Xi$ (ce qui est toujours possible car $X\Xi$ sont du même ordre pour les variables), et multipliant par le glissement des $Y$ sur $\Upsilon$. C'est pour la même raison, que les glissements des produits (P') où $X$ est $T$ et $\Xi$ est $\tau$, ont une partie qui s'exprime rationellement par les formations précédentes. On doit donc laisser de côté tous ces glissements, si $Y$, $\Upsilon$ ne sont pas ensemble 1. On ne doit tenir compte non plus des glissements de $T$ sur $\varphi^{\mu_1} \cdot \chi^{\mu_2}$, quand $\mu_1 + \mu_2 > 2$ (et pareillement ceux de $\tau$ sur $f^{m_1} \cdot H^{m_2}$, quand $m_1 + m_2 > 2$) parce qu'ils ont des parties qui se décomposent, celles qui sont produites par les glissements de $T$ sur deux des $\mu_1 + \mu_2$ facteurs du produit $\varphi^{\mu_1}\chi^{\mu_2}$ et par la multiplication avec les facteurs qui restent. On doit négliger aussi les glissements de $T$ sur $\varphi^{\mu_1} \cdot \chi^{\mu_2}$, avec $\mu_1 + \mu_2 = 2$, quand l'ordre du glissement est moindre que 5, parce qu'ils ont encore des parties qui se décomposent, c'est-à-dire celles qui résultent du glissement de $T$ sur un facteur du produit $\varphi^{\mu_1} \cdot \chi^{\mu_2}$. On doit enfin laisser de côté les premiers glissements (determinants fonctionels, Jacobiens) de deux fonctions, dont une ($T$ ou $\tau$) soit aussi un premier glissement. Ces formations peuvent toujours être exprimées avec les précédentes par une formule générale (C. § 35. (5)).

Ainsi donc les formations invariantives qui peuvent servir à exprimer rationellement toutes les autres (sans compter les invariants et les covariants rélatifs à chaque forme) sont ces glissements:

$$(a\alpha)a_x^3\alpha_x^3 = A_1, \quad (a\alpha)^2a_x^2\alpha_x^2 = A_2, \quad (a\alpha)^3a_x\alpha_x = A_3, \quad (a\alpha)^4 = A_4,$$
$$(a\chi)a_x^3\chi_x^3 = B_1, \quad (a\chi)^2a_x^2\chi_x^2 = B_2, \quad (a\chi)^3a_x\chi_x = B_3, \quad (a\chi)^4 = B_4,$$

priété, en y introduisant un particulier arrangement des produits symboliques (Math. Ann. t. V, p. 595). V. aussi: Gordan: Ueber das Formensystem binärer Formen (Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät zu Erlangen. Leipzig, 1875) § 7.

$(\alpha H)\alpha_x^3 H_x^3 = C_1$, $(\alpha H)^2\alpha_x^2 H_x^2 = C_2$, $(\alpha H)^3\alpha_x H_x = C_3$, $(\alpha H)^4 = C_4$,
$(H\chi)H_x^3\chi_x^3 = D_1$, $(H\chi)^2H_x^2\chi_x^2 = D_2$, $(H\chi)^3H_x\chi_x = D_3$, $(H\chi)^4 = D_4$,

$$(\alpha\tau)^2\tau_x^4\alpha_x^2, \quad (\alpha\tau)^3\tau_x^3\alpha_x, \quad (\alpha\tau)^4\tau_x^2 = L_1,$$
$$(\alpha T)^2T_x^4\alpha_x^2, \quad (\alpha T)^3T_x^3\alpha_x, \quad (\alpha T)^4T_x^2 = L_2,$$
$$(H\tau)^2\tau_x^4H_x^2, \quad (H\tau)^3\tau_x^3H_x, \quad (H\tau)^4\tau_x^2 = L_3,$$
$$(\chi T)^2T_x^4\chi_x^2, \quad (\chi T)^3T_x^3\chi_x, \quad (\chi T)^4T_x^2 = L_4,$$

$(\tau T)^2\tau_x^4T_x^4$, $(\tau T)^3\tau_x^3T_x^3$, $(\tau T)^4\tau_x^2T_x^2$, $(\tau T)^5\tau_xT_x$, $(\tau T)^6$,
$(\tau M)^5\tau_xM_x^3$, $(\tau M)^6M_x^2$ (où $M_x^8$ est $a_x^4b_x^4$ ou $a_x^4H_x^4$ ou $H_x^4H_x'^4$)
$(TN)^5T_xN_x^3$, $(TN)^6N_x^2$ (où $N_x^8$ est $\alpha_x^4\beta_x^4$ ou $\alpha_x^4\chi_x^4$ ou $\chi_x^4\chi_x'^4$).

**2.** Je vais démontrer aussi qu'il y a encore plusieurs de ces formations qui sont superflues, car on peut les exprimer par les autres qui restent.

Si dans les identités (C. § 42. p. 144)

(1) $$H_y^3H_xa_x^4 - H_x^4a_y^3a_x = 3(xy)T_x^4T_y^2$$

(2) $$a_x^4H_y^4 - a_y^4H_x^4 = 4(xy)T_x^3T_y^3$$

on pose successivement $y_1 = \alpha_2$, $y_2 = -\alpha_1$; $y_1 = \chi_2$, $y_2 = -\chi_1$ et qu'on multiplie respectivement par $\alpha_x$, $\chi_x$, on trouve:

(3) $$(\alpha T)^2T_x^4\alpha_x^2 = -\frac{1}{3}\{a_x^4\cdot(H\alpha)^3H_x\alpha_x - H_x^4\cdot(\alpha\alpha)^3a_x\alpha_x\}$$
$$= \frac{1}{2}(HA_3 + fC_3)$$

(4) $$(\chi T)^2T_x^4\chi_x^2 = \frac{1}{3}(HB_3 - fD_3)$$

(5) $$(\alpha T)^3T_x^3\alpha_x = \frac{1}{4}(fC_4 - HA_4)$$

(6) $$(\chi T)^3T_x^3\chi_x = \frac{1}{4}(fD_4 - HB_4):$$

d'où l'on peut tirer, en échangeant $T$ avec $\tau$, $\alpha$ avec $a$, $\chi$ avec $H$, les rélations:

(7) $$(a\tau)^2\tau_x^4a_x^2 = \frac{1}{3}(\varphi B_3 - \chi A_3)$$

(8) $$(H\tau)^2\tau_x^4H_x^2 = \frac{1}{3}(\varphi D_3 + \chi C_3)$$

(9) $$(a\tau)^3\tau_x^3a_x = \frac{1}{4}(\varphi B_4 - \chi A_4)$$

(10) $$(H\tau)^3\tau_x^3H_x = \frac{1}{4}(\varphi D_4 - \chi C_4).$$

Pareillement, si qu'on $y$ pose (1), $y_1 = \tau_2$, $y_2 = -\tau_1$ et l'on multiplie par $\tau_x^3$ on trouve;

$$(\tau T)^2\tau_x^4T_x^4 = -\frac{1}{3}\{a_x^4\cdot(H\tau)^3H_x\tau_x^3 - H_x^4\cdot(a\tau)^3a_x\tau_x^3\}$$

c'est-à-dire ((9), (10)):

(11) $$(\tau T)^2\tau_x^4T_x^4 = \frac{1}{12}(f\chi C_4 + \varphi HB_4 - f\varphi D_4 - H\chi A_4).$$

Et, en faisant la même substitution $y_1 = \tau_2$, $y_2 = \tau_1$ dans la ($2^{\text{ième}}$), et en multipliant par $\tau_x^2$, on aura aussi:

(12) $(\tau T)^3 \tau_x^3 T_x^3 = \frac{1}{4}(fL_3 - HL_1)$.

3. Il faut à présent que nous déduisions de l'identité (2) quelques autres pour servir aux théorèmes qui suivent. Si l'on prend les premières polaires des deux membres de l'identité (2) par rapport aux $x_1$, $x_2$ et y introduit deux nouvelles variables $z_1$, $z_2$*), on a

(13) $a_x^3 a_z H_y^4 - a_y^4 H_x^3 H_z = (zy) T_x^3 T_y^3 + 3(xy) T_x^2 T_z T_y^3$.

Si l'on fait sur celle-ci encore la même opération, on trouve

(14) $a_x^2 a_z^2 H_y^4 - a_y^4 H_x^2 H_z^2 = 2(zy) T_x^2 T_z T_y^3 + 2(xy) T_z^2 T_x T_y^3$.

Mais si l'on prend la polaire de la (13) par rapport aux $y_1$, $y_2$ et y introduit les $z_1$, $z_2$, on obtient

$$a_x^3 a_z H_y^3 H_z - a_y^3 a_z H_x^3 H_z = \frac{3}{4}(zy) T_x^3 T_y^2 T_z + \frac{3}{4}(xz) T_x^2 T_z T_y^3 + \frac{9}{4}(xy) T_x^2 T_z^2 T_y^2,$$

c'est-à-dire, puisque $(zy) T_x + (xz) T_y = (yx) T_z$,

(15) $a_x^3 a_z H_y^3 H_z - a_y^3 a_z H_x^3 H_z = 3(xy) T_x^2 T_y^2 T_z^2$.

On tire de cette dernière identité, en posant $y_1 = \chi_2$, $y_2 = -\chi_1$, $x_1 = \alpha_2$, $x_2 = -\alpha_1$, en multipliant par $\alpha_x \chi_x$ et en substituant les $x$ aux $z$,

(16) $(\alpha\chi)(T\chi)^2 (T\alpha)^2 T_x \alpha_x \chi_x = \frac{1}{3}(A_3 D_3 + B_3 C_3)$.

Le premier membre n'est qu'une partie du glissement $(\tau T)^4 \tau_x^2 T_x^2$ et il est donc superflu. Cherchons à present son expression pour les autres formations. On tire aisément de la deuxième polaire de $\tau = (\alpha\chi)\alpha_x^3 \chi_x^3$ (C. § 53):

$$(\tau T)^4 \tau_x^2 T_x^2 = \frac{1}{5}\{(\alpha\chi)(\alpha T)(\chi T)^3 T_x^2 \alpha_x^2 + 3(\alpha\chi)(\alpha T)^2 (\chi T)^2 T_x^2 \alpha_x \chi_x + (\alpha\chi)(\alpha T)^3 (\chi T) T_x^2 \chi_x^2\}.$$

Si l'on pose dans la (14) $z_1 = \chi_2$, $z_2 = -\chi_1$; $y_1 = \alpha_2$, $y_2 = -\alpha_1$, et si l'on multiplie par $\chi_x^2$, on trouve:

$$-2(\alpha\chi)(\alpha T)^3 (\chi T) T_x^2 \chi_x^2 + 2(\alpha T)^3 (\chi T)^2 T_x \chi_x^2 \alpha_x = C_4 B_2 - A_4 D_2$$

et pareillement:

$$-2(\chi\alpha)(\chi T)^3 (\alpha T) T_x^2 \alpha_x^2 + 2(\chi T)^3 (\alpha T)^2 T_x \alpha_x^2 \chi_x = D_4 A_2 - B_4 C_2.$$

Si nous ajoutons à la différence entre celle-ci et la précédente la (16) multipliée par 4 (en se servant des simplificationen données par l'identité $(\chi T)\alpha_x + (T\alpha)\chi_x = (\alpha\chi) T_x$) nous trouvons:

*) C'est-à dire, si l'on fait l'opération

$$\frac{1}{4}\left(z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right).$$

V. Clebsch § 6. 10. 12.

(17) $(\tau T)^4 \tau_x^2 T_x^2 = \frac{1}{10}(D_4 A_2 + A_4 D_2 - B_4 C_2 - C_4 B_2) + \frac{2}{15}(A_3 D_3 + B_3 C_3)$.

On tire de suite de la première polaire de $\tau$

$$(\tau T)^5 \tau_x T = \frac{1}{2}\{(\alpha\chi)(\alpha T)^3(\chi T)^2 \chi_x T_x + (\alpha\chi)(\chi T)^3(\alpha T)^2 \alpha_x T_x\}.$$

Or, puisque la (13) nous donne

$$-(\chi T)^3(\alpha T)^3 \alpha_x \chi_x + 3(\alpha\chi)(\alpha T)^3(\chi T)^2 \chi_x T_x = B_3 C_4 - A_4 D_3$$
$$-(\alpha T)^3(\chi T)^3 \chi_x \alpha_x + 3(\chi\alpha)(\chi T)^3(\alpha T)^2 \alpha_x T_x = A_3 D_4 + B_4 C_3,$$

en soustrayant l'un de l'autre on aura

(18) $(\tau T)^5 \tau_x T_x = \frac{1}{6}(B_3 C_4 - A_4 D_3 - A_3 D_4 - B_4 C_3)$.

Il est évident aussi que l'on a

$$(\tau T)^6 = (\alpha\chi)(\alpha T)^3(\chi T)^3$$

c'est-à-dire, en posant dans la (2) $x_1 = \alpha_2$, $x_2 = -\alpha_1$; $y_1 = \chi_2$, $y_2 = -\chi_1$,

(19) $(\tau T)^6 = \frac{1}{4}(A_4 D_4 - B_4 C_4)$.

Les (11), (12), (17), (18), (19) démontrent que tous les glissements de $T$ sur $\tau$ sont superflus.

4. Occupons nous à présent du glissement $(M\tau)^5 M_x^3 \tau_x$ et commençons par l'hypothèse que l'on ait $M_x^8 = a_x^4 b_x^4$. Prenons la troisième polaire de cette expression, et nous trouverons sans difficulté,

$$(M\tau)^5 M_x^3 \tau_x = \frac{1}{7}\{(a\tau)(b\tau)^4 a_x^3 \tau_x + 6(a\tau)^2(b\tau)^3 a_x^2 b_x \tau_x\},$$

ou bien, puisque $(b\tau)a_x + (\tau a)b_x + (ab)\tau_x = 0$,

$$(M\tau)^5 M_x^3 \tau_x = \frac{1}{7}\{-(ab)(a\tau)(b\tau)^3 a_x^2 \tau_x^2 + 7(a\tau)^2(b\tau)^3 a_x^2 b_x \tau_x\}.$$

Mais si l'on écrit la (14) pour la forme $\varphi$, qu'on y pose $y_1 = b_2$, $y_2 = -b_1$; $x_1 = a_2$, $x_2 = -a_1$, qu'on substitue les $x$ aux $z$ et qu'on multiplie par $a_x^2$, on peut déduire aussi

(20) $(a\tau)^4(b\tau)^3 a_x^2 b_x \tau_x + (ab)(a\tau)(b\tau)^3 a_x^2 \tau_x^2 = \frac{1}{2}(A_2 B_4 - A_4 B_2)$.

La première polaire de $H$

$$H_x^3 H_y = \frac{1}{2}(ab)^2 a_x b_x (a_x b_y + b_x a_y),$$

si l'on multiplie ses deux membres par $(xy)$, en rappelant l'identité $a_x b_y - a_y b_x = (ab)(xy)$, nous donne encore,

$$(xy) H_x^3 H_y = \frac{1}{2}(ab) a_x b_x (a_x^2 b_y^2 - b_x^2 a_y^2)$$

c'est-à-dire, parce que les symboles $a$ et $b$ appartiennent à la même forme $f$,

$$(xy) H_x^3 H_y = -(ab) b_x^3 a_x a_y^2.$$

On peut faire dans celle-ci $x_1 = \tau_2$, $x_2 = -\tau_1$, substituer le $x$ aux $y$ et multiplier par $\tau_x^2$ et alors on en tire (10),

(21) $\quad (ab)(a\tau)(b\tau)^3 a_x^2 \tau_x^2 = (H\tau)^3 H_x \tau_x^3 = \frac{1}{4}(\varphi D_4 - \chi C_4).$

Les (20), (21) donnent

(22) $\quad (M\tau)^5 M_x^3 \tau_x = \frac{1}{2}(A_2 B_4 - A_4 B_2) + \frac{2}{7}(\varphi D_4 - \chi C_4).$

Pour démontrer que $(M'\tau)^5 M_x'^3 \tau_x$, $(M''\tau)^5 M_x''^3 \tau_x$, où $M_x'^8 = a_x^4 H_x^4$, $M_x''^8 = H_x^4 H_x'^4$, sont superflues, nous appliquerons l'opération $\delta$ (C. § 36., 41.) qui est définie par

$$\delta\psi = P_1 \frac{\partial\psi}{\partial Q_1} + P_2 \frac{\partial\psi}{\partial Q_2} + P_3 \frac{\partial\psi}{\partial Q_3} + P_4 \frac{\partial\psi}{\partial Q_4} + P_5 \frac{\partial\psi}{\partial Q_5}$$

où les $P$ sont les coefficients de la $H$ et les $Q$ ceux de la $f$. En se servant de la règle donnée par M. Clebsch (p. 120 –21) et en se rappellant que (C. §. 41.),

(23) $\quad \delta f = H, \quad \delta H = \frac{1}{3} i_f f, \quad \delta T = 0, \quad \delta i_f = 2 j_f, \quad \delta j_f = \frac{1}{2} i_f^2,$

nous tirerons de la (22)

$$\delta (M\tau)^5 M_x^3 \tau_x = 2 (M'\tau)^5 M_x'^3 \tau_x =$$

$$= \frac{1}{2}(C_2 B_4 - C_4 B_2 + A_2 D_4 - A_4 D_2) + \frac{2}{7}\left(\varphi \cdot \frac{1}{3} i_f B_4 - \chi \cdot \frac{1}{3} i_f A_4\right)$$

c'est-à-dire:

(24) $\quad (M'\tau)^5 M_x' \tau_x = \frac{1}{4}(C_2 B_4 - C_4 B_2 + A_2 D_4 - A_4 D_2) + \frac{1}{21} i_f (\varphi B_4 - \chi A_4).$

Nous pouvons appliquer à celle-ci encore l'opération $\delta$ et nous aurons

$$\delta (M'\tau)^5 M_x'^3 \tau_x = (M''\tau)^5 M_x''^5 \tau_x + \frac{1}{3} i_f (M\tau)^5 M_x^3 \tau_x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} i_f A_2 B_4 - \frac{1}{3} i_f A_4 B_2 + C_2 D_4 - C_4 D_2\right) + \frac{2}{21} j_f (\varphi B_4 - \chi A_4)$$

$$+ \frac{1}{21} i_f (\varphi D_4 - \chi C_4):$$

dont nous tirerons, par la (22),

(25) $\quad (M''\tau)^5 M_x''^3 \tau_x = \frac{1}{2}(C_2 D_4 - C_4 D_2) + \frac{2}{21} j_f (\varphi B_4 - \chi A_4)$

$$- \frac{1}{21} i_f (\varphi D_4 - \chi C_4).$$

Les formules (22), (24), (25), avec un changement des dénominations nous donnent de suite les expressions de $(NT)^5 N_x^3 T_x$ où $N_x^8$ est $\alpha_x^4 \beta_x^4$ ou $\alpha_x^4 \chi_x'^4$ ou $\chi_x^4 \chi_x'^4$.

**5.** Enfin, pour démontrer que les glissements $(M\tau)^6 M_x^2$ sont aussi superflus, nous nous servirons d'une méthode parfaitement analogue à la précédente. D'abord, étant $M_x^8 = a_x^4 b_x^4$,

$$(M\tau)^6 M_x^2 = \frac{1}{7}\{3(a\tau)^2(b\tau)^4 a_x^2 + 4(a\tau)^3(b\tau)^3 a_x b_x\}$$
$$= (a\tau)^3(b\tau)^3 a_x b_x - \frac{3}{7}(ab)(a\tau)^2(b\tau)^3 a_x\tau_x .$$

Or

$$H(xy) = (ab)^2 a_x^2 b_x^2 (xy) = (ab) a_x^2 b_x^2 \{a_x b_y - b_x a_y\}$$
$$= -2(ab) a_x^2 b_x^3 a_y$$

ainsi,

$$L_3 = (H\tau)^4 \tau_x^2 = -2(ab)(a\tau)^2(b\tau)^3 a_x\tau_x:$$

et après, par la (13) écrite pour la forme $\varphi$

$$(a\tau)^3(b\tau)^3 a_x b_x + 3(ab)(a\tau)^2(b\tau)^3 a_x\tau_x = A_3 B_4 - A_4 B_3.$$

Par conséquent:

$$(26) \qquad (M\tau)^6 M_x^2 = A_3 B_4 - A_4 B_3 + \frac{12}{7} L_3.$$

On tire de celle-ci, avec l'opération $\delta$, en désignant, comme auparavant, $a_x^4 H_x^4$, $H_x^4 H_x'^4$ par $M_x'^8$, $M_x''^8$ respectivement

$$(27) \quad (M'\tau)^6 M_x'^2 = \frac{1}{2}(A_3 D_4 - C_3 B_4 - C_4 B_3 - A_4 D_3) + \frac{2}{7} i_f L_1$$

et, si l'on applique encore l'opération $\delta$,

$$(M''\tau)^6 M_x''^2 + \frac{1}{3} i_f \cdot (M\tau)^6 M_x^2 =$$

$$= \frac{1}{3} i_f (A_3 B_1 - A_4 B_3) - C_3 D_4 - C_4 D_3 + \frac{2}{7} i_f L_3 + \frac{4}{7} j_f L_1$$

donc on a, par la formule (26):

$$(28) \qquad (M''\tau)^6 M_x''^2 = -(C_3 D_4 + C_4 D_3) - \frac{2}{7} i_f L_3 + \frac{4}{7} j_f L_1.$$

Enfin les formules (26), (27), (28), avec un changent de dénominations, donnent $(NT)^6 N_x^2$ où $N_x^8$ soit $\alpha_x^4 \beta_x^4$ ou $\alpha_x^4 \chi_x^4$ ou $\chi_x^4 \chi_x'^4$.

On peut donc conclure que le système complet pour deux biquadratiques se reduit seulement aux 30 formes suivantes*):

a) 8 invariants $i_f$, $j_f$, $i_\varphi$, $j_\varphi$, $A_4$, $B_4$, $C_4$, $D_4$;
b) 8 covariants quadratiques $A_3$, $B_3$, $C_3$, $D_3$, $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$;
c) 8 covariants biquadratiques $f$, $\varphi$, $H$, $\chi$, $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$;
d) 6 du sixième ordre $T$, $\tau$, $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$.

**6.** Si l'on échange $f$ avec $\varphi$ dans l'expression (12) de $(\tau T)^3 \tau_x^3 T_x^3$ on a aussi,

$$(T\tau)^3 T_x^3 \tau_x^3 = \frac{1}{4}(\varphi L_4 - \chi L_2).$$

et en faisant la somme de celle-ci avec la (12) on trouve:

$$HL_1 + \chi L_2 - f L_3 - \varphi L_4 = 0.$$

*) V. Gordan Mathem. Annalen, t. 2, p. 273.

On peut obtenir d'autres rélations entre les formes du système complet si l'on exprime les carrés et les produits des covariants du sixième ordre (qui sont des déterminants fonctionnels) par les invariants et les covariants du 4e ordre avec les formules générales données par M. Clebsch (§ 35., (10) (11)). Pour écrire de suite ces rélations, il suffit seulement de se rappeler que pour la forme $f$ (et pareillement pour la forme $\varphi$) on a (C. p. 136, 143)

$$(aH)^2 a_x^2 H_x^2 = \frac{1}{6} i_f f, \quad (HH')^2 H_x^2 H_x'^2 = \frac{1}{3} j_f f - \frac{1}{6} i_f H,$$

dont la seconde se déduit de la première avec l'opération $\delta$ (n° 4). Ces rélations deviennent plus simples, si l'on pose

$$A_2' = A_2, \; B_2' = B_2 - \frac{1}{6} i_\varphi f, \; C_2' = C_2 - \frac{1}{6} i_f \varphi, \; D_2' = D_2 - \frac{1}{6} i_\varphi H - \frac{1}{6} i_f \chi:$$

c'est-à-dire si l'on substitue, dans le système complet aux $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$ les $A_2'$, $B_2'$, $C_2'$ $D_2'$*). En faisant ainsi, on peut ajouter aux expressions connues de $T^2$, $\tau^2$ (C. § 42.) les suivantes:

$$\begin{aligned}
T\tau &= -\tfrac{1}{2}(A_2' H\chi - B_2' H\varphi - C_2' \chi f + D_2' f\varphi), \\
TA_1 &= -\tfrac{1}{2}(H^2\varphi - A_2' Hf + C_2' f^2), \\
TB_1 &= -\tfrac{1}{2}(H^2\chi - B_2' Hf + D_2' f^2), \\
A_1^2 &= -\tfrac{1}{2}(H\varphi^2 - 2A_2' f\varphi + \chi f^2), \\
A_1 D_1 &= \tfrac{1}{2}(B_2' \varphi H + C_2' f\chi), \\
B_1 C_1 &= -\tfrac{1}{2}(A_2' H\chi + D_2' f\varphi),
\end{aligned}$$

etc.

7. Si nous avons égard aux covariants quadratiques $A_3$, $B_3$, $C_3$, $D_3$, les rélations connues entre les invariants et les covariants simultanés d'un système de formes quadratiques (C. § 58.) serviront à nous faire arriver à d'autres rélations entre les formes du système complet des deux biquadratiques. En effet, désignons par $\Delta_{aa}$ l'invariant (discriminant) de $A_3$, par $\Delta_{ab}$ l'invariant simultané de $A_3$, $B_3$ et ainsi de suite par $\Delta_{bb}$, $\Delta_{bc}$, ... les autres: pour avoir ces rélations il faudra exprimer ces invariants par ceux du système complet.

On aura d'abord

$$\begin{aligned}
\Delta_{ab} = (A_3 B_3)^2 &= \tfrac{1}{2}(a\alpha)^3 (b\chi)^3 \{(ba)(\chi\alpha) + (ba)(\chi a)\} \\
&= -\tfrac{1}{2}(a\alpha)^4 (b\chi)^4 + (a\alpha)^3 (b\chi)^3 (ba)(\chi\alpha).
\end{aligned}$$

*) Pour l'échange de $f$ et $\varphi$ la forme $D_2'$ (comme $D_2$) ne change pas et les formes $B_2'$, $C_2'$ (comme les $B_2$, $C_2$) s'échangent entre eux.

Or, puisqu'on a $(ab)a_x^3 b_x^3 = 0$, si l'on fait la troisième polaire, on trouve

$$(ab)a_y^3 b_x^3 = -3(ab)a_y^2 a_x b_x^2 b_y :$$

c'est-à-dire, par un échange des symboles $a$, $b$ et l'application d'identités connues (C. § 15., VII, VIII)

$$\begin{aligned}(ab)a_y^3 b_x^3 &= \tfrac{3}{2}(ab)a_y a_x b_y b_x (a_x b_y - b_x a_y)\\ &= \tfrac{3}{2}(ab)^2(xy)a_y a_x b_y b_x\\ &= \tfrac{3}{2}(ab)^2(xy)\{a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - (ab)^2(xy)^2\}\\ &= 3(ab)^2(xy)a_x^2 b_y^2 - \tfrac{3}{2}(ab)^4(xy)^3;\end{aligned}$$

ou bien (C. § 40. (2)):

$$(xy)(ab)a_y^3 b_x^3 = 3(xy)^2 H_x^2 H_y^2 - \tfrac{1}{2} i_f (xy)^4 .$$

Ainsi donc, si l'on pose $y_1 = \alpha_2$, $y_2 = -\alpha_1$; $x_1 = \chi_2$, $x_2 = -\chi_1$ puisque $(\alpha\chi)^2 \alpha_x^2 \chi_x^2 = \frac{1}{6} i_\varphi \cdot \varphi$ (C. p. 138), on a

$$(29) \qquad (a\alpha)^3(b\chi)^3(ba)(\chi\alpha) = -\tfrac{1}{2} i_\varphi C_4 + \tfrac{1}{2} i_f j_\varphi ;$$

et par conséquent

$$(30) \qquad \Delta_{ab} = -\tfrac{1}{2}(A_4 B_4 + i_\varphi C_4 - i_f j_\varphi) :$$

dont on tire, en échangeant $f$ et $\varphi$:

$$(31) \qquad \Delta_{ac} = \tfrac{1}{2}(A_4 C_4 + i_f B_4 - i_\varphi j_f) .$$

On obtient les autres invariants $\Delta$ des expressions précédentes par l'opération que nous avons définie au n° 4: nous la désignerons par $\delta$ si elle est faite par rapport à $f$, par $\delta'$ si elle est faite par rapport à la forme $\varphi$.

On a

$$\Delta_{dc} = \tfrac{1}{2} C_4 D_4 - (HH')(\alpha\chi)(H\alpha)^3(H'\chi)^3 .$$

On tire l'expression de l'invariant $(HH')(\alpha\chi)(H\alpha)^3(H'\chi)^3$ de (29), si l'on y applique deux fois l'opération $\delta$, et on trouve,

$$(32) \quad -(HH')(\alpha\chi)(H\alpha)^3(H'\chi)^3 = \tfrac{1}{6} j_f i_\varphi A_4 - \tfrac{1}{12} i_f i_\varphi C_4 - \tfrac{1}{12} i_f^2 j_\varphi ,$$

et par conséquent,

$$(33) \quad \Delta_{dc} = \tfrac{1}{2}\left(C_4 D_4 + \tfrac{1}{3} j_f i_\varphi A_4 - \tfrac{1}{6} i_f i_\varphi C_4 - \tfrac{1}{6} i_f^2 j_\varphi\right) .$$

Et, par l'échange de $f$ et $\varphi$,

$$(34) \quad \Delta_{db} = -\tfrac{1}{2}\left(B_4 D_4 + \tfrac{1}{3} j_\varphi i_f A_4 - \tfrac{1}{6} i_f i_\varphi B_4 - \tfrac{1}{6} i_\varphi^2 j_f\right) .$$

Quant aux invariants $\Delta_{bc}$ $\Delta_{ad}$ on peut les déterminer aisément de la manière qui suit. D'abord on a

$$\Delta_{bc}+\Delta_{ad}=\tfrac{1}{2}(B_4C_4-A_4D_4)+(a\alpha)^3(\chi H)^3(aH)(\chi\alpha)-(a\chi)^3(\alpha H)^3(aH)(\alpha\chi).$$

Mais (C. p. 40, V, I)

$$(a\alpha)^3(\chi H)^3(aH)(\chi\alpha)-(a\chi)^3(\alpha H)^3(aH)(\alpha\chi)=$$

$$=\tfrac{1}{2}(a\alpha)^2(\chi H)^2\{(a\alpha)^2(\chi H)^2+(aH)^2(\chi\alpha)^2-(a\chi)^2(\alpha H)^2\}$$

$$=\tfrac{1}{2}(a\chi)^2(\alpha H)^2\{(a\chi)^2(\alpha H)^2+(aH)^2(\alpha\chi)^2-(a\alpha)^2(\chi H)^2\}$$

$$=\tfrac{1}{2}(A_4D_4-B_4C_4)+\tfrac{1}{2}(aH)^2(\alpha\chi)^2\{(a\alpha)^2(\chi H)^2-(a\chi)^2(\alpha H)^2\}$$

$$=\tfrac{1}{2}(A_4D_4-B_4C_4)+\tfrac{1}{2}(aH)^3(\alpha\chi)^3\{(a\alpha)(\chi H)+(a\chi)(\alpha H)\}.$$

Or, puisque $-\frac{1}{2}(aH)^3(\alpha\chi)^3\{(a\alpha)(\chi H)+(a\chi)(\alpha H)\}$ est le premier glissement des deux formes $(aH)^3a_xH_x$, $(\alpha\chi)^3\alpha_x\chi_x$, qui sont identiquement nulles (C. p. 136), il est nul aussi: par conséquent

$$\Delta_{bc}+\Delta_{ad}=0^*).$$

Mais l'on a encore

$$\delta\Delta_{ab}=\Delta_{ad}-\Delta_{bc}.$$

et ainsi par (30),

$$(35)\quad \Delta_{ad}=-\Delta_{bc}=-\tfrac{1}{4}\left(A_4D_4+B_4C_4+\tfrac{1}{3}i_fi_\varphi A_4-2j_fj_\varphi\right).$$

Et, puisque $\Delta_{aa}$ est du second degré dans les coefficients de chaque fonction $f$, $\varphi$, il faut que l'on ait

$$\Delta_{aa}=P_1A_4^2+P_2D_4+P_3i_\varphi i_f,$$

ou $P_1$, $P_2$, $P_3$, désignent des coefficients numériques qu'on doit déterminer. On en trouve les valeurs $P_1=-\frac{1}{2}$, $P_2=-3$, $P_3=\frac{1}{2}$, par la (31), parce qu'on a $2\Delta_{aa}=-2\Delta_{ac}$: et ainsi:

$$(36)\qquad \Delta_{aa}=-\tfrac{1}{2}A_4^2-3D_4+\tfrac{1}{2}i_\varphi i_f.$$

Enfin, puisque

$$\delta\Delta_{ac}=-\Delta_{cc}-\tfrac{1}{3}i_f\Delta_{aa},$$

$$\delta'\Delta_{cd}=-\Delta_{dd}-\tfrac{1}{3}i_\varphi\Delta_{cc},$$

on tire des (31) (33)

$$(37)\qquad \Delta_{cc}=-\tfrac{1}{2}\left(C_4^2-i_fD_4+2j_fB_4-\tfrac{1}{6}i_\varphi i_f^2\right),$$

$$(38)\qquad \Delta_{dd}=-\tfrac{1}{2}D_4^2-\tfrac{1}{3}j_fj_\varphi A_4+\tfrac{1}{6}i_fj_fB_4$$

$$-\tfrac{1}{12}i_fi_\varphi D_4+\tfrac{1}{6}i_fj_\varphi C_4+\tfrac{1}{72}i_f^2i_\varphi^2;$$

*) Pour cette rélation, si $\Delta_{bc}=0$, est aussi $\Delta_{ad}=0$ et réciproquement. On a donc le théorème:

*Si les quatre racines de $B_3=0$, $C_3=0$ forment un groupe harmonique, les quatre racines de $A_3=0$, $D_3=0$ forment aussi un groupe harmonique et réciproquement.*

et la première, avec l'échange de $f$ et $\varphi$ nous donne

$$\Delta_{bb} = -\frac{1}{2}\left(B_4^2 - i_f D_4 + 2 j_\varphi C_4 - \frac{1}{6} i_f i_\varphi^2\right)^*) . \tag{39}$$

Si l'on pose les valeurs trouvées (30), (31), (33), (34), (35), (36), (37), (38), (39), dans la formule (C. p. 205)

$$\begin{vmatrix} \Delta_{aa} & \Delta_{ab} & \Delta_{ac} & A_3 \\ \Delta_{ba} & \Delta_{bb} & \Delta_{bc} & B_3 \\ \Delta_{ca} & \Delta_{cb} & \Delta_{cc} & C_3 \\ A_3 & B_3 & C_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

et dans les autres qui s'en tirent par la substitution successive de $A_3$, $B_3$, $D_3$; $A_3$, $C_3$, $D_3$; $B_3$, $C_3$, $D_3$, à $A_3$, $B_3$, $C_3$, on aura quatre rélations entre les covariants quadratiques $A_3$, $B_3$, $C_3$, $D_3$ et les invariants du système complet. Par la substitution des mêmes valeurs dans la formule (C. p. 207):

$$\begin{vmatrix} \Delta_{aa} & \Delta_{ab} & \Delta_{ac} & \Delta_{ad} \\ \Delta_{ba} & \Delta_{bb} & \Delta_{bc} & \Delta_{bd} \\ \Delta_{ca} & \Delta_{cb} & \Delta_{cc} & \Delta_{cd} \\ \Delta_{da} & \Delta_{db} & \Delta_{dc} & \Delta_{dd} \end{vmatrix} = 0$$

on aura une rélation entre les invariants qui sera *la seule qui puisse subsister entre eux*, car par un théorème général (C. § 79.), le nombre des invariants indépendants doit être inférieur de 3 au nombre total des coefficients des deux formes $f$, $\varphi$. Si $i_f = i_\varphi = 0$, c'est-à-dire si (C. p. 171) chaque biquadratique a quatre racines qui forment un groupe équianarmonique avec des transformations bien simples de déterminants on peut donner à cette rélation unique la forme

$$\begin{aligned} &(\Omega'^2 - j_f j_\varphi B_4 C_4)\left(A_4 D_4 \Omega + \frac{3}{2} D_4^3 + \frac{1}{6} j_f j_\varphi A_4^3\right) \\ &+ (\Omega^2 - j_f j_\varphi A_4 D_4)\left(B_4 C_4 \Omega' + \frac{1}{2} j_f B_4^3 + \frac{1}{2} j_\varphi C_4^3\right) \\ &- (\Omega'^2 - j_f j_\varphi B_4 C_4)(\Omega^2 - j_f j_\varphi A_4 D_4) = 0; \end{aligned}$$

où

$$\Omega = -\frac{1}{2}\left(A_4 D_4 + \frac{1}{2} B_4 C_4 - j_f j_\varphi\right),$$

$$\Omega' = -\frac{1}{2}\left(B_4 C_4 + \frac{1}{2} A_4 D_4 - j_f j_\varphi\right).$$

Rome, Juillet et Octobre 1875.

---

*) Pour verifier les résultats obtenus on peut observer (par ex.) que

$$\delta' \Delta_{ab} = \Delta_{bb} + \frac{1}{3} i_\varphi \Delta_{aa}, \qquad \delta' \Delta_{ad} = \Delta_{db} - \frac{1}{3} i_\varphi \Delta_{ac};$$

et que $\Delta_{aa}$, $\Delta_{dd}$, $\Delta_{ad}$, $\Delta_{bc}$, pour l'échange de $f$ et $\varphi$ doivent se reproduire.

# Allgemeine Theorie der Asymptoten der algebraischen Curven.

Von O. Stolz in Innsbruck.

Plücker gibt im ersten Abschnitte seiner *Theorie der algebraischen Curven**) eine systematische Entwickelung der Asymptoten bis zur *vierten* Ordnung einschliesslich. Dabei bedient er sich meistens Continuitäts-Betrachtungen und sucht sich durch Abzählen der unbestimmten Constanten von der Vollzähligkeit seiner Ergebnisse zu überzeugen. Abgesehen davon, dass diese Methode um so umständlicher sich gestaltet, je höher die Ordnung der Asymptoten ansteigt, so leistet sie wenig zur Lösung der Frage, welche Asymptoten eine *gegebene* Curve besitze. Ich will daher im Folgenden versuchen, mit Hülfe der Fundamental-Eigenschaften der algebraischen Functionen unmittelbar zur Aufstellung der Gleichungen der krummlinigen Asymptoten von beliebiger Ordnung zu gelangen d. h. dieselben aus der Gleichung einer gegebenen Curve abzuleiten. Dabei wird es sich zeigen, dass die Plücker'schen Resultate mit einer einzigen Ausnahme (vergl. u. Nr. 22 b) *einem* allgemeinen Satze entspringen.

## § 1.

## Asymptoten im weiteren Sinne.

1. Es mögen

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{\zeta}$$

ein lineares System von Punktcoordinaten bezeichnen, in welchem $\zeta = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden ist — d. i. ein System von Parallelcoordinaten, wobei es jedoch frei steht, für jede der beiden Coordinaten eine besondere Masseinheit zu Grunde zu legen. Man findet nun die Coordinaten der unendlich fernen Punkte einer gegebenen irreducibeln Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

indem man in der homogenen Form dieser Gleichung $\zeta = 0$ setzt d. i.

*) Citate aus diesem Werke sind im Folgenden durch Th. bezeichnet.

durch die Gleichung

$$U_n(\xi, \eta) = 0, \tag{2}$$

wenn unter $U_n(x, y)$ die Glieder $n^{\text{ter}}$ Dimension in $x$ und $y$ von (1) verstanden werden.

Betrachtet man jeden dieser unendlich fernen Punkte für sich, so kann man stets annehmen, dass *zu ihm ein nicht verschwindendes* $\xi$ *gehöre.* (Im Gegenfalle braucht man bloss die Coordinaten $x$ und $y$ zu vertauschen.) Dann ist $x = \infty$ und es werden die einem solchen benachbarten Punkte von (1) allgemein durch eine oder mehrere nach fallenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x$ fortschreitende Reihen von der Form

$$y = a_m x + a_{m-k} x^{\frac{m-k}{m}} + \cdots + a_1 x^{\frac{1}{m}} + a_0 + a_1 x^{-\frac{1}{m}} + \cdots \tag{3}$$

dargestellt. Hier kann $k$ alle ganzen Werthe von 1 bis $m-1$ annehmen, so dass $a_{m-k}$ *als nicht verschwindend* angesehen werden kann. — Die positiven Exponenten von $x$ dürfen nämlich die Einheit nicht überschreiten; sonst würde Lim $(y:x)$ für Lim $x = \infty$ unendlich werden, was schon Lim $\xi = 0$ voraussetzt. — Die Gerade $y = a_m x$ bestimmt den bezüglichen unendlich fernen Punkt der Curve (1), dessen Coordinaten somit $1, a_m, 0$ sind.

Von den Entwickelungen (3) greifen wir *eine* heraus, wobei es nicht darauf ankommt, ob die Coefficienten $a$ reelle oder complexe Werthe besitzen.

*Unter Asymptote dieses Curvenzweiges im weiteren Sinne* soll nun jede, aber auch nur eine solche Curve $A(x, y) = 0$ verstanden sein, die mit der unendlich fernen Geraden ausser dem Punkte $1, a_m, 0$ keinen gemein hat und dabei in der Umgebung des Werthes $x = \infty$ eine einzige Entwickelung für $y$ liefert, welche bis zum Gliede mit $x^0$ einschliesslich mit (3) übereinstimmt. — In der That, bezeichnet man die Ordinate für die Curve $A = 0$ mit $y_1$, so folgt unmittelbar Lim $(y - y_1) = 0$ für Lim $x = \infty$. Und es lässt sich leicht zeigen, wie unten N$^{\text{r}}$ 9 gelegentlich angemerkt ist, dass diese Eigenschaft erhalten bleibt bei jeder Coordinatentransformation, welche die Gleichung der unendlich fernen Geraden unverändert lässt, und *nicht durch den in Rede stehenden unendlich fernen Punkt die Ordinaten-Axe führt.*

Die Gleichungen aller dieser Curven müssen sein von der Form

$$0 = \prod_1^m \prod_r \left\{ -y + a_m x + a_{m-k} x^{\frac{m-k}{m}} \omega_r^{m-k} + \cdots + a_0 + a_{-1} x^{-\frac{1}{m}} \omega_r^{-1} + \cdots \right\}, \tag{4}$$

wo $\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_m$ die $m^{\text{ten}}$ Wurzeln der Einheit bezeichnen. Dieser Ausdruck ist eine ganze Function $m^{\text{ten}}$ Grades von $y$, deren Coefficienten nach fallenden ganzen Potenzen von $x$ fortschreitende unendliche Reihen bilden. Um zur Gleichung der eben definirten Asymptote zu gelangen,

hat man die $a_{-k}$ so anzunehmen, dass sämmtliche negative Potenzen aus dem Ausdrucke wegfallen; z. B. alle $a_{-m_i}$ müssen verschwinden. — Denn die Multiplication mit einer ganzen positiven Potenz von $x$ kann nicht mehr zugelassen werden, weil dadurch unsere Curve nach (2) auch den unendlich fernen Punkt $\xi = 0$ erhielte.

Dass die Erfüllung dieser unendlich vielen Bedingungsgleichungen möglich ist, ohne die Grössen $a_m$, $a_{m-k}$, $\cdots$ $a_1$, $a_0$ irgendwie zu beschränken, lässt sich im Falle, *dass m und k relative Primzahlen sind,* leicht einsehen, indem nun jede derselben *sicher einen* neuen Coefficienten $a_{-k}$ enthält (vergl. Nr. 4.). — Für die allgemeine Annahme von $m$ und $k$, wobei diese Zahlen ein von der Einheit verschiedenes grösstes gemeinschaftliches Mass $p$ besitzen können, mag man folgende Ueberlegung anstellen.

Setzen wir in (4)

$$a_m x + a_0 - y = y',$$

so zerfallen die in $x$ und $y'$ ganzen Glieder dieses Ausdruckes in zwei Gruppen. Es erscheint nämlich zuerst eine Reihe solcher Glieder, deren Coefficienten nur aus den $a_{m-k}$, $a_{m-k-1} \cdots a_1$ zusammengesetzt sind. Halten wir dieselben fest und geben allen anderen in (4) auftretenden, in $x$ ganzen Gliedern willkürliche Coefficienten, setzen hierauf für $y'$ ein den Ausdruck

$$(5)\quad -y' = a_{m-k} x^{\frac{m-k}{m}} + a_{m-k-1} x^{\frac{m-k-1}{m}} + \cdots + a_1 x^{\frac{1}{m}} + a_0' + a_{-1} x^{-\frac{1}{m}} + \cdots$$

und ordnen nach fallenden Potenzen von $x^{\frac{1}{m}}$; so werden einige Glieder identisch verschwinden. Die Coefficienten der zurückbleibenden Glieder liefern $= 0$ gesetzt, die Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten vorstehender Reihe, von einem gewissen angefangen. Wäre dieser bereits $a_{-1}$, so würde das Gleichungspolynom $A(x, y') = 0$ einfach aus der ersten Gruppe von Gliedern und denen der zweiten, ein jedes mit einem willkürlichen Coefficienten versehen, bestehen. Es kann jedoch der genannte Coefficient auch einen Zeiger $> 0$ haben, so dass zwischen den unbestimmten Constanten noch *lineare* Bedingungsgleichungen nöthig sind. *Auf keinen Fall können sich dieselben aber widersprechen, was immer den $a_{m-k} \cdots a_1$ neben $a_0' = 0$ für Werthe beigelegt sind.* Denn dadurch dass die Coefficienten der Glieder der zweiten Gruppe von $A(x, y')$ diejenigen Werthe erhalten, welche sie in der ganzen Function

$$(6)\quad N_m(x, y') = \prod_1^m \prod_r \left(y' + a_{m-k} x^{\frac{m-k}{m}} \omega_r^{m-k} + \cdots + a_1 x^{\frac{1}{m}} \omega_r\right)$$

besitzen, werden diese Gleichungen immer erfüllt. Reducirt man nun vermittelst derselben die bisher noch willkürlichen Coefficienten in $A(x, y')$ auf die wirklich unbestimmten Constanten, so zerfällt dieses

Polynom in zwei Theile, deren einer, im Folgenden als *wesentlich* bezeichnet und durch $W(x, y')$ dargestellt, in den Coefficienten nur die $a_{m-k}^{\cdot} \cdots a_1$ enthält.

Dass die eben definirte ganze Function $A(x, y')$ nicht nur die *nothwendige* Form für das Gleichungspolynom *der allgemeinen Asymptote $m^{ter}$ Ordnung**) des Curvenzweiges (3) sei, sondern auch in der That, was immer die unbestimmten Constanten für endliche Werthe erhalten, für $y'$ in der Umgebung des Werthes $x = \infty$ stets eine und nur eine Entwickelung liefere, welche *wirklich* nach steigenden Potenzen von $\sqrt[m]{1 : x}$ fortschreitet und mit

$$-\left\{a_{m-k} x^{\frac{m-k}{m}} + \cdots + a_1 x^{\frac{1}{m}} + a_{-1} x^{-\frac{1}{m}}\right\}$$

beginnt; — ergiebt sich leicht aus bekannten Fundamentalsätzen über die algebraischen Functionen. Zunächst bemerkt nun den Satz: „Setzt man *mechanisch* in eine Gleichung wie $A(x, y') = 0$ für $y'$ ein

$$(5) \quad -y' = a_{m-k} x^{\frac{m-k}{m}} + \cdots + a_1 x^{\frac{1}{m}} + a_{-1} x^{-\frac{1}{m}} + \cdots + a_{-i} \cdot x^{-\frac{i}{m}} + \cdots = X + \cdots$$

und es gelingt, für die $a_{m-k} \cdots a_{-i}$ solche Werthe zu finden, dass die Coefficienten aller Glieder von $A(x, y')$ bis zu einer bestimmten Potenz von $\sqrt[m]{1 : x}$ verschwinden, so ist $-X$ in der That der Anfang mindestens einer Entwickelung von $y'$ in der Umgebung des Werthes $y = \infty$." Dieses folgt unmittelbar daraus, dass für diesen Werth von $x$ die algebraische Function $y'$ Entwickelungen von der Form (5) liefern muss**). — Nun wurden oben die Coefficienten von $A(x, y')$ so bestimmt, dass die Grössen $a_{m-k} \cdots a_1$ irgend welche vorgegebene Werthe erhalten und noch obendrein, falls die positiven Exponenten der nicht verschwindenden Glieder von (5) sich auf einen kleineren Nenner als $m$ reduciren sollten, dafür gesorgt, dass sicher in demselben ein negativer Exponent vorkommt, der eine solche Reduction im Ganzen unmöglich macht.

Somit ist die Entwickelung (5) der algebraischen Function $m^{ter}$ Ordnung $y'$ die *einzige*, welche in der Umgebung des Werthes $x = \infty$ besteht.

2. Sowie eben die Gleichungen *aller Curven $m^{ter}$ Ordnung* gebildet wurden, für welche die Coefficienten $a_m$, $a_{m-k} \cdots a_0$ in der Reihe (3)

*) Diese Bezeichnung ist enger als die gleichlautende Plücker'sche; denn die letztere bezieht sich darauf, wie oft der Factor $\eta - a_m \xi$ in der Gleichung (2) vorkommt.

**) Man schliesst dann weiter, wie in dem Aufsatze des Verfassers: „*Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen*" (Diese Annalen B. VIII, p. 415 ff.) Nr. 5. angegeben ist.

dieselben vorgegebenen Werthe haben, kann man auch zur Gleichung *jeder Curve $n^{ter}$ Ordnung* gelangen, welche $i$ gegebene unendliche Zweige von der Art besitzen soll, dass einem jedem eine Entwickelung von der Form (3) entspricht

$$y = \varphi^{(\nu)}\left(x^{-\frac{1}{m^{(\nu)}}}\right), \quad \Sigma m^{(\nu)} = n \ (\nu = 0, 1, 2 \cdots i-1).$$

Dabei nehmen wir eben an, dass in diesen $i$ Reihen die Coefficienten, deren Zeiger nicht negativ sind, sämmtlich gegebene Werthe erhalten, und vielleicht auch einige der folgenden, was bei höherer Osculation der Zweige mit je einer vorgeschriebenen Asymptote oder unter einander eintreten würde. Jedenfalls kommt es aber von einem bestimmten Gliede der Reihe an auf die Werthe der Coefficienten $a^{(\nu)}$ nicht weiter an. Wir lassen nun dieselben unbestimmt und bilden den Ausdruck

$$\Pi^{(\nu)} = \prod_{1}^{m^{(\nu)}}{}_{r} \left\{ -y + \varphi^{(\nu)}\left(x^{-\frac{1}{m^{(\nu)}}} \omega_r^{(\nu)}\right)\right\},$$

welcher von der Form

$$A^{(\nu)}(x, y) + R^{(\nu)}(x, y)$$

sein wird, worin $R^{(\nu)}$ den Inbegriff der Glieder mit negativen ganzen Potenzen von $x$ bezeichnet. Die Coefficienten der Glieder von $A^{(\nu)}$ und $R^{(\nu)}$ werden ähnlich, wie oben angedeutet ist, auf unbestimmte Constante zurückgeführt. Sind z. B. nur die Werte der Coefficienten $a^{(\nu)}$ mit einem Index $\geq 0$ gegeben, so bleiben sicher alle Coefficienten von $R^{(\nu)}$ willkürlich.

Endlich bilden wir das Product

$$\prod_{0}^{i-1}{}_{\nu} (A^{(\nu)} + R^{(\nu)})$$

und suchen die darin noch vorhandenen unbestimmten Constanten so zu bestimmen, dass die Glieder mit negativen Potenzen von $x$ daraus entfallen. Wenn dieses möglich ist, so ist der zurückbleibende in $x$ und $y$ ganze Theil das Gleichungspolynom der gesuchten Curve. Denn diese Form ist für dasselbe nicht allein *nothwendig*, sondern, wie nach den in Nr. 1. angeführten Sätzen leicht einzusehen, auch *hinreichend*.

Was aber die Erfüllung der erwähnten Bedingungsgleichungen betrifft, so kann man bemerken, dass dieselbe immer stattfindet, *ohne dass die in den $A^{(\nu)}$ noch vorhandenen unbestimmten Constanten irgendwie beschränkt werden*. Dieses folgt daraus, dass man aus dem Producte

$$A A' \cdots A^{(\nu)}$$

durch Hinzufügung einer ganzen Function von gehörig niedriger Dimension in $x$ und $y$ — oder besser gesagt von gehörig niedrigem Grade

in $x^{m^{(r)}}$ ein Polynom bilden kann, das $=0$ gesetzt, die vorgeschriebenen Entwickelungen für $y$ liefert. Allerdings kann es sich dabei ereignen, dass dasselbe *reducibel* wird oder dass statt *einer* Entwickelung vom Nenner $m^{(r)}$ in den Exponenten $p$ Entwickelungen vom Nenner $m^{(r)}:p$ auftreten.

3. Vom *Inbegriffe der wesentlichen Glieder* $W(x, y')$ lässt sich bei vorgegebenen Werthen der $a_{m-k} \cdots a_1$ nicht mehr sagen, als dass dieselben Glieder auch in dem Producte (6) vorkommen müssen. *Glieder mit dem Factor* $y'^{m-1}$ *fehlen also darin immer.*

*Es giebt jedoch allgemeine Fälle, in denen sich die Glieder* $W(x, y')$ *a priori bestimmen lassen.*

Ueberlegen wir zunächst, welche Glieder $y'^{m-r}x^s$ von (4) Coefficienten erhalten, *die nur von den Grössen* $a_{m-k} \cdots a_1$ *abhängen.* Sie werden leicht gefunden durch die unmittelbar ersichtliche Eigenschaft dieses Productes (in welchem wieder anstatt $-y + a_m x + a_0 y'$ geschrieben wird): *„Zu jedem Gliede* $y'^{m-r}x^s$ *kommt ein Coefficient, der in den* $a_{m-k} \cdots a_1$, $a_{-1} \cdots$ *homogen und von der Dimension* $r$ *und in dessen Gliedern die Summe aller Zeiger* $ms$ *beträgt.“*

Darf ein solcher Ausdruck $a_{-1}$, $a_{-2} \cdots$ nicht enthalten, so muss demnach

$$ms > (m-k)(r-1)$$

sein, d. i. wenn

$$kr = mg_r + q_r \quad (0 \leq q_r < m) \tag{7}$$

gesetzt wird,

$$s \geq r - g_{r-1} - 1. \tag{8}$$

Andererseits muss, wenn nicht der ganze Coefficient verschwinden soll,

$$ms < r(m-k)$$

sein, d. i. für

$$q_r > 0, \quad s \leq r - g_r - 1,$$

für

$$q_r = 0, \quad s < r - g_r.$$

Vergleicht man diese Bedingung mit (8), so sieht man, dass im Falle $q_r > 0$ ein Glied mit dem Factor $y'^{m-r}$, dessen Coefficient allein die $a_{m-k} \cdots a_1$ enthält, nur dann in (4) vorkommt, wenn $g_r = g_{r-1}$ ist, und zwar *nur dieses einzige* Glied, wofür eben

$$s = r - g_{r-1} - 1 \tag{9}$$

ist. Dasselbe gilt im Falle $q_r = 0$, denn jetzt ist

$$g_r = g_{r-1} + 1.$$

Bezeichnet $p\,(>1)$ das grösste gemeinschaftliche Mass der Zahlen $m$ und $k$, so ist *die Anzahl der auf diese Art ermittelten Glieder* (mit

Einschluss von $y'^m$) $m-k+p$. Nämlich $p+1$ Glieder

$$r=0,\quad \frac{m}{p},\quad 2\frac{m}{p},\quad \cdots\ m,$$

wofür $q_r=0$ und $m-k-1$ Glieder, wofür $q_r>0$, denn wegen $g_1=0$, $g_m=k$ macht $g_r$ $k$ Sprünge, also bleiben mit Abrechnung von $r=1$ noch $m-k-1$ Werthe von $r$, wofür $g_{r-1}=g_r$ und daher auch $q_r>0$.

Der Inbegriff dieser $m-k+p$ Glieder

$$y'^m+\Sigma' c_r y'^{m-r}x^s$$

soll vorläufig mit $W_0(x,y')$ bezeichnet werden. — Alle übrigen Glieder $y'^{m-r}x^s$ von $A(x,y')$, wofür $s\leq r-g_{r-1}-2$ ist, erscheinen wirklich mit Coefficienten, die $a_{-1}$, $a_{-2}\cdots$ enthalten. Denn, wie sogleich gezeigt werden wird, muss davon mindestens der Ausdruck

$$a_{m-k}^{r-1}a_h\quad\big(h=ms-(m-k)(r-1)\big),\tag{10}$$

wo $h$ negativ ist, übrig bleiben. — Von den Coefficienten $c_r$ verschwindet aus demselben Grunde keiner *identisch* d. i. *solange die* $a_{m-k}\cdots a_1$ *unbeschränkt gelassen werden.*

Um dieses zu erhärten, müssen wir den numerischen Factor des Ausdruckes (10) im Coefficienten von $y'^{m-r}x^s$ (bei beliebigen $s$) berechnen.

4. Der eben erwähnte Coefficient besteht nach dem oben Bemerkten aus allen Ausdrücken von der Form

$$a_{\lambda_1}^{\varrho_1}\ a_{\lambda_2}^{\varrho_2}\cdots,$$

wenn die $\lambda$ und $\varrho$ den beiden Bedingungen

$$\Sigma\varrho=r,\quad \Sigma\lambda\varrho=ms$$

entsprechend angesetzt werden. Dabei denken wir uns die Zeiger $\lambda$, *welche positiv und negativ sein können,* unter einander verschieden und fallend geordnet; die Exponenten $\varrho$ sämmtlich mindestens gleich 1. Der numerische Coefficient des vorstehenden Ausdruckes ist diejenige symmetrische Function der $m^{\text{ten}}$ Einheits-Wurzeln $\omega_1$, $\omega_2\cdots\omega_m$, welche gewöhnlich durch

$$\Sigma\omega_1^{\lambda_1}\cdot\omega_2^{\lambda_1}\cdots\omega_{\varrho_1}^{\lambda_1}\omega_{\varrho_1+1}^{\lambda_2}\cdots\omega_{\varrho_1+\varrho_2}^{\lambda_2}\cdots\tag{11}$$

angedeutet wird, — also jedenfalls eine ganze Zahl.

Setzt man

$$\omega_1^\lambda+\omega_2^\lambda+\cdots+\omega_m^\lambda=S_\lambda,$$

so findet man nach Waring

$$\Sigma\omega_1^\lambda\omega_2^\mu=S_\lambda S_\mu-S_{\lambda+\mu}=-m$$

$$\Sigma\omega_1^\lambda\omega_2^\mu\omega_3^\nu=S_\lambda S_\mu S_\nu-S_\lambda S_{\mu+\nu}-\cdots+2S_{\lambda+\mu+\nu}=2m$$

u. s. w.;

denn die $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sind hier sämmtlich kleiner als $m$ und geben als

Summe ein Vielfaches von $m$. Kommen unter ihnen gleiche vor, so hat man noch durch die entsprechenden Permutations-Factoriellen zu dividiren.

*Die Zahlen* (11) *können in der That verschwinden.* So entfällt z. B. aus $N_6$ das Glied

$$a_4 a_3^2 a_2 y'^2 x^2 .$$

Um nun den numerischen Factor des Ausdruckes (10) zu berechnen, so hat man folgende Fälle zu unterscheiden.

*Falls $m$ und $k$ relative Primzahlen sind* und nicht gerade $r = m$, $s = m - k$ $(h = m - k)$ ist, findet man dafür auf dem eben angegebenen Wege sofort den Werth $(-1)^{r-1} m$ und $a_{m-k}^{m}$ hat den Factor $(-1)^{m-1}$.

*Haben $m$ und $k$ ein von der Einheit verschiedenes grösstes gemeinschaftliches Mass $p$,* sodass

$$m = pm', \quad k = pk'$$

gesetzt werden kann, dann muss man unterscheiden, ob $h$ wieder $m - k$ wird oder nicht. Im ersten Falle, der immer und nur eintritt für

$$r = m' \cdot l \quad s = (m' - k')\, l \quad (l = 1, 2 \cdots p),$$

besteht der Coefficient des Gliedes $y'^{m-r} x^s$, dessen Gewicht $ms = (m-k) lm'$ beträgt, nur aus dem Ausdrucke $a_{m-k}^{lm'}$ *). Sein numerischer Coefficient wird leicht auf folgende Art gefunden. Bezeichnet $\omega$ eine primitive $m^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit, so kann man setzen

$$\omega_r = \omega^r, \quad \omega_r^{pf} = (\omega^{pr})^f = \omega_r'^{f} .$$

Beschränkt man $r$ auf die Werthe $1, 2 \cdots m'$, so sind die $\omega^{pr}$ sämmtlich von einander verschieden, folglich die $m'^{\text{ten}}$ Wurzeln $\omega_r'$ der Einheit. Es beginnt somit $W_0$ mit dem Ausdrucke

$$\left\{ \prod_{1}^{m'}{}_r \left( y' + a_{m-k} x^{\frac{m-k}{m}} \omega_r' \right) \right\}^p = \left\{ y'^{m'} - (-1)^{m'} a_{m-k}^{m'} x^{m'-k} \right\}^p ,$$

sodass sich für den fraglichen Coefficienten sofort der Wert

$$(-1)^{(m'-1)l} \binom{p}{l}$$

ergiebt.

Auch im zweiten Falle, wo $h$ von $m - k$ verschieden ist, gelangt man leichter an das Ziel durch Betrachtung des Ausdruckes $(h = ph')$

$$\prod_{1}^{m}{}_r \left( y' + a_{m-k} x^{\frac{m-k}{m}} \omega_r^{m-k} + a_{ph'} x^{\frac{ph'}{m}} \omega^{ph'} \right),$$

welcher ebenfalls die $p^{\text{te}}$ Potenz einer in $y'$ ganzen, in $x$ wenigstens

*) Nach (9) gehört dieses Glied zu $W_0$.

rationalen Function ist. Man erhält, wie hier nicht weiter ausgeführt wird, nun als Coefficienten von (10)

$$(-1)^{r+\sigma-1} m \binom{p-1}{\sigma},$$

wobei

$$r = \sigma m' + \varrho, \quad (0 < \varrho \leqq m')$$

gesetzt ist. — Z. B. das Glied

$$a_{m-k}^{m-2}\, a_{m-2k}\, y' x^{m-k-1}$$

hat wegen

$$r = m - 1 = m'(p-1) + m' - 1$$

den numerischen Coefficienten $(-1)^{m+p-1} m$; wie man übrigens auch leicht nach Waring's Methode findet.

5. Unter Voraussetzung, *dass $m$ und $k$ relativ prim zu einander sind*, können wir aus dem gefundenen Resultate folgenden Schluss ziehen. Da überhaupt für zwei Glieder

$$y'^{m-r} x^s, \quad y'^{m-r'} x^{s'}$$

der Zeiger $h$ in (10) einen verschiedenen Werth hat, so sieht man, dass sowohl bei gegebenen $a_{m-k} \cdots a_1$ die Coefficienten aller Glieder von $A(x, y')$ ausser den in $W_0$ zusammengefassten ganz willkürliche Werthe erhalten können, als auch die Glieder von $W_0$ selbst durch entsprechende Annahme der $a_{m-k}, \cdots a_1$. Dieses gilt auch bei Beschränkung auf *reelle* Zahlen.

*Für den Fall relativ primer $m$ und $k$ ist somit, was immer die $a_{m-k}, \cdots a_1$ für vorgegebene Werthe erhalten mögen* (nur $a_{m-k}$ darf nicht Null sein), *$W_0(x, y')$ selbst der Inbegriff aller wesentlichen Glieder:* $W_0 \equiv W$. —

Dazu tritt noch der weitere Satz:

*Auch wenn das grösste gemeinschaftliche Mass $p$ der Zahlen $m$ und $k$ grösser als* 1 *ist, stellt $W_0$ den Inbegriff der wesentlichen Glieder dar, so lange nur* (neben $a_{m-k}$) *auch $a_{m-k-1}$ nicht verschwindet.*

Der Beweis muss jedoch auf andere Art geführt werden, umfasst übrigens auch den ersteren Fall.

Da die Coefficienten der Glieder von $W_0$ von $a_{-1}, a_{-2} \cdots$ nicht abhängen können, so folgt aus *beiden* vorstehenden Sätzen:

*Um die Gleichung der allgemeinen Asymptote $A(x, y') = 0$ zu bilden, füge man zu den Gliedern von $W_0(x, y')$ noch alle Glieder $y'^{m-r} x^s$*

$$(r = 2, 3 \cdots m), \quad s \leqq r - g_{r-1} - 2$$

*hinzu, jedes mit einem ganz willkürlichen Coefficienten versehen.*

Die eben erwähnten Sätze sind es, aus welchen sich die meisten Resultate Plücker's unmittelbar ergeben.

6. Der oben geforderte Beweis gestaltet sich folgendermassen. Wir setzen in die Gleichung $W_0(x, y') = 0$, $x = t^{-m}$ ein und zeigen, *dass sich für $y'$ der Ausdruck aufstellen lässt*

$$-y' = a_{m-k}t^{-m+k} + \cdots + a_1 t^{-1} + u = -t^{-m+k}z',$$

*wo $u$ zugleich mit $t$ verschwindet.* Daraus folgt dann wegen des Nichtverschwindens von $a_{m-k-1}$, dass $y'$ in der That nach ganzen positiven Potenzen von $\sqrt[m]{1:x}$ fortschreitet; denn eine Reduction der gebrochenen Exponenten auf einen Nenner kleiner als $m$ ist nicht mehr möglich.

Zu diesem Behufe bringen wir $W_0$ auf die Form

$$W_0(x, y') = N_m(x, y') - Q(x, y'),$$

welche bestehen muss, da die Glieder von $W_0$ in $N_m$ vorkommen. Diese Identität wird mit $t^{m(m-k)}$ multiplicirt. Dadurch ergiebt sich

$$t^{m(m-k)}N_m(x, y') = \prod_1^m{}_r \left(z' + a_{m-k}\omega_r^{m-k} + \cdots + a_1 t^{m-k-1}\right).$$

Setzt man, wie in Nr. 4., $\omega_r = \omega^r$, so folgt, da $1 - \omega_r^{m-k}$ verschwindet für $r = m', 2m', \cdots (p-1)m'$, $1 - \omega_r^{m-k-1}$ aber nicht,

$$t^{m(m-k)}N_m(x, y') = ut^{m-k+p-1}H(t, u),$$

worin $H$ eine ganze Function von $t$, $u$ bezeichnet, welche für $t = u = 0$ *nicht* verschwindet.

Um noch die Form von

$$t^{m(m-k)}Q(t^{-m}, z't^{-m+k})$$

zu bestimmen, bemerke man, dass die Glieder $y'^{m-r}x^s$ von $Q$ solche Glieder von $A$ sind, welche in $W_0$ nicht vorkommen, — wofür also

$$s \leq r - g_{r-1} - 2.$$

Sie geben also mindestens neben $z'^{m-r}$ $t$ zur Potenz

$(11^*) - \{(m-r)(m-k) + m[r - g_{r-1} - 2]\} = -m(m-k) + (m-k) + (m - g_{r-1})$.

Hier beträgt der positive Theil mindestens $m - k + p$. Man wird demnach schliessen, dass

$$t^{m(m-k)}Q(x, y') = t^{m-k+p}G(t, u)$$

sei, unter $G$ eine ganze Function von $t$ und $u$ verstanden.

Fasst man dieses zusammen, so findet man für $u$ die Gleichung

$$uH(t, u) + tG(t, u) = 0,$$

aus welcher sich zu $t = 0$ jedenfalls auch $u = 0$ ergiebt. Q. e. d.

Man kann übrigens auch leicht zeigen, *dass sich im vorliegenden Falle die $a_{m-k}$, $a_{m-k-1} \cdots a_1$ wirklich aus der Gleichung $W_0(x, y') = 0$ bestimmen lassen*, sowie dass $a_0 = 0$ sein muss (vergl. Nr. 19.).

7. Es mögen hier noch *einige formale Bemerkungen über die Function $W_0(x, y')$* Platz finden, welche später von Nutzen sein werden.

a) *Ist* $2k > m$, so fehlen in $W_0$ Glieder $(m-1)^{\text{ter}}$ Dimension in $x$ und $y'$ vollständig und es kommen nicht zwei Glieder von derselben Dimension vor. Beides ist im Allgemeinen der Fall, falls $2k \leq m$.

Die Dimension des allgemeinen Gliedes von $W_0$ beträgt nach (9) $m - g_{r-1} - 1$, welche Zahl mit wachsenden $r$ niemals zunimmt. Sie kann also zu $m-1$ nur werden, wenn $2k$ durch $m$ nicht theilbar ist und $g_2 = g_1 = 0$, d. i. $2k < m$ oder wenn $2k = m$ ist, in welchem Falle $W_0$ das Glied $y'^{m-2}x$ enthält.

Sollen zwei aufeinanderfolgende Glieder von $W_0$ von derselben Dimension sein, so muss offenbar $g_{r-1} = g_r$ sein. Weiter muss entweder $g_{r+1} = g_r$ oder $q_{r+1} = 0$ sein; was nur möglich ist, wenn $2k \leq m$.

b) Das Glied $y'x^{m-k-1}$ befindet sich in $W_0$ nur, wenn $2k < m$; sonst gehört es zu denjenigen, deren Coefficient noch von $a_{-1}$ u. s. w. beeinflusst wird.

Dieses folgt unmittelbar daraus, dass $g_{m-1} = k-1$ ist. Soll das genannte Glied zu $W_0$ gehören, so muss auch $g_{m-2} = k-1$ sein d. i. $m \geq 2k$. Ist aber $m < 2k$, so hat man $g_{m-2} = k-2$ somit

$$(m-1) - g_{m-2} - 2 = m - k - 1.$$

c) Der Exponent von $x$ im allgemeinen Gliede von $W_0$

$$s = r - g_{r-1} - 1$$

nimmt mit wachsenden $r$ nicht ab. Demnach können *zwei Werthe derselben nur gleich sein*, wenn schon

$$(r-1) - g_{r-1} = r - g_r$$

d. i. $g_r = g_{r-1} + 1$. Dieses ist aber bei einem Gliede von $W_0$ nur in der Art möglich, *dass kr durch m theilbar ist.* Dann enthält $W_0$ in der That die Glieder

$$y'^{m-r} x^{r-g_r}, \quad y'^{m-r-1} x^{r-g_r},$$

auf welche aber ein Glied mit einer höheren Potenz von $x$ folgen muss. — Wendet man diesen Satz auf den Werth $r = m-2$ an, so findet man, dass die Glieder

$$y'^2 x^{m-k-1}, \quad y' x^{m-k-1}$$

in $W_0$ zugleich nur vorhanden sind, *falls* $m = 2k$ *ist.* Dann ergiebt sich nämlich nach Nr. 4.

$$W_0(x, y') = (y'^2 - a_k^2 x)^k + c_3 y'^{2k-3} x + c_5 y'^{2k-5} x^2 + \cdots + c_{2k-1} y' x^{k-1}. \tag{12}$$

*Falls* $2k < m$, kommt das erstere Glied gar nicht in $A(x, y')$ vor, da nun $g_{m-2} = k-1$, somit

$$(m-2) - g_{m-2} - 1 = m - k - 2.$$

## § 2.

## Asymptoten im engeren Sinne.

8. Um den Verlauf jedes der unendlichen Zweige der gegebenen Curve (1) zu characterisiren, können wir unter den oben definirten allgemeinen Asymptoten eine beliebige auswählen, indem wir in der Gleichung $A(x, y') = 0$ vorkommenden unbestimmten Constanten vorgegebene Werthe beilegen. Nennen wir eine solche Curve *typische Asymptote oder A. im engeren Sinne* $\mathfrak{A}(x, y') = 0$, so ist demnach die Definition derselben rein analytisch gegeben, d. i. an die Werthe gewisser Coefficienten geknüpft. Um aber *geometrisch* einen Typus der allgemeinen Asymptoten zu liefern, muss die in Rede stehende analytische Definition so eingerichtet werden, dass die hier zulässigen Transformationen der ursprünglichen Coordinaten $xy$, *welche im Allgemeinen zu einer neuen Curve als typischer Asymptote führen werden,* wenigstens ein leicht zu übersehendes Curvensystem liefern.

Wir machen bei der folgenden Untersuchung nicht die Unterscheidung, *ob unter den allgemeinen Asymptoten* $A(x, y') = 0$ *solche vorkommen, die reducibel sind oder ob nicht.* — Als nothwendige Bedingung für das Zerfallen irgend einer Curve $A(x, y') = 0$ erkennt man unmittelbar, dass die positiven Exponenten in der Entwickelung (3) sich auf einen kleineren Nenner als $m$ zurückführen müssen lassen. Denn es müssen die Entwickelungen von $y$ in der Umgebung des Werthes $x = \infty$ nach niedrigeren als $m^{\text{ten}}$ Wurzeln von $1 : x$ fortschreiten. *Der Ausdruck* (6) *wird somit nun eine Potenz einer ganzen Function von* $x$, $y'$. — Hieraus folgt unmittelbar, dass *in den beiden Normalfällen von Nr.* 5. *die Function* $W_0(x, y')$ *stets irreducibel sein müsse.*

9. Die hier in Betracht kommenden Coordinaten-Transformationen

$$X = \alpha x + \beta y + \gamma, \quad Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' \tag{13}$$

müssen von der Art sein, dass die neue Ordinaten-Axe $X = 0$ nicht durch den unendlich fernen Punkt $1, a_m, 0$ geht. *Es darf also die Grösse* $\alpha + \beta a_m$ *nicht verschwinden.* — Für das Folgende scheint es bequemer, den Uebergang von dem Systeme $x$, $y$ zum Systeme $X$, $Y$ in folgende *drei* Schritte zu zerlegen:

$$x' = x, \quad y' = a_m x - y + a_0; \tag{14}$$

$$x_1 = \varkappa x' + \lambda y' + \mu, \quad y_1 = y'; \tag{15}$$

$$X = x_1, \quad Y = \varkappa' x_1 + \lambda' y_1 + \mu'. \tag{16}$$

Beim ersten Schritte bleibt die Ordinaten-Axe unverändert; beim zweiten die neue Abscissen-Axe, während die Ordinaten-Axe in die Gerade $X = 0$ verlegt wird. Der dritte Schritt endlich führt noch zur neuen Abscissen-Axe $Y = 0$.

Die Möglichkeit dieser Zerlegung ergiebt sich am einfachsten durch Zusammensetzung der vorstehenden drei Transformationen und Vergleichung der für $X$, $Y$ resultirenden Formeln mit (13). Man findet so

$$\varkappa = \alpha + a_m\beta, \quad \lambda = -\beta, \quad \mu = \gamma + a_0\beta;$$

$$\varkappa\varkappa' = \alpha' + a_m\beta', \quad \varkappa\lambda' = -(\alpha\beta' - \alpha'\beta),$$

$$\varkappa\mu' = \begin{vmatrix} a_m, & -1, & a_0 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{vmatrix}.$$

Daraus erhellt, *dass die Constanten $\varkappa$, $\lambda'$ nicht verschwinden können.*

Wir müssen nun aus den Formeln

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = t^{-m}, \\ y' = -(a_{m-k}\,t^{-m+k} + \cdots + a_1 t^{-1} + a_{-1}\,t + \cdots) \end{cases}$$

die Entwickelung von $Y$ nach fallenden Potenzen von $X$ ableiten. Aus (15) folgt, wenn

$$(16^*) \qquad \lambda : \varkappa = \varrho, \quad \mu : \varkappa = \sigma$$

gesetzt werden,

$$(17) \quad \frac{\varkappa}{x_1} = t^m : (1 - \varrho a_{m-k}t^k - \cdots - \varrho a_1 t^{m-1} + \sigma t^m - \varrho a_{-1}t^{m+1} - \cdots),$$

also für $\varkappa : x_1 = \tau^m$

$$\tau = t(1 - \varrho a_{m-k}t^k - \cdots)^{-\frac{1}{m}} = t + \varrho\frac{a_{m-k}}{m}t^{k+1} + \cdots.$$

Diese Gleichung lässt sich umkehren, so dass man erhält

$$(18) \qquad t = \tau - \varrho\frac{a_{m-k}}{m}\tau^{k+1} - \cdots - b_r\tau^r - \cdots.$$

Führt man diese Reihe für $t$ in den Ausdruck $y_1 = y'$ ein, so folgt für $y_1$ eine Entwickelung

$$(19) \quad y_1 = -(a^{(1)}_{m-k}\tau^{-m+k} + \cdots + a^{(1)}\tau^{-1} + a^{(1)}_0 + a^{(1)}_{-1}\tau + \cdots),$$

indem an Stelle von $t^{-m+k+h}$ $(h = 0, 1, 2\cdots)$ tritt

$$(19^*) \quad t^{-m+k+h} = \tau^{-m+k+h} + \frac{m-k-h}{m}\varrho a_{m-k}\tau^{-m+2k+h} + \cdots.$$

Mittelst der Formeln (16) wird dann endlich gefunden

$$X = \varkappa\tau^{-m}, \quad Y = \varkappa'\varkappa\cdot\tau^{-m} + \lambda' y_1 + \mu',$$

welche Gleichungen die gesuchte Entwickelung darstellen. Will man sie genau von der Form (3) haben, so setzt man $\tau = t_1\omega$, wo $\omega$ eine $m^{te}$ Wurzel von $\varkappa$ bezeichnet. Schreibt man demgemäss

$$(20) \qquad \begin{cases} X = t_1^m \\ Y = \mathsf{A}_m t_1^{-m} + \mathsf{A}_{m-k}t_1^{-m+k} + \cdots + \mathsf{A}_1 t_1^{-1} + \mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_{-1}t^{-1} + \cdots, \end{cases}$$

so hat man

$$(21)\qquad \begin{cases} \mathsf{A}_m = x', \\ \mathsf{A}_{m-k-h} = -\lambda' \cdot a^{(1)}_{m-k-h}\,\omega^{-m+k+h}, \end{cases}$$

$h = 0, 1, 2 \cdots$, ausgenommen $h = m - k$, in welchem Falle zu setzen ist

$$\mathsf{A}_0 = \mu' - \lambda' \cdot a_0^{[1]}.$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich sofort der bereits in Nr. 1. erwähnte Satz, dass wenn die Entwickelungen von $y$ nach fallenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x$ aus zwei Gleichungen $F(x,y)=0$, $A(x,y)=0$ in den Coefficienten $a_m, a_{m-k}, a_{m-k-1} \cdots a_i\,(i \gtrless 0)$ übereinstimmen, dasselbe auch gelte von den Entwickelungen von $Y$ aus den transformirten Gleichungen. — Man sieht nämlich unmittelbar, dass $b_{k+2} \cdots b_{m-i+1}$ in (18) von $a_{i-1}$ und den folgenden Coefficienten unabhängig sind; demnach in der Entwickelung von $t^{-m+k+h}$ die Glieder bis einschliesslich des mit $\tau$ zum Exponenten

$$(-m+k+h) + (m-i) = k + h - i.$$

Somit erweisen sich die Coefficienten $\mathsf{A}_m, \mathsf{A}_{m-k} \cdots \mathsf{A}_i$ in (20) von $a_{i-1}, a_{i-2} \cdots$ unabhängig, womit der Satz gezeigt ist. — Für den Fall $i > 0$ wollen wir noch bemerken, dass die Transformationsconstante $\mu$ aus (15) erst in $\mathsf{A}_{-k}$ eingeht; somit erscheint auch $a_0$ zuerst in $\mathsf{A}_0$.

10. *Aufstellung der typischen Asymptoten* $\mathfrak{A}(x, y') = 0$. — Bei dieser Untersuchung haben wir stets *die allgemeine Function* $W(x, y')$, d. i. der Inbegriff der wesentlichen Glieder bei vorgegebenen Werthen der $a_{m-k} \cdots a_1$ vor Augen. Diese Function kann, wie wir aus Beispielen sehen werden (vgl. Nr. 24ff.), mehr Glieder enthalten als die oben eingeführte Function $W_0$.

Es sind *drei Fälle* zu unterscheiden.

I. Fall. *Es sei* $2k > m$. *Dann erklären wir die Curve* $W(x, y') = 0$ *selbst als typische Asymptote.* — Nun führen wir anstatt $x$, $y$ das System $X$, $Y$ durch die Gleichungen (13) in $F(x, y) = 0$ ein und bilden $W(X, Y')$, das zur Unterscheidung von $W(x, y')$ mit $W_1(X, Y')$ bezeichnet werde. Hier bedeutet

$$Y' = \mathsf{A}_m X - Y + \mathsf{A}_0.$$

Um die Curve $W_1 = 0$ mit $W = 0$ zu vergleichen, kehren wir wieder auf das System $x$ (oder $x'$), $y'$ zurück. Dazu dienen nach (15) die Formeln

$$(22)\qquad X = \varkappa x + \lambda y' + \mu, \quad Y' = -\lambda' y'.$$

Um die Richigkeit der letzteren einzusehen, genügt ein Blick auf die Gleichungen (21), verbunden mit der Bemerkung, *dass wenn* $m < 2k$ *ist, offenbar nach* (19*)

$$a^{(1)}_{m-k-h} = a_{m-k-h} \quad (h = 0, 1, \cdots m-k-1, m-k+1 \cdots k-1),$$
$$a^{(1)}_0 = 0$$

*gefunden wird.* Wir schliessen aber daraus weiter

(23) $$\mathsf{A}_{m-k-h} = -\lambda' \cdot a_{m-k-h}\, \omega^{-m+k+h}, \quad (h=0, 1, \cdots m-k-1),$$

so dass zwischen den Coefficienten $C$, $c$ zweier entsprechender Glieder von $W_1(X, Y')$ und $W(x, y')$, d. i. $Y'^{m-r} X^s$ und $y'^{m-r} x^s$ die Beziehung herrscht

$$C = \frac{(-\lambda')^r \cdot c}{\varkappa^s}.$$

Demnach folgt

$$W_1(X, Y') = \left(-\frac{1}{\lambda'}\right)^m W\left(\frac{X}{\varkappa'} - \frac{Y'}{\lambda'}\right),$$

d. i. beim Uebergange zum Systeme $x$, $y$ nach den Formeln (22) und (16*)

$$W_1(X, Y') \equiv \left(-\frac{1}{\lambda'}\right)^m W(x + \varrho y' + \sigma, y').$$

*Nach der gegebenen analytischen Definition gelangen wir also zu einer Schaar von zweifach unendlich vielen Curven, welche alle mit demselben Rechte Asymptoten im engeren Sinne heissen.* — Denn es ist leicht einzusehen, dass unter den Curven

$$W(x + \varrho y' + \sigma, y') = 0$$

dieselbe nicht öfter vorkommen kann. Dieses wäre nur möglich, wenn es solche Werthe von $\varrho$, $\sigma$ gäbe, dass

$$W(x + \varrho y' + \sigma, y') \equiv W(x, y')$$

wäre. Dann müsste die Entwicklung (19) — nachdem darin $\varkappa = 1$, d. i. $\tau = t_1$ gesetzt würde — mit (3) identisch werden. Da aber $t_1^{2k-m}$ den Coefficienten erhält

$$a^{(1)}_{-2k+m} = a_{-2k+m} - \frac{m-k}{m} \varrho a^2_{m-k},$$

so müsste $\varrho = 0$ sein. Ebenso — indem nun

(24) $$a^{(1)}_{-k} = a_{-k} + \frac{m-k}{m} \sigma a^2_{m-k}$$

wäre — würde sich ergeben $\sigma = 0$*).

Einen speciellen Fall des vorstehenden Satzes findet man Th. p. 122.

11. II. Fall. $2k = m$. Die Gleichungen (23) bleiben bestehen; aber man hat jetzt

$$a^{(1)}_0 = \frac{1}{2} \varrho a^2_k, \quad \mathsf{A}_0 = \mu' - \frac{\lambda'}{2} \varrho a^2_k.$$

Daraus folgt

*) Hätten wir es hier statt mit dem allgemeinen $W(x, y')$ mit $W_0(x, y')$ zu thun, so würde es genügt haben zu bemerken, dass in $W_0$ alle Glieder in Beziehung auf $x$ und $y'$ von verschiedener Dimension sind (vergl. Nr. 7.a).

$$Y' = -\lambda'\left(y' + \tfrac{1}{2}\varrho a_k^2\right)$$

und weiter

$$W_1(X, Y') = \left(-\tfrac{1}{\lambda'}\right)^m W\left(x+\varrho y'+\sigma, y'+\tfrac{1}{2}\varrho a_k^2\right).$$

*Erklären wir wieder $W(x, y') = 0$ als typische Asymptote, so gelangen wir somit zu der Schaar von gleichberechtigten Curven*

$$W\left(x+\varrho y'+\sigma, y'+\tfrac{1}{2}\varrho a_k^2\right) = 0. \tag{25}$$

Mit anderen Worten: wir dürfen in $W(x, y') = 0$ $x$, $y'$ bezüglich ersetzen durch $x+\varrho y'+\sigma$, $y'+\sigma'$, wo die unbestimmten Constanten $\varrho$, $\sigma$, $\sigma'$ nur der Bedingung zu genügen haben, dass aus $W(x+\varrho y'+\sigma, y'+\sigma') = 0$ das Glied $y'^{m-1}$ entfällt; — in der That ist dieselbe nach (12)

$$2\sigma' - \varrho a_k^2 = 0.$$

Umständlicher als im ersten Falle ist hier die Untersuchung, ob in dem Curvensysteme (25) eine Curve wiederholt vorkommen könne, d. i. ob bei verschiedenen Werth*systemen* $\varrho\sigma$ und $\varrho_1\sigma_1$ die Identität

$$W\left(x+\varrho y'+\sigma, y'+\tfrac{1}{2}\varrho a_k^2\right) \equiv W\left(x+\varrho_1 y'+\sigma_1, y'+\tfrac{1}{2}\varrho_1 a_k^2\right)$$

möglich sei. Setzen wir aber

$$x + \varrho y' + \sigma = X, \quad y' + \tfrac{1}{2}\varrho a_k^2 = Y',$$

so würde diese Gleichung übergehen in

$$W(X, Y') \equiv W\left(X+(\varrho_1-\varrho)Y'+\left\{\sigma_1-\sigma-\tfrac{1}{2}\varrho a_k^2(\varrho_1-\varrho)\right\}, Y'+\tfrac{1}{2}a_k^2(\varrho_1-\varrho)\right);$$

wir können uns also wie oben in Nr. 10. darauf beschränken, die Möglichkeit der Identität

$$W(x, y') \equiv W\left(x+\varrho y'+\sigma, y'+\tfrac{1}{2}\varrho a_k^2\right) \tag{26}$$

zu prüfen. Ihr Bestehen würde voraussetzen, dass die Entwicklung (3) durch die Transformation $x = X + \varrho Y + \sigma$, $y' = Y + \frac{1}{2}\varrho a_k^2$, was die Coefficienten betrifft, ungeändert bleibe. Kehren wir diese Formeln um

$$X = x - \varrho y' + \left\{\tfrac{1}{2}\varrho^2 a_k^2 - \sigma\right\}, \quad Y = y' - \tfrac{1}{2}\varrho a_k^2$$

und zerlegen wir dieselben nach dem Vorgang von Nr. 7. in die beiden Transformationen

$$x_1 = x - \varrho y' + \left\{\tfrac{1}{2}\varrho^2 a_k^2 - \sigma\right\}, \quad y_1 = y',$$
$$X = x_1, \qquad Y = y' - \tfrac{1}{2}\varrho a_k^2;$$

so werden wir die Entwicklung von $Y$ nach fallenden Potenzen von $X$ nach den a. a. O. gegebenen Formeln hinschreiben können. *Dabei sind jedoch zwei Fälle zu unterscheiden.*

$\alpha$) Nehmen wir an, *es sei* $a_{k-1} = a_{k-2} = \cdots = a_{k-i+1} = 0$, $a_{k-i}$ *jedoch nicht Null, während* $1 \leqq i \leqq k-1$ —, *sodass* $k$ *mindestens* $= 2$ *sein muss*; — *dann ist die Identität* (26) *nur möglich für* $\varrho = \sigma = 0$.

Wir haben jetzt

$$x = t^{-m},$$

$$y' = -\{a_k t^{-k} + a_{k-i} t^{-k+i} + \cdots + a_1 t^{-1} + a_{-1} t + \cdots\},$$

also nach (17) und (18)

$$x_1 = t_1^{-m}$$

$$t = t_1 + \frac{\varrho a_k}{2k} t_1^{k+1} + \frac{\varrho a_{k-i}}{2k} t_1^{k+i+1} + \cdots$$

und für die Coefficienten in (19)

$$(26^*) \quad \begin{cases} a_{k-h}^{(1)} = a_{k-h}, & (h = 0, 1, \cdots k-1, k+1 \cdots k+i-1) \\ a_0^{(1)} = -\frac{1}{2}\varrho a_k^2, & a_{-i}^{(1)} = a_{-i} - \frac{2k-i}{2k} a_k a_{k-i} \varrho. \end{cases}$$

Damit bilden wir die Ausdrücke $A_{k-h}$ nach (21), welche den entsprechenden Coefficienten in (3) gleich werden sollen. Dieses ist bis $h = k + i - 1$ einschliesslich unmittelbar der Fall (man findet auch $A_0 = 0$); damit aber auch $A_{-i} = -a_{-i}$ sei, folgt nothwendig $\varrho = 0$. Man schliesst dann weiter nach (24), dass auch $\sigma = 0$ sein müsse.

*In dem hier vorliegenden Falle umfasst somit die Schaar* (25) *zweifach unendlich viele Curven, wie oben in* I.

$\beta$) *Es sei* $a_{k-1} = a_{k-2} = \cdots = a_1 = 0$, also

$$x = t^{-m} \quad y' = -a_k t^{-k} - a_{-1} t - \cdots \quad (k \geqq 1).$$

Dann ist nach Nr. 4.

$$N_m(x, y') = (y'^2 - a_k^2 x)^k = W(x, y').$$

Die Asymptote $m^{\text{ter}}$ Ordnung ist eine $k$-fache Parabel. *Die Curvenschaar* (25) *reducirt sich auf die einfach unendliche Schaar von Parabeln*

$$y'^2 - a_k^2 x + \delta = 0,$$

welche die Axe und den Parameter gemein haben (Th. p. 71). — Doppel-Parabeln kommen *als Asymptoten 4. Ordnung* schon bei den Curven 4. Ordnung vor (vgl. u. Nr. 22b.).

12. III. Fall. $2k < m$. Nun besteht nach (19) die Gleichung

$$a_{m-k-h}^{(1)} = a_{m-k-h}$$

nur für $h = 0, 1, \cdots k-1$; dagegen hat man

$$(26^{**}) \qquad a_{m-2k}^{(1)} = a_{m-2k} + \frac{m-k}{m} \cdot \varrho a_{m-k}^2.$$

Ebenso hängen die $a_{m-2k-1}^{(1)} \cdots a_1^{(1)}$, $a_0^{(1)}$ von $\varrho$, nicht aber von $\sigma$ ab.

— Wollen wir $W_1(X, Y') = 0$ auf das Coordinatensystem $x, y'$ zurückführen, so haben wir nun die Formeln anzuwenden

$$X = \varkappa x + \lambda y' + \mu, \quad Y' = -\lambda' \left(y' + a_0^{(1)}\right).$$

Jetzt kommt aber $\varrho$ auch in den Coefficienten $C$ der Function $W_1(X, Y')$ vor; die Beziehung der neuen Curve zur ursprünglichen $W(x, y') = 0$ erscheint nicht mehr bequem genug. Wir gelangen zu einem Curvensystem von ähnlicher Einfachheit wie in den beiden vorausgehenden Fällen, wenn wir in der allgemeinen Function $W_1(X, Y')$ $\varrho$ einen constanten Werth $\varrho_0$ beilegen. Indem

$$W_1\left(\frac{X}{\varkappa}, -\frac{Y}{\lambda'}\right) \equiv W_1(x + \varrho_0 y' + \sigma, y' + \chi(\varrho_0))$$

— worin $X_0(\varrho) = a_0^{(1)}$ zu denken — nur mehr die willkürliche Constante $\sigma$ enthält, so haben wir hier *als Asymptoten im engeren Sinne eine einfach unendliche Curvenschaar.*

Welchen Werth wir für $\varrho_0$ nehmen sollen, ergiebt sich unmittelbar. Er wird so gewählt, *dass aus* $W_1(X, Y')$ *das Glied* $Y' X^{m-k-1}$ *hinausfällt.* Bezeichnen wir den Coefficienten des Gliedes $y' x^{m-k-1}$ mit $c$, so finden wir nach Nr. 4.

$$c = (-1)^{m+p-1} m a_{m-k}^{m-2} a_{m-2k} + c'$$

— ($c'$ bedeutet den Inbegriff der übrigen Ausdrücke, welche nur $a$ mit höherem Index als $m - 2k$ enthalten). — Demnach folgt für den Coefficienten $C$ von $Y' X^{m-k-1}$ in $W_1$

$$(26^{***}) \qquad C = \frac{(-\lambda')^{m-1}}{\varkappa^{m-k-1}} \left[(-1)^{m+p-1} (m - k) a_{m-k}^{m} \varrho + c\right].$$

Man erkennt daraus, dass sich $\varrho$ stets so bestimmen lässt, dass $C$ verschwindet.

Die Gleichung der einfachsten dieser Asymptoten

$$W_1(x + \varrho_0 y', y' + \chi(\varrho_0)) = 0, \quad (\sigma = 0),$$

welche wir mit $\mathfrak{A}(x'', y'') = 0$ bezeichnen wollen, erhält man aus $W(x, y') = 0$, indem man anstatt $xy'$ einführt

$$x = x'' + \varrho y'', \quad y' = y'' + \sigma',$$

$\varrho, \sigma'$ so bestimmt, dass die Glieder $y''^{m-1}$, $y'' x''^{m-k-1}$ hinausfallen — *nach dem in* Nr. 2. *über* $W_0(x, y')$ *Bemerkten ist dieses hier stets möglich**)

*) In der That es sei

$$W(x, y') = y'^m + V_{m-1}(x, y') + \cdots + c y' x^{m-k-1} + d x^{m-k},$$

wo $V_{m-1}$ den Inbegriff der Glieder $(m-1)^{\text{ter}}$ Dimension bezeichnet, welche nun im Allgemeinen vorkommen; $d$ den Ausdruck $(-1)^{m-p} a_{m-k}^{m}$, der nicht verschwindet. Da $y'' x''^{m-k-1}$ nur aus $y' x^{m-k-1}$ und $x^{m-k}$ entstehen kann — $y'^2 x^{m-k-1}$ kommt nach Nr. 7. c) in $W$ nicht vor —, so erhält man für $\varrho, \sigma'$ die stets brauchbaren Gleichungen

$$m\sigma' + V_{m-1}(\varrho, 1) = 0, \quad (m-k) d\varrho + c = 0.$$

— und von dem auf diese Art erhaltenen Aggregate nur diejenigen Glieder behält, welche in $x$, $y'$ geschrieben auch in $W$ vorkommen. Dieses folgt nach Nr. 1. aus der Asymptoten-Eigenschaft der Curve

$$W(x, y') \equiv W(x''+\varrho y'',\ y''+\sigma') = 0$$

unmittelbar.

## § 3.

## Osculation der Asymptoten.

13. Die Frage nach *der Art des Contactes* einer Asymptote $A = 0$ mit der gegebenen Curve (1) wird durch folgenden Satz beantwortet.

*Satz.* „Angenommen es bestehe in der Umgebung des Punktes $x = 0$, $y = 0$ für zwei Curven $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$ *je eine und nur eine* Entwickelung von $y$ nach *steigenden* ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x$ $(k_0 > 0)$

$$(a)\quad y = c_{k_0}x^{\frac{k_0}{m}} + c_{k_1}x^{\frac{k_1}{m}} + \cdots + c_{k_{r-1}}x^{\frac{k_{r-1}}{m}} + c_{k_r}x^{\frac{k_r}{m}} + \cdots,$$

die in allen Coefficienten $c_{k_0}$, $c_{k_1}$ $\cdots$ $c_{k_{r-1}}$, welche sämmtlich nicht verschwinden, übereinstimmen, während $c_{k_r}$ für beide Curven verschiedene Werthe besitzt; — ferner bezeichne $\varrho_0$ den grössten gemeinschaftlichen Divisor von $k_0$, $m$; $\varrho_1$ den von $k_1$, $\varrho_0$; $\varrho_2$ den von $k_2$, $\varrho_1$; $\cdots$ endlich $\varrho_{r-1}$ den von $k_{r-1}$, $\varrho_{r-2}$; — so ist der Punkt $x = 0$, $y = 0$ im Schnittpunktsysteme $F = 0$, $G = 0$ im Ganzen

$$\mu = k_0(m-\varrho_0) + k_1(\varrho_0-\varrho_1) + \cdots + k_{r-1}(\varrho_{r-2}-\varrho_{r-1}) + k_r\varrho_{r-1},$$

Male zu zählen.“

Denn die Multiplicität des Punktes $x = 0$, $y = 0$ wird *hier vollständig* gefunden durch Betrachtung des Productes der $m^2$ Wurzeldifferenzen $y_r - z_s$, wo für $y_r$ die $m$ conjugirten Werthe der Entwickelung (a) aus den ersten der beiden Curven, für $z_s$ eben dieselben aus der zweiten zu setzen sind. Diese Werthe werden gefunden, indem man in (a) statt $x^{\frac{1}{m}}$ bezüglich $x^{\frac{1}{m}}\omega^{r-1}$ und $x^{\frac{1}{m}}\omega^{s-1}$ einführt, wobei jedoch $\omega$ eine primitive $m^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit bedeuten muss. Nun ergiebt sich zunächst, dass jede der Differenzen $y_r - z_r$ genau den Factor $x^{\frac{k_r}{m}}$ enthält; für $r = 1, 2 \cdots m$ folgt also der Factor $x$ $k_r$-mal. $y_r - z_s$, $(r \gtrless s)$ beginnt mit dem Gliede

$$c_{k_0}x^{\frac{k_0}{m}}\omega^{sk_0}\left(\omega^{(r-s)k_0} - 1\right),$$

welches nur dann verschwindet, wenn $r-s$ ein Vielfaches von $m:\varrho_0 = m'$ ist; also für $s \equiv r + m'$, $\cdots$ $r + (\varrho_0 - 1)m'$ (mod. $m$). Für jeden Werth von $r$ bleiben also $m - \varrho_0$ Factoren $x^{\frac{k_0}{m}}$, im Ganzen giebt dies

$x$ $k_0(m-\varrho_0)$-mal. Die noch übrigen $m(\varrho_0-1)$ Wurzeldifferenzen beginnen mit

$$c_{k_1} x^{\frac{k_1}{m}} \omega^{sk_1}(\omega^{k_0 m' k_1}-1), \quad (l_0=1, 2\cdots\varrho_0-1),$$

welches nur verschwindet für

$$l_0 = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}, \quad 2\frac{\varrho_0}{\varrho_1}, \quad \cdots (\varrho_1-1)\frac{\varrho_0}{\varrho_1}.$$

Für jedes $r$ findet man also $\varrho_0-\varrho_1$ nicht verschwindende Anfangsglieder, somit den Factor $x$ $k_1(\varrho_0-\varrho_1)$ Male. U. s. f., bis endlich der Factor $x$ $k_{r-1}(\varrho_{r-2}-\varrho_{r-1})$ Male zu Stande kommt. Nun sind noch zu jedem Werthe von $r$ $\varrho_{r-1}-1$ Wurzeldifferenzen übrig, welche jede genau $x^{\frac{k_r}{m}}$ liefert; so dass man zum Schlusse noch den Factor $x$ $k_r(\varrho_{r-1}-1)$ Male erhält. — Die Summe der gefundenen Exponenten von $x$ beträgt

$$k_r+k_0(m-\varrho_0)+k_1(\varrho_0-\varrho_1)+\cdots+k_{r-1}(\varrho_{r-2}-\varrho_{r-1})+k_r(\varrho_{r-1}-1),$$

wie oben angegeben ist.

Specielle Fälle des vorstehenden Satzes.

1) Für $r=0$ folgt $\mu=k_0 m$.

2) Für $m=1$ folgt $\mu=k_r$.

3) Wenn $k_0$ und $m$ relativ prim sind, so sind alle $\varrho_0, \varrho_1\cdots=1$ und man findet

$$\mu = mk_0 + (k_r-k_0).$$

4) Für $\varrho_1=1$ (was immer eintritt, wenn $k_1=k_0+1$) findet man

$$\mu = mk_0 + (k_1-k_0)\varrho_0 + k_r - k_1.$$

Um den in Rede stehenden Satz zu übertragen auf den hier vorliegenden Fall, dass in der Umgebung des Werthes $x=\infty$ für jede von zwei Curven eine und für eine derselben, die Asymptote, nur eine Entwickelung (a) nach *fallenden* Potenzen von $x$ bestehe, so dass nun $k_0>k_1>\cdots$ ist — wobei noch ferner $m>k_0$ angenommen wird —; führen wir die neuen Coordinaten

$$x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{y}{x}$$

ein, wodurch wir finden

$$y' = c_{k_0} x'^{1-\frac{k_0}{m}} + c_{k_1} x'^{1-\frac{k_1}{m}} + \cdots + c_{k_r} x'^{1-\frac{k_r}{m}} + \cdots.$$

Wenn die gegebene Curve (1) in der Umgebung des Werthes $x=\infty$ mehrere Entwickelungen des $y$ von der in Rede stehenden Form zulässt, so zählen wir hier die Multiplicität des Punktes $x'=0$, $y'=0$, welche mit der gesuchten des unendlich fernen Punktes $\eta=0$, $\xi=0$ übereinstimmt, nur insoweit als der der Asymptote entsprechende Func-

tionszweig der Curve in Betracht kommt. *Für diese Zahl erhalten wir demnach*

$$(27)\quad (m-k_0)(m-\varrho_0)+(m-k_1)(\varrho_0-\varrho_1)+\cdots+(m-k_{r-1})(\varrho_{r-2}-\varrho_{r-1})+(m-k)\varrho_{r-1}$$
$$= m(m-k_0)+\varrho_0(k_0-k_1)+\varrho_1(k_1-k_2)+\cdots+\varrho_{r-1}(k_{r-1}-k_r).$$

Dabei haben die $\varrho$ dieselbe Bedeutung wie früher: es ist $\varrho_0$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $m$ und $\pm k_0$ (denn es kann $k_0$ auch negativ sein) u. s. f.

Specielle Fälle der Formel (27). ($k_0 < m$).

1) Für $r = 0$ giebt sie $m(m-k_0)$;
2) Für $m = 1$ $1 - k_r$;
3) *Für dem Fall relativ primer* $m$, $k_0$ findet man daraus

$$m(m-k_0) + k_0 - k_r.$$

Für die allgemeine Asymptote $A(x, y') = 0$ haben wir offenbar

$$k_0 = m - k, \quad k_r = -1;$$

somit findet ein Contact von $(m-1)(k+1)+2$ Punkten statt. Diese Zahl beträgt für $m = 2$, $k = 1$ 4 (Th. p. 72); für $m = 3$, $k = 1$ 6 (Th. p. 113); für $m = 3$, $k = 2$ 8 (Th. p. 123) u. s. f.

4) Für $\varrho_1 = 1$ findet man

$$(27^*)\qquad m(m-k_0) + \varrho_0(k_0-k_1) + k_1 - k_r;$$

also speciell für

$$k_0 = m - k, \quad \varrho_0 = p, \quad k_1 = m - k - 1,$$
$$(28)\qquad (m-1)(k+1) + p - k_r.$$

*Wenn $a_{m-k-1}$ nicht verschwindet, so ist der Punktwerth des Contactes zwischen der gegebenen Curve und jeder Asymptote $A = 0$ mindestens* $(m-1)(k+1)+p+1$; — denn $k_r$ ist höchstens $= -1$.

14. *Osculation der Asymptoten im engeren Sinne.* Indem als solche stets ein gewisses Curven*system* definirt ist, so ist die Frage nach *den Curven desselben, welche durch höhere Osculation sich auszeichnen*, selbstverständlich. Man gelangt zu solchen, wenn es gelingt, den unbestimmten Parametern der Schaar derartige Werthe beizulegen, dass auch die Coefficienten $a_{-1}$, $a_{-2}\cdots$ vom ersten angefangen in den Entwickelungen der beiden Ordinaten übereinstimmen. — Mit Hülfe der in § 2. entwickelten Formeln lässt sich leicht entscheiden, ob und wann dieses möglich ist.

Betrachten wir nach einander die dort aufgeführten Fälle.

I. *Fall.* $2k > m$. Setzen wir $x + \varrho y' + \sigma = x'$, so ist $W(x', y') = 0$ die Gleichung einer beliebigen Curve der Asymptoten-Schaar. Ergiebt sich daraus die Entwickelung

$$-y' = a_{m-k}\tau^{-m+k} + \cdots + a_1\tau + \alpha_{-1}\tau^{-1} + \alpha_{-2}\tau^{-2} + \cdots,$$
$$x' = \tau^{-m},$$

wo die $\alpha$ ganz bestimmte nur von den $a_{m-k} \cdots a_1$ abhängige Werthe besitzen, so muss es durch Ausführung der nämlichen Transformation an der Gleichung $F(x, y') = 0$ der gegebenen Curve möglich sein, die Werthe $a'_{-1}$, $a'_{-2} \cdots$ in Nr. 10. bei beliebigen $a_{-1}$, $a_{-2} \cdots$ bezüglich mit den $\alpha_{-1}$, $\alpha_{-2} \cdots$ in Uebereinstimmung zu bringen. Da aber

$$a'_{m-k-h} = a_{m-k-h} \; (h = m - k + 1 \cdots k - 1),$$

so lässt sich dieses im Allgemeinen nicht bewirken, so lange $2k > m+1$ ist.

Ist $2k = m + 1$, so tritt an Stelle der vorstehenden Gleichungen bloss die folgende (vgl. Nr. 12.)

$$a'_{-1} = a_{-1} + \frac{k-1}{2k-1}\varrho a^2_{k-1};$$

somit kann $\varrho$ in der That so bestimmt werden, dass $a'_{-1} = \alpha_{-1}$ wird. Es giebt also in der Asymptotenschaar einfach unendlich viele Curven, deren Contact um *mindestens einen* Punkt höher ist als der aller übrigen.

Die Gleichung $a'_{-2} = \alpha_{-2}$ kann aber nach (24) nur erfüllt werden durch gehörige Annahme von $\sigma$, wenn gerade $k = 2$.

Wir haben somit folgenden Satz gefunden:

I. $2k > m$. — *Unter den zweifach unendlich vielen Asymptoten*

$$W(x + \varrho y' + \sigma, y') = 0$$

*befindet sich, wenn* $2k > m + 1$, *im Allgemeinen keine durch höheren Contact ausgezeichnete.*

*Ist* $2k = m + 1$ *und* $k > 2$, *so enthält diese Schaar einfach unendlich viele Curven, welche um mindestens einen Punkt höher osculiren, dagegen im Allgemeinen keine von noch höherem Contacte.*

*Isl* $k = 2$, $m = 3$, *so giebt es unter den* 8*-punktig osculirenden cubischen Parabeln*

$$y'^3 + a_1{}^3(x + \varrho y' + \sigma) = 0$$

*stets eine einzige* 10*-punktig osculirende* (Th. p. 122).

Wir fügen zu diesen Resultaten noch hinzu:

Wenn wir im Falle $2k > m + 1$ die Curve $F = 0$, so specialisiren, dass $a_{-1} = \alpha_{-1}$ wird und somit der Contact *aller* Curven der Schaar sich erhöht, so befindet sich doch, *falls* $2k > m + 2$, keine ausgezeichnete darunter.

*Ist* $2k = m + 2$, so kann nach (26**) die Gleichung $a'_{-2} = \alpha_{-2}$ durch einen bestimmten Werth von $\varrho$ erfüllt werden; es giebt somit einfach unendlich viele Curven der Schaar von einem Contacte, der *mindestens um eine* Einheit höher ist. Jedoch unter diesen Curven ist

im Allgemeinen *keine* ausgezeichnet, *falls* $k > 3$. — Für $k = 3$, $m = 4$ findet man nach Gleichung (24) unter den 16-punktig osculirenden Parabeln 4. Ordnnng (vgl. Nr. 22c.) stets *eine einzige*, die in 17 Punkten berührt.

II. Fall. $2k = m$. Nach (26*) findet man, dass *wenn* $a_{k-1}$ *nicht Null ist*, sich unter der Schaar (26) einfach unendlich viele Curven von einem mindestens um *einen* Punkt höherem Contact befinden; man braucht nur $\varrho$ so zu bestimmen, dass

$$\alpha_{-1} = a'_{-1} = a_{-1} + \frac{2k-1}{2k}\, a_k a_{k-1} \varrho .$$

Eine weitere Erhöhung des Contactes durch geeignete Annahme von $\sigma$ ist wie oben im Allgemeinen nur statthaft *für* $k=2$, $m=4$. Dann ergiebt sich der Satz:

*Unter den zweifach unendlich vielen 12punktig osculirenden Asymptoten 4. Ordnung* ($a_1$ *nicht Null*)

$$(y''^2 - a_2^2 x'')^2 + 4 a_1^2 a_2 y'' x'' = 0 ,$$

*wo*

$$x'' = x + \varrho y' + \sigma, \quad y'' = y' + \tfrac{1}{2}\varrho a_2^2$$

*bedeuten, giebt es eine und nur eine* 14 *punktig osculirende.*

*Wenn* $a_{k-1} = 0$ *ist*, so kann im Allgemeinen die Gleichung $\alpha_{-1} = a'_{-1}$ nicht mehr erfüllt werden.

III. Fall. $2k < m$. Ein Blick auf Gleichung (24) lehrt folgenden Satz:

„*Ist* $k > 1$, *so giebt es unter der Asymptoten-Schaar*

$$\mathfrak{A}(x'' + \sigma, y'') = 0$$

*keine ausgezeichnete. — Wenn aber* $k=1$ *ist, so befindet sich unter diesen* $2m$*-punktig osculirenden Asymptoten stets eine einzige* $(2m+1)$*-punktig osculirende* (für $m = 3$ Th. p. 113).

15. Handelt es sich um *wirkliche Herstellung* der Gleichungen der *ausgezeichneten* Asymptoten oder, falls solche fehlen, um Angabe der Bedingungen, unter welchen der Punktwerth des Contactes *aller* Asymptoten der Schaar erhöht wird, — so ist die im Vorstehenden gebrauchte Methode nicht einfach genug. Wir können aber auch in folgender Art vorgehen.

Denken wir uns die Gleichung einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Asymptote $m^{\text{ter}}$ Ordnung ($m \leq n$) unter Zugrundelegung der in § 2. eingeführten Coordinatensysteme $x$, $y'$ oder $x''y''$ auf die Form

$$F = \Pi \cdot \Pi' \cdot \Pi'' \cdots = 0$$

gebracht, welche oben in Nr. 2. begründet ist. Indem wir dann an derselben eine solche Coordinatentransformation vornehmen, welche der Gleichung einer anderen Curve der Asymptoten-Schaar die Form

$W(x, y') = 0$ bezüglich $\mathfrak{A}(x''y'') = 0$ verleiht, suchen wir die unbestimmten Constanten der Transformation so zu bestimmen, dass die Coefficienten des transformirten Ausdruckes $\Pi$ solche Werthe erhalten, wie sie erforderlich sind, damit die Uebereinstimmung der Grössen $a_{-1}, a_{-2} \cdots$ in den Entwickelungen der Ordinaten $y'(y'')$ aus den Gleichungen $F = 0$ und $W = 0$ $(\mathfrak{A} = 0)$ bestehe.

Wir wollen diese Untersuchung durchführen für die bereits in Nr. 5. bezeichneten Normalfälle, *dass die Zahlen m und k relativ prim oder dass, wenn sie ein von der Einheit verschiedenes grösstes gemeinschaftliches Mass p besitzen, $a_{m-k-1}$ nicht verschwinde.* — Da nun $W(x, y') \equiv W_0(x, y')$, so können diejenigen Glieder von $A(x, y')$, welche nicht zu $W_0$ gehören, an sich willkürliche Coefficienten besitzen.

16. Zunächst ist zu ermitteln, aus welchen Coefficienten von $A$ (oder $\Pi$) die Grösse $a_h$ $(h \gtrless 0)$ in der Entwickelung

$$-y' = a_{m-k} x^{\frac{m-k}{m}} + \cdots + a_1 x^{\frac{1}{m}} + a_{-1} x^{-\frac{1}{m}} + \cdots$$

bestimmt wird.

Wie aus (11*) ersichtlich ist, hat das allgemeine Glied von $W_0$ in Beziehung auf $\sqrt[m]{x}$ den Grad

(a) $$m(m-k) + (k + q_{r-1} - m).$$

Sind $m$ und $k$ relativ prim, so ist nach Nr. 3. $q_{r-1} + k' = q_r$, also $< m$; somit sind $y'^m$ und $x^{m-k}$ die Glieder des höchsten Grades in $\sqrt[m]{x}$. Das erstere liefert nach vorstehender Substitution

(b) $$(-1)^m m a_{m-k}^{m-1} a_h x^{\frac{(m-k)(m-1)+h}{m}},$$

also wird $a_h$ aus dem Coefficienten dieser Potenz von $x$ gefunden.

Haben $m$ und $k$ das grösste gemeinschaftliche Mass $p > 1$, so kommt zuerst der Ausdruck

(c) $$(-1)^{m'} y'^{m'} - a_{m-k}^{m'} x^{m'-k'} = m' a_{m-k}^{m'-1} a_{m-k-1} x^{\frac{(m-k)m'-1}{m}} + \cdots + m' a_{m-k}^{m'-1} a_h x^{\frac{(m-k)(m'-1)+h}{m}} + \cdots$$

in Betracht, welche auf die $p^{te}$ Potenz zu erheben ist. Aus diesem Ausdrucke geht $a_h$ zuerst neben $x$ mit dem Exponenten

(d) $$\frac{1}{m}[\{(m-k)m' - 1\}(p-1) + (m-k)(m'-1) + h] = \frac{(m-k)(m-1)+h-p+1}{m}$$

hervor. Die $p^{te}$ Potenz von (c) ist in Bezug auf $\sqrt[m]{x}$ vom Grade $(m-k)m-p$, von welchem nach (a) auch alle Glieder von $W_0$ sind, wofür $q_{r-1} = m-k-p$ und $q_r = m-p$ (es ist somit in der That $g_{r-1} = g_r$). Da aber

$(m-k)(m-1)+h-p+1=m(r-g_{r-1}-1)+(m-k)(m-r-1)+h+1$ ist, so geben diese $p$ (oder $p-1$) Glieder als niedrigsten Coefficienten nur $a_{h+1}$. *Somit wird* $a_h$ *aus dem Coefficienten von* $x$ *in der Potenz* (d) *bestimmt, welche Zahl nach* (b) *auch den Fall* $p=1$ *umfasst.*

Wie wir unsere Aufgabe in der vorigen Nr. festgestellt haben, brauchen wir vom Coefficienten der Potenz (d) von $x$ nur denjenigen Theil anzusetzen, welcher die Coefficienten solcher Glieder von $A$ enthält, die in $W_0$ nicht vorhanden sind.

Indem der Grad aller Glieder $y'^{m-r}x^s$ von $A$ in Bezug auf $\sqrt[p]{x}$ ein Vielfaches von $p$ sein muss, so können solche vom Grade (d) nur vorkommen falls $h=-ip-1$ $(i\geq 0)$. Es giebt aber deren $p$, wie die Gleichung

$$(m-k)(m-r)+ms=(m-k)(m-1)-p(i+1)$$

d. i.

$$m'(s-r+1)+k'(r-1)=-(i+1)$$

zeigt. Bezeichnet man mit $\alpha$, $\beta$ die ganzzahligen Auflösungen dieser Gleichung und mit $\varepsilon$ den kleinsten positiven Werth von $\alpha-1$, so hat man *im Falle* $i<m'$

$$\text{(e)}\qquad \left.\begin{aligned} r&=\alpha=\varepsilon+1+lm'\\ s&=\beta=\varepsilon-g_\varepsilon-1+l(m'-k')\end{aligned}\right\}\ (l=0,1,2\cdots p-1),$$

wo $g_\varepsilon$ dieselbe Bedeutung hat, wie in Gleichung (7) (falls $\varepsilon=0$ oder $i\equiv m'-1$ (mod. $m'$), fällt das erste Glied weg). *Ist jedoch* $i\geq m'$, so dass für $i$ $m'\cdot u+i$ geschrieben werden kann, so findet man für $\beta$

$$\text{(f)}\qquad \beta=\varepsilon-g_\varepsilon-1+l(m'-k')-u\,.$$

Dabei ist zu merken, *dass in* (e) $\beta$ *mit* $\alpha-g_{\alpha-1}-2$ *übereinstimmt*; denn man hat $g_{\alpha-1}=g_\varepsilon+lk'$.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle. — *Ist* $h=-ip-1$, so haben wir von dem in Rede stehenden Ausdrucke nur ins Auge zu fassen die aus $A-W_0$ neu hinzutretenden Glieder, deren Complex verschwinden muss, wenn neben Uebereinstimmung von $a_{-1},\cdots a_{h+1}$ auch noch die der Grössen $a_h$ gefordert wird. Die Bedingung für das Eintreten dieses Umstandes wird also ausgedrückt durch die Gleichung

$$\text{(g)}\qquad \Omega_0\equiv\sum_0^{p-1}{}_\iota(-1)^{m-\alpha}a_{m-k}^{m-\alpha}c_{\alpha,\beta}=0,$$

wenn $c_{r,s}$ den Coefficienten des Gliedes $y'^{m-r}x^s$ in $A$ bezeichnet.

*Wenn aber* $h=-ip-q$ $(q=2,3\cdots p)$ *ist*, so bemerke man zunächst, dass

(h) $(m-k)(m-1)+h-p+1=m\beta+(m-k)(m-\alpha-\nu)+(m-k)\nu-q+1$;

ob man für $\beta$ den Werth (e) oder (f) setzen mag. Die Bedingung, dass neben den $a_{-1}\cdots a_{h+1}$ auch noch die $a_h$ übereinstimmen, wird

nun folgendermassen lauten. Hat $i$ hier denselben Werth wie in (g), so ist nun der von den Gliedern $y'^{m-\alpha}x^{\beta}$ stammende Theil des Coefficienten von $x$ zur Potenz (d) anzuschreiben. Dabei steht neben $c_{\alpha,\beta}$ ein Ausdruck von der Form

$$\sum_{1}^{q-1}{}_{\nu}(-1)^{m-\alpha}a_{m-k}^{m-\alpha-\nu}(m-\alpha)(m-\alpha-1)\cdots(m-\alpha-\nu+1)\,H_{\nu}^{(q)},$$

*wo $H_\nu$ von $\nu$ nicht aber von $\alpha$ abhängt.* Setzt man nun

$$\text{(i)}\quad \sum_{1}^{p-1}{}_{l}(-a_{m-k})^{m-\alpha}(m-\alpha)(m-\alpha-1)\cdots(m-\alpha-\nu+1)c_{\alpha,\beta}\equiv\mathfrak{P}_{\nu},$$

so erhält man als die geforderte Gleichung

$$\text{(k)}\qquad \sum_{1}^{q-1}{}_{\nu}H_{\nu}^{(q)}\mathfrak{P}_{\nu}=0.$$

Dabei ist nach (h)

$$\text{(l)}\qquad H_{q-1}^{(q)}=a_{m-k-1}^{q-1}:(q-1)!.$$

17. Wenden wir nun die eben entwickelten Resultate auf die *drei verschiedenen Fälle* an.

I. Fall. $2k>m$. Hier ist noch die Transformation

$$\text{(m)}\qquad x=x'+\varrho y'+\sigma$$

an $F(x,y')=0$ gestattet. *Wir setzen $i<m'$ voraus.* Das Glied $y'^{m-\alpha}x'^{\beta}$ kann ausser aus $y'^{m-\alpha}x^{\beta}$ nur noch entstehen aus Gliedern, welche $y'$ in einer niedrigeren als der $(m-\alpha)^{\text{ten}}$, $x$ in einer höheren als der $\beta^{\text{ten}}$ Potenz enthalten. Nach (e) ist die Dimension dieses Gliedes $m-g_{\alpha-1}-2$. Da für $i<m'$

$$k\varepsilon=mg_{\varepsilon}+m-p(i+1)$$

ist, so folgt

$$k(\alpha-1)=m(g_{\varepsilon}+lk')+m-p(i+1),$$

$$k\alpha=m(g_{\varepsilon}+lk'+1)+k-p(i+1)$$

und daher, falls $i+1\leq k'$,

$$g_{\alpha}=g_{\alpha-1}+1.$$

Von den Gliedern $y'^{m-\alpha}x^{\beta}$ verdient somit immer nur das gerade betrachtete Berücksichtigung.

Da bereits ist

$$\beta=\alpha-g_{\alpha-1}-2,$$

so hat man nach Nr. 3. nur noch auf die Glieder von $W_0$ zu achten. — Man sieht aber, dass in $W_0(x,y')$ kein Glied mit dem Factor $y'^{m-\alpha}$ vorkommen kann, wenn nicht $k\alpha$ durch $m$ theilbar also $\varepsilon=m'-1$ oder $i=k'-1$ ist. Addirt man ferner zu $k\alpha$ noch $k$, so ergiebt sich $g_{\alpha+1}=g_{\alpha}+1$, so lange $i<2k'-m'-1$. Unter dieser Voraussetzung fehlt also in $W_0$ auch ein Glied mit $y'^{m-\alpha-1}$. Sollte darin ein solches

mit $y'^{m-\alpha-2}$ vorkommen, so wäre es nach Nr. 7a. von der Dimension $m - g_{\alpha-1} - 3$, hätte also für uns jedenfalls keine Bedeutung mehr. — Nimmt man aber an $i \geq 2k' - m' - 1$, so findet man in $W_0$ das Glied $y'^{m-\alpha-1}x^{\beta-1}$ und ausserdem keines mehr von der Dimension $m - \alpha + \beta$ (Nr. 7(a)).

Aus diesen Bemerkungen kann man folgende Resultate ableiten.

1) *Solange* $i \leq 2k' - m' - 2$ *und* $h \geq -(2h - m - p)$ *ist*, hat man für die Coefficienten der transformirten Function $A$

$$c'_{\alpha,\beta} = c_{\alpha,\beta};$$

somit lassen sich im Allgemeinen die Grössen $a_{-1}, \cdots a_{-(2k-m-p)}$ für die Curve und ihre Asymptote nicht in Uebereinstimmung bringen. — Specialisirt man aber die Curve so, dass die Gleichung (g) für $i = 0$ besteht, so stimmen die beiden Werthe von $a_{-1}$ überein und es wächst der $[(m-1)(k+1) + p + 1]$punktige Contact *aller* Asymptoten

$$\text{(n)} \qquad W_0(x - \varrho y' - \sigma,\ y') = 0$$

um *je einen* Punkt. Sollen ferner die Werthe von $a_{-2}$ gleich werden, so muss neben $\mathfrak{L}_0 = 0$ noch die Gleichung $\mathfrak{L}_1 = 0$ bestehen, denn es ist nach Voraussetzung $H_1^{(2)}$ nicht Null. U. s. f. Wenn $a_{-3} \cdots a_{-p}$ aus beiden Gleichungen dieselben Werthe erhalten sollen, so müssen zwischen den Coefficienten von $F = 0$ die Gleichungen (k) d. i.

$$H_1^{(3)}\mathfrak{L}_1 + H_2^{(3)}\mathfrak{L}_2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_1^{(p)}\mathfrak{L}_1 + H_2^{(p)}\mathfrak{L}_2 + \cdots + H_{p-1}^{(p)}\mathfrak{L}_{p-1} = 0$$

bestehen. Dieselben reduciren sich nach (l) auf

$$\mathfrak{L}_0 = 0, \quad \mathfrak{L}_1 = 0, \quad \mathfrak{L}_2 = 0 \cdots \mathfrak{L}_{p-1} = 0,$$

welche ihrerseits wegen

$$|(m-\alpha)(m-\alpha-1)\cdots(m-\alpha-\nu+1)| = (-m')^{\frac{p(p-1)}{2}} 2!\,3!\cdots(p-1)!$$

$$\left(\begin{matrix} l \\ \nu \end{matrix}\right\} = 0, 1, \cdots p-1\Big)$$

*das Verschwinden der* $p$ *Coefficienten* $c_{\alpha,\beta}$ *fordern.*

Nun ist $i = 1$ geworden und es wiederholt sich dieselbe Specialisirung mit einer andern Reihe von $p$ Coefficienten $c_{\alpha,\beta}$.

2. Eine Aenderung tritt erst *mit der Annahme* $i = 2k' - m' - 1$ ein. — Man findet nun $\varepsilon = m' - 2$, $g_\varepsilon = k' - 2$ also

$$\alpha + 1 = m'(l+1), \quad \beta + 1 = (m'-k')(l+1).$$

Die hier in Betracht kommenden Glieder von $W_0$ sind somit gerade die im Ausdrucke (c) vereinigten, $y'^m$ ausgenommen. Führt man die Transformation (m) aus, so findet man demnach

$$c'_{\alpha,\beta} = c_{\alpha,\beta} + \varrho(\beta+1)\binom{p}{l+1}(-1)^{(m'-1)(l+1)}\, a_{m-k}^{m'(l+1)}$$

und sodann

$$\mathfrak{L}'_\nu = \mathfrak{L}_\nu + (-1)^m (m-k)\, a_{m-k}^{m-\nu+1}\, \varrho \sum_0^{p-1} {}_l (-1)^l \binom{p-1}{l} (m-\alpha)\cdots(m-\alpha-\nu+1).$$

d. i.

$$\mathfrak{L}'_\nu = \mathfrak{L}_\nu, \quad (\nu = 0, 1, \cdots p-2),$$

$$\mathfrak{L}'_{p-1} = \mathfrak{L}_{p-1} + (-1)^{m+p-1}(m-k)(p-1)!\, m'^{p-1}\, a_{m-k}^{m-p+2}\, \varrho\,.$$

Daraus folgt, dass keine der Grössen $a_{-(2k-m-p+1)} \cdots a_{-(2k-m+1)}$ durch Uebergang zu einer anderen Asymptote zur Uebereinstimmung gebracht werden kann; dass aber, *wenn sie alle für eine bestimmte Curve dieselben Werthe haben, wie für* $W_0(x', y') = 0$ (was $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 = \cdots \mathfrak{L}_{p-2} = 0$ fordert) dann durch Einführung des aus der Gleichung $\mathfrak{L}'_{p-1} = 0$ sich ergebenden Werthes von $\varrho$ *auch* $a_{-(2k-m)}$ *für beide Entwickelungen denselben Werth erhält. Unter den zweifach unendlich vielen Asymptoten* (n) *von* $[(m+1)k + p - 1]$*-punktigem Contacte* (28) *giebt es einfach unendlich viele von* $[(m+1)k + p]$*-punktigem Contacte.*

3. Bezeichnen wir den eben gewonnenen Werth von $\varrho$ mit $\varrho_0$ und setzen

$$x = x_1 + \varrho_0 y',$$

so ist noch die Transformation $x_1 = x' + \sigma$ gestattet. Dabei entsteht das Glied $y'^{m-\alpha} x'^{\beta}$ ausser aus $y'^{m-\alpha} x_1^{\beta}$ noch aus den Gliedern, welche $y'$ in derselben, $x_1$ in einer höheren als der $\beta^{\text{ten}}$ Potenz enthalten. Glieder dieser Art müssten zu $W_0$ gehören, was aber nur möglich ist, wenn $i = k' - 1$ wird. Somit können die Grössen $a_{-(2k-m+1)} \cdots a_{-(k-p)}$ in den Entwickelungen von $y'$ aus $F(x_1, y') = 0$ und $W(x_1, y') = 0$ nur übereinstimmen durch Verschwinden aller Coefficienten $c_{\alpha,\beta}$ $(i = 2k' - m', \cdots k'-2)$ in $F = 0$.

Für $i = k' - 1$ hat man $\varepsilon = m' - 1$, $g_\varepsilon = k' - 1$, somit

$$\alpha = m'(l+1), \quad \beta + 1 = (m'-k')(l+1),$$

also

$$c'_{\alpha,\beta} = c_{\alpha,\beta} + \sigma(m-k)\binom{p}{l-1}(-1)^{(m'-1)(l+1)}\, a_{m-k}^{m'(l+1)},$$

wie oben in 2. Daraus folgt genau auf dieselbe Weise, dass $a_{-(k-p+1)} \cdots a_{-(k-1)}$ nur übereinstimmen bei Erfüllung der Bedingungen

$$\mathfrak{L}_0 = 0, \quad \mathfrak{L}_1 = 0, \cdots \mathfrak{L}_{p-2} = 0, \quad (i = k' - 1),$$

dass aber dann durch Bestimmung von $\sigma$ aus der Gleichung $\mathfrak{L}'_{p-1} = 0$ auch noch $a_{-k}$ denselben Werth erhalten kann. *Nun befindet sich unter den einfach unendlich vielen Asymptoten* $W_0(x_1, y') = 0$, *welche* $\{m(k+1) + p - 1\}$*-punktig osculiren, eine einzige, deren Contact noch um einen Punkt höher ist.*

Durch weitere Specialisirung der Gleichung $F(x', y') = 0$, welche in ganz ähnlicher Weise vor sich geht, lässt sich der Punktwerth des Contactes der ausgezeichneten, $\{m(k+1)+p\}$-punktig osculirenden Asymptote noch ferner vermehren.

18. II. Fall. $2k = m$. $p = k$. *Die Grösse $a_{k-1}$ soll nicht verschwinden.* Die zulässige Transformatien ist nach Nr. 11.

$$x = x'' + \varrho y'' + \sigma, \quad y' = y'' + \tfrac{1}{2}\varrho a_k^2.$$

Die Function $W_0$ findet sich in (12) angegeben:

$$W_0(x, y') \equiv (y'^2 - a_k^2 x)^k + \sum_1^{k-1}{}_l\, c_{2l+1}\, y'^{2k-2l-1}\, x^l.$$

Da $m' = 2$, so hat man *für* $i = 0$, $\varepsilon = 1$, $g_i = 0$ also

$$\alpha = 2(l+1), \quad \beta = l, \quad (l = 0, 1, \cdots k-1).$$

Das Glied $y''^{2k-2l-2} x''^{\,l}$ entsteht bei obiger Transformation ausser aus dem homologen Gliede nur noch aus $y'^{2k-2l-3} x^{l+1}$ und $y'^{2k-2l-1} x^l$ und aus dem Ausdrucke

$$(y'^2 - a_k^2 x)^k = \left(y''^2 - a_k^2 x'' + a_k^2\left(\tfrac{1}{4}\varrho^2 a_k^2 - \sigma\right)\right)^k.$$

Demnach folgt als Coefficient des genannten Gliedes

$$c''_{\alpha,\beta} = c_{\alpha,\beta} + (l+1)\varrho c_{2l+3} + \left(k - l - \tfrac{1}{2}\right)\varrho a_k^2 c_{2l+1} + (-1)^l k\binom{k-1}{l} a_k^{2l+2}\left(\tfrac{1}{4}\varrho^2 a_k^2 - \sigma\right).$$

Bildet man den Ausdruck (g) für die transformirte Gleichung, so erhält man ohne Mühe

$$\mathfrak{L}''_0 = \sum_0^{k-1}{}_l\, a_k^{2k-\alpha} c_{\alpha,\beta} + \left(k - \tfrac{1}{2}\right)\varrho \sum_1^{k-1}{}_l\, c_{2l+1}\, a_k^{2k-2l}.$$

Führt man aber in $W_0 = 0$ ein

$$-y' = a_k x^{\frac{k}{2k}} + a_{k-1} x^{\frac{k-1}{2k}} + \cdots,$$

so ergiebt sich durch Nullsetzung des Coefficienten von $x^{\frac{2k-1}{2}}$

$$2^{k'} a_k^k a_{k-1}^k - \sum_1^{k-1}{}_l\, c_{2l+1}\, a_k^{2k-2l-1} = 0$$

und somit geht die Gleichung $\mathfrak{L}''_0 = 0$ über in

$$(2k-1)2^{k-1} a_k^{k+1} a_{k-1}^k \varrho + \sum_0^{k-1}{}_l\, a_k^{m-\alpha} c_{\alpha,\beta} = 0.$$

Daraus wird ersichtlich, dass dieselbe stets zur Bestimmung von $\varrho$ geeignet ist. Es kann also die Uebereinstimmung der Werthe von $a_{-1}$ bewirkt werden.

*Unter den zweifach unendlich vielen Asymptoten* $W_0(x'', y'') = 0$, *welche* $2k(k+1)$*-punktig osculiren, befinden sich einfach unendlich viele, deren Contact um einen Punkt höher ist.*

Um den Gegenstand weiter zu verfolgen, setze man zunächst

$$x = x_1 + \varrho_0, \quad y' = y'' + \tfrac{1}{2}\varrho_0 a_k^2$$

(unter $\varrho_0$ den eben erwähnten Werth von $\varrho$ verstehend); dann steht noch die Transformation

$$x_1 = x'' + \sigma$$

frei. Man findet ganz auf dieselbe Weise wie in 17. 2), dass sich im Allgemeinen die Grössen $a_{-2}$, $a_{-3} \cdots a_{-k+1}$ nicht in Uebereinstimmung bringen lassen, dass aber, wenn dieses für eine specielle Curve $F(x_1, y'') = 0$ stattfindet, durch entsprechende Annahme von $\sigma$ auch $a_{-k}$ derselbe Werth ertheilt werden kann, den es aus $W_0 = 0$ erhält. *Dann giebt es unter den einfach unendlich vielen* $(2k^2+3k-1)$*-punktig osculirenden Asymptoten* $W_0(x_1 - \sigma, y'') = 0$ *eine einzige ausgezeichnete von* $k(2k+3)$*-punktigem Contacte.*

III. Fall. $2k < m$. Die Schaar der typischen Asymptoten wird jetzt durch $\mathfrak{A}(x'' - \sigma, y'') = 0$ dargestellt, so dass man noch die Transformation

$$x'' = x''' + \sigma$$

ausführen kann. Wir haben daher dieselbe Entwickelung wie in Nr. 17c). Die Coefficienten $a_{-1}$, $a_{-2} \cdots a_{-k+1}$ haben für beide Curven im Allgemeinen verschiedene Werthe; wenn aber die ganze Reihe stimmt, so kann dasselbe durch geeignete Wahl von $\sigma$ auch für $a_{-k}$ erreicht werden. Für die so specialisirte Curve besteht demnach der Satz: *Unter den einfach unendlichen vielen Asymptoten* $\mathfrak{A}(x'' - \sigma, y'') = 0$ *von* $\{m(k+1)+p-1\}$*-punktigem Contacte befindet sich eine ausgezeichnete, welche* $m(k+1)+p$*-punktig osculirt.*

19. Wir haben die Entwickelungen der Nr. 16—18. ausführlich hier wiedergegeben, weil sie die *Eintheilung der Curven* $m^{\text{ter}}$ *Ordnung mit je einer Asymptote von derselben Ordnung wenigstens in den* Nr. 15. *erwähnten Normalfällen* enthalten. — Zur Charakterisirung der unendlichen Zweige einer Curve sind die Werthe von $a_{m-k} \cdots a_1$, $a_0$ offenbar nothwendig und hinreichend. Daher muss eine Eintheilung der Curven nach der Natur ihrer unendlichen Zweige auf diese Coefficienten *allein* gegründet sein. Dieses ist im Vorstehenden geleistet. Man kann allerdings für jede der genannten Curven Asymptoten von höherem als $\{(m-1)(k+1)+p+1\}$-punktigem Contacte herstellen, aber dieselben gehören im Allgemeinen nicht mehr zu den typischen und sie

können nur durch Berücksichtigung der Werthe von $a_{-1}$, $a_{-2}\cdots$ gefunden werden.

Die Schemata des folgenden §.: „*Reelle Curven* 3., 4., 5. *Ordnung mit je einer Asymptote von derselben Ordnung*“ sind, eine einzige Gruppe abgerechnet, eine einfache Anwendung der Resultate von Nr. 17. und 18. Die Gruppen schreiten nach den Werthen von $k$ fort. Jede Gruppe beginnt mit einer Curve, deren Gleichung *von*

$$(m-k+2)+\frac{(m-k+1)(m-1)-p+1}{2}=\frac{(m-k+1)(m+1)-p+3}{2}$$

*unabhängigen Constanten* abhängt. Dieselben bestehen nämlich aus den $m-k+2$ Grössen $a_m$, $a_{m-k}\cdots a_1$, $a_0$ und den Coefficienten der Glieder $y'^{m-r}x^s$, wofür

$$s\leqq r-g_{r-1}-2\cdot(r=2,3\cdots m).$$

In der Gleichung dieser Curve steht zuerst das Gleichungspolynom der Asymptote $W_0(x,y')$ oder $\mathfrak{A}(x''y'')$ und zwar in folgender Form

$$W_0(x,y')\equiv\{y'^{m'}+\alpha x^{m'-k'}\}^p+\Sigma'\gamma_r y'^{m-r}x^s,$$

wo $\Sigma'$ sich auf diejenigen $m-k-1$ Glieder von $W_0$ bezieht, für welche $r$ nicht ein Vielfaches von $m'$ ist (vergl. Nr. 3. und 4.). *Die Constanten* $\alpha$, $\gamma_r$ *können hier alle reellen Werthe annehmen, ohne dass die Curve selbst aufhörte reell zu sein.* Zunächst hat man

$$(-1)^{m'-1}a_{m-k}^{m'}=\alpha.$$

Bei geraden $m'$ muss $k'$ ungerade sein, man kann also durch Vertauschung von $x$ mit $-x$ stets dem Coefficienten $\alpha$ ein solches Zeichen verschaffen, dass die vorstehende Gleichung reelle Werthe für $a_{m-k}$ liefert. *So lange nun m und k relativ prim oder im Gegenfalle* $a_{m-k-1}$ *nicht verschwindet,* findet man alle folgenden Coefficienten $a_{m-k-1}$, $\cdots$ durch je eine lineare Gleichung (Nr. 16.). Man kann also die $\gamma_r$ ganz willkührlich ansetzen, immer erhält man einen reellen Curvenzweig von der geforderten Eigenschaft. Denn es muss auch $a_0=0$ sein, weil sonst — bei der Irreducibilität von $W_0(\mathfrak{A})$ — in der Curvengleichung das Glied $ma_0y'^{m-1}$ sich finden müsste.

Bei Abzählung der unbestimmten Constanten *in der Curvengleichung selbst* sind im Falle der allgemeinen Asymptote $W_0(x,y')=0$ $(m\leqq 2k)$ auf $x$, $y'$ im Ganzen *zwei*, im Falle der allgemeinen Asymptote $\mathfrak{A}(x'',y'')=0$ $(m>2k)$ *drei* zu rechnen, so dass sowohl für $W_0$ als auch für $\mathfrak{A}$ $m-k+2$ unbestimmte Constante anzusetzen sind.

## § 4.

### Curven 3., 4., 5. Ordnung mit je einer Asymptote von derselben Ordnung.

20. In den folgenden Gleichungen sind die unbestimmten Constanten des *eingeklammerten* Gleichungspolynomes der Asymptote mit

griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma \cdots$, die übrigen mit lateinischen $a, a' \cdots, b, b' \cdots$ bezeichnet. Alle sind, solange nicht das Gegentheil bemerkt ist, *aller reellen Werthe fähig.* — Der unendlich ferne Berührungspunkt der Asymptote hat stets die Coordinaten $\eta = 0$, $\xi = 0$, indem an Stelle der früher gebrauchten $xy'$, $x'y''$ durchaus $xy$ geschrieben wird.

Jeder Gleichung ist die Anzahl der unabhängigen unbestimmten Constanten in eckigen Klammern $[\cdots]$ beigesetzt.

21. *Curven* 3. *Ordnung mit Asymptoten* 3. *Ordnung.* $m = 3$.

a) $k = 1, \quad \beta \gtrless 0,$

[7] 1) $(y^3 + \beta x^2) + ay + b^1 = 0$*).

Nach Nr. 14. befindet sich unter den unendlich vielen semicubiparabolischen Asymptoten von 6punktigem Contacte eine 7punktig osculirende, welche in vorstehender Gleichung unmittelbar hervortritt, denn die Curve $y^3 + \beta x^2 = 0$ hat mit der gegebenen nur zwei endliche Punkte gemein.

Uebrigens zeigt auch Nr. 18., dass die Entwickelungen von $y$ aus der Gleichung $y^3 + \beta x^2 = 0$ und

$$(y^3 + \beta x^2) + ay + bx + b' = 0$$

auch in $a_{-1}$ übereinstimmen, wenn $b = 0$.

Wenn noch $a = 0$, also für die Curve

[6] 2) $(y^3 + \beta x^2) + b' = 0,$

steigt der Contact der ausgezeichneten Asymptote *auf* 9 *Punkte.* In der That stimmen jetzt die beiden Entwickelungen auch in $a_{-2}$ (Nr. 18.) und in $a_{-3}$ überein, weil letzteres Null sein muss (Nr. 1.).

b) $k = 2$. Man erhält die cubische Parabel

[5] 3) $y^3 + \alpha x = 0$

der sich alle Parabeln $y^3 + \alpha(x + \varrho y + \sigma) = 0$ asymptotisch nähern.

22. *Curven* 4. *Ordnung mit Asymptoten* 4. *Ordnung.* $m = 4$.

a) $k = 1$. Es ist

$$W_0(x, y) \equiv y^4 + \alpha y^2 x + \beta y x^2 + \gamma x^3, \quad (\gamma \gtrless 0)$$

also nach Nr. 12. $\mathfrak{A}(x, y)$ *von der Form*

$$\mathfrak{A}(x, y) \equiv y^4 + \alpha' y^2 x + \gamma x^3.$$

Der Contact ist im Allgemeinen 8punktig; für *eine* Curve der Asymptoten-Schaar aber 9punktig, in welchem Falle auch die Werthe von $a_{-1}$ übereinstimmen. Die Gleichung der allgemeinen Curve mit einer Asymptote von der in Rede stehenden Art ist:

$$\mathfrak{A} + ay^2 + y(bx + b') + cx^2 + c'x + c'' = 0.$$

*) Vgl. Plücker System der analytischen Geometrie p. 130.

Damit die Entwickelungen aus $\mathfrak{A}(x, y) = 0$ und $F(x, y) = 0$, *falls m und k relative Primzahlen sind*, auch in $a_{-1}$, $a_{-2} \cdots a_{-h}$ übereinstimmen, müssen aus $F = 0$ alle Glieder $y^{m-\alpha}x^{\beta}$ verschwinden, worin $\alpha$, $\beta$ den Bedingungen entsprechen (vgl. Nr. 16. (e) (f))

$$(A) \qquad \begin{cases} \alpha = \varepsilon + 1, & \beta = \varepsilon - f \\ k\varepsilon = mf - w, & (w = 1, 2, \cdots h;\ \varepsilon < m). \end{cases}$$

Ist $h$ durch $m$ theilbar, so geht $w$ sicher nicht weiter als bis $h - 1$, indem die Coefficienten $a_{-m}$, $a_{-2m} \cdots$ ohnehin übereinstimmen, da sie in jeder Entwickelung verschwinden müssen. Nimmt man $h = 6$, so erhält man in unserem Falle folgende Werthsysteme $\alpha$, $\beta$:

$$(4, 2),\ (3, 1),\ (2, 0),\ -\ (4, 1),\ (3, 0).$$

Sie entsprechen einer Osculation bezüglich in

$$9,\quad 10,\quad 11,\quad 13,\quad 16$$

Punkten.

Bringen wir nun in der vorstehenden Curvengleichung die 9-punktig osculirende Asymptote zur Ansicht, so erhalten wir als allgemeine Gleichung dieser Gruppe

[11] 1) $(y^4 + \alpha y^2 x + \gamma x^3) + ay^2 + y(bx + b') + c'x + c'' = 0.$

Durch Erhöhung des Contactes der hier erscheinenden ausgezeichneten Asymptote ergeben sich folgende weitere Arten:

[10] 2) $b = 0$. Contact 10-punktig; dazu
[9] 3) $a = 0$. „ 12-*punktig*; dazu
[8] 4) $c' = 0$. „ 13-punktig; dazu
5) $b' = 0$. „ 16-*punktig*. In der That ist 1) jetzt reducirt auf

[7] $$(y^4 + \alpha y^2 x + \gamma x^3) + c'' = 0.$$

Diese Eintheilung der Curven der vorliegenden Gruppe erscheint als folgerichtig, wenn man die Natur der unendlichen Zweige als Princip einer solchen aufstellt. — Die Curve 1) ist Plücker's 138. Art (Th. p. 146). In seiner 139. Art, welche wegen $\alpha = 0$ der Annahme $a_2 = 0$ entspricht, vermögen wir nichts von der allgemeinen Form Verschiedenes zu erblicken.

b) $k = 2$. $(p = 2)$. Nach (12) ist

$$W_0(x, y) \equiv (y^2 + \alpha x)^2 + \beta yx. \quad (\beta \gtrless 0).$$

Unter den zweifach unendlich vielen Asymptoten von 12-punktigem Contacte giebt es *eine* ausgezeichnete, die 14-punktig osculirt (Nr. 14.). Mit Zuhülfenahme derselben erscheint die allgemeine Gleichung der hierhergehörigen Curven in der Gestalt:

[8] 6) $$\{(y^2 + \alpha x)^2 + \beta yx\} + by + c' = 0.$$

In der That müssen bei 14-punktigem Contacte von $W_0 = 0$ mit der Curve

(B) $$W_0 + ay^2 + by + cx + c' = 0$$

nach Nr. 17. 1) wegen Uebereinstimmung von $a_{-1}$ und $a_{-2}$ die Gleichungen bestehen

$$(i=0)\ \mathfrak{L}_0 \equiv aa_2^2 + c = 0, \quad \mathfrak{L}_1 \equiv -2aa_2 = 0$$

d. i.

$$a = 0,\ c = 0.$$

Die Curve 6) ist Plücker's 144. Art (Th. p. 147). — $c = 0$ bezeichnet eine neue Art:

[7] 7) $$\{(y^2+\alpha x)^2+\beta yx\} + c' = 0,$$

indem die ausgezeichnete Asymptote 16-punktig osculirt.

*Wenn $a_1 = 0$ also $\beta = 0$ ist, so liegt zum ersten Male ein von den Normalfällen der* Nr. 15. *verschiedener vor.* Die Curve (B) hat nun im Allgemeinen zwei Gruppen parabolischer Asymptoten: — die Parabelschaaren haben gleiche Parameter und parallele Axen —. Wollen wir wieder Asymptoten 4. Ordnung (Doppel-Parabeln) haben, so müssen die $a$, $b$, $c$, so bestimmt werden, dass für die Curve (B) eine Entwickelung von der Form besteht

$$y = a_2 x^{\frac{2}{4}} + a_{-1} x^{-\frac{1}{4}} + \cdots,$$

in der mindestens ein $a$ mit ungeradem Zeiger nicht Null ist. Setzt man diesen Ausdruck in (B) ein, so folgen, wenn die Coefficienten von $x$, $x^{\frac{2}{4}}$ gleich Null gesetzt werden, die Gleichungen

$$a_2^2 + \alpha = 0, \quad aa_2^2 + c = 0, \quad 4a_2 a_{-1}^2 + b = 0,$$

d. i. die Curve

[6] 8) $$(y^2+\alpha x)^2 + a(y^2+\alpha x) + by + c' = 0$$

hat, *so lange $b$ nicht* verschwindet, wieder eine Asymptote 4. Ordnung. Nach Nr. 11. $\beta$) sind alle Parabeln

(C) $$y^2 + \alpha x + \delta = 0$$

Asymptoten und zwar osculiren sie, wie sowohl die Formel (27) als auch der Anblick der Gleichung 8) zeigt, die Curve 7-punktig. Die Curve — Plücker's 147. Art — besteht aus einem Zuge, der einmal jede Parabel (C) schneidend auf beiden Seiten *eines* Astes ins Unendliche verläuft. Eine Parabel von höherem als 7-punktigem Contacte giebt es somit nicht, wie denn auch durch keine Transformation

$$x = x' + \varrho y' + \sigma, \quad y = y' - \tfrac{1}{2}\varrho\alpha$$

das Glied mit $y'$ aus 8) weggeschafft werden kann. Dagegen lassen sich $\varrho$ und $\sigma$ so bestimmen, dass die Gleichung 8) die Form annimmt

$$(y^2+\alpha x)^2 + by = 0.$$

c) $k = 3$. Man findet

$$W_0(x, y) \equiv y^4 + \alpha x, \quad (\alpha \gtrless 0)$$

und als allgemeine Gleichung der Curven dieser Gruppe

[6] 9) $(y^4 + \alpha x) + ay^2 + by + c = 0. \quad (a \gtrless 0).$

Unter den zweifach unendlich vielen Asymptoten

(D) $$y^4 + \alpha(x + \varrho y + \sigma) = 0,$$

welche 14-punktig osculiren, zeichnet sich keine durch höheren Contact aus (Plücker's 152. Art).

Man könnte $\varrho$, $\sigma$ so bestimmen, dass aus Gleichung 9) das Glied mit $y$ und die Constante entfallen, so dass die Form

$$(y^4 + \alpha x) + ay^2 = 0$$

erscheint.

Für $a = 0$ steigt der Contact *aller* Asymptoten (D) auf 15 Punkte (vgl. A). Die Curve selbst geht in eine Parabel 4. Ordnung

[5] 10) $$y^4 + \alpha x = 0$$

über, welche als selbständige Art der Curven 4. Ordnung anzusehen ist.

23. *Curven 5. Ordnung mit Asymptoten 5. Ordnung.*

Man hat zuerst die Glieder der Functionen $W_0(x, y)$ aufzustellen, was nach den in Nr. 3. gegebenen Vorschriften geschieht. Das weitere ergiebt sich aus den Formeln (A) unter Berücksichtigung von Nr. 17. und 18.

a) $k = 1$. Es existirt *eine* 11-punktig osculirende Asymptote, welche in der Gleichung der Curve

[16] 1) $$(y^5 + \alpha y^3 x + \beta y^2 x^2 + \delta x^4) + ay^3 + y^2(bx + b') + y(cx^2 + c'x + c'') + d'x^2 + d''x + d''' = 0$$

unmittelbar erscheint. *$\delta$ darf nicht Null sein.*

Diese ausgezeichnete Asymptote osculirt nach (28)

[15] 2) 12-punktig, wenn $c = 0$;
[14] 3) 13-punktig, wenn noch $b = 0$;
[13] 4) 15-*punktig*, wenn noch $a = 0$;
[12] 5) 16-punktig, wenn noch $d' = 0$;
[11] 6) 17-punktig, wenn noch $c' = 0$;
[10] 7) 20-*punktig*, wenn noch $b' = 0$;
[9] 8) 21-punktig, wenn noch $d'' = 0$;
[8] 9) 25-*punktig*, wenn noch $c'' = 0$.

Damit sind wir zur Gleichung gelangt

[8] $$(y^5 + \alpha y^3 x + \beta y^2 x^2 + \delta x^4) + d''' = 0,$$

welche die Asymptote selbst umfasst.

*b*) $k = 2$. Es existiren einfach unendlich viele Asymptoten von 14-punktigem Contacte, aber keine von höherem. Eine derselben erscheint in der folgenden Gleichung der allgemeinen Curve dieser Gruppe:

[13] 10) $(y^5+\alpha y^3 x+\gamma x^3)+ay^3+y^2(bx+b')+y(cx+c')+dx^2 + d'x+d''=0.$

Dabei ist $\gamma \gtrless 0$. — Durch die Substitution $x=x'+\sigma$ könnte man das Glied mit $x^2$ wegschaffen.

Die Osculation *aller* Asymptoten wird 15-punktig, wenn $b=0$. Aber nach Nr. 18. befindet sich nun darunter eine ausgezeichnete von 16-punktigem Contacte. Bringen wir dieselbe in der Curvengleichung zur Ansicht, so muss diese lauten:

[12] 11) $(y^5+\alpha y^3 x+\gamma x^3)+ay^3+b'y^2+y(cx+c')+d'x+d''=0.$

Der Contact der ausgezeichneten Asymptote wird erhöht

[11] 12) auf 17 Punkte, wenn $a=0$;
[10] 13) *auf* 19 *Punkte*, wenn noch $c=0$;
[9] 14) auf 20 Punkte, wenn noch $b'=0$;
[8] 15) *auf* 22 *Punkte*, wenn noch $d'=0$;
[7] 16) *auf* 25 *Punkte*, wenn noch $c'=0$.

c) $k=3$. Wir haben zweifach unendlich viele Asymptoten

$$W_0(x+\varrho y+\sigma, y)=0,$$

wo

$$W_0(x,y)\equiv y^5+\alpha y^2 x+\beta x^2=0, \quad (\beta \gtrless 0)$$

ist. Unter diesen 18-punktig osculirenden Curven befinden sich nach Nr. 17. einfach unendlich viele von 19-punktigem Contacte, jedoch im Allgemeinen keine von höherem. Unter Benutzung einer Asymptote von dieser besonderen Beschaffenheit können wir die allgemeine Gleichung der Curven dieser Gruppe so schreiben:

[10] 17) $(y^5+\alpha y^2 x+\beta x^2)+ay^3+by^2+cy+dx+d'=0.$

Die noch willkürliche Constante $\sigma$ mag so bestimmt werden, dass aus dieser Gleichung das Glied mit $x$ entfällt.

Durch die Annahme $a=0$ werden alle in 17) vorkommenden Asymptoten 20-punktig osculirend. Und man weiss aus Nr. 17. 3), dass sich darunter eine ausgezeichnete von 21-punktigem Contacte befindet. Lässt man dieselbe in der Curvengleichung hervortreten, so erhält man dafür:

[9] 18) $(y^5+\alpha y^2 x+\beta x^2)+by^2+cy+d=0.$

Der Contact der ausgezeichneten Asymptote wird erhöht

[8] 19) *auf* 23 *Punkte*, wenn $b=0$;
[7] 20) *auf* 25 *Punkte*, wenn noch $c=0$.

d) $k=4$. Im Allgemeinen giebt es zweifach unendlich viele Asymptoten — Parabeln 5. Ordnung — von 22-punktigem Contacte, keine von höherem. Die Gleichung dieser Art von Curven lautet:

[7] 21) $(y^5+\alpha x)+ay^3+by^2+cy+d=0.$

Dabei muss $\alpha \gtrless 0$ sein. — Setzt man hier anstatt $x$ $x + \varrho y + \sigma$, so können $\varrho$, $\sigma$ so angenommen werden, dass die Gleichung die Form bekommt

$$(y^5 + \alpha x) + a y^3 + b y^2 = 0.$$

Für $a = 0$ steigt der Contact *aller* Asymptoten auf 23 Punkte, ohne dass jedoch eine darunter durch höheren Contact hervortreten würde. Dieses führt zur Art

[6] 22) $(y^5 + \alpha x) + b y^2 = 0,$

wenn über die willkürliche Constante $\sigma$ wie oben verfügt wird. — Durch die Annahme $b = 0$ geht die Curve in die Parabel 5. Ordnung

[5] 23) $y^5 + \alpha x = 0$

über, welche von allen Parabeln $y^5 + \alpha (x + \varrho y + \sigma) = 0$ 24-punktig osculirt wird.

## § 5.

## Curven 6. Ordnung mit Asymptoten von derselben Ordnung ($m = 6$).

24. Es würde natürlich gar keiner Schwierigkeit begegnen, die Gleichungen derjenigen Curven 6. Ordnung anzuschreiben, welche den in Nr. 15. angeführten Normalfällen entsprechen. Damit wollen wir uns also nicht aufhalten. Dagegen scheint es zum Abschlusse unserer Untersuchungen wünschenswerth, diejenigen Curven 6. Ordnung ins Auge zu fassen, *deren Asymptoten nicht den erwähnten Normalcharakter besitzen.*

I. a) $k = 2$. $a_3 = 0$. Da $2k < m$, so sind die typischen Asymptoten von der Form $\mathfrak{A} = 0$, d. i. es fehlt darin das Glied $yx^3$. So lange $a_3$ nicht verschwindet, hätte man

$$\mathfrak{A}_0(x, y) = (y^3 - \alpha x^2)^2 + \beta y^4 x + \gamma y^2 x^2 \quad (\alpha \gtrless 0).$$

Wir werden daher zu untersuchen haben, unter welchen Bedingungen die Gleichung

(a) $\mathfrak{A}_0 + a y^4 + y^3 (bx + b') + y^2 (cx + c') + y (dx^2 + \cdots) + e x^3 + \cdots = 0$

eine Entwickelung von der Form

(b) $$y = a_4 x^{\frac{4}{6}} + a_2 x^{\frac{2}{6}} + a_1 x^{\frac{1}{6}} + a_{-1} x^{-\frac{1}{6}} + \cdots$$

zulässt. Setzen wir diese Reihe in (a) ein, so folgt ausser $a_4^3 = \alpha$ dadurch, dass die Coefficienten von $x^{\frac{2}{6}}$ $x^{\frac{2}{6}}$ $x^{\frac{0}{6}}$ $x^{\frac{-1}{6}}$ verschwinden müssen,

(c) $$\beta = 0, \quad 9 a_4^2 a_2^2 + \gamma = 0, \quad a_2 a_1 = 0.$$

Wird nun angenommen, *dass $a_1$ nicht verschwinde*, so ergiebt sich also nothwendig $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $a_2 = 0$. (Die letzte Gleichung erklärt sich leicht aus (26**) und (26***), indem *hier zufällig* $c' = 0$.) Führt man

diese Resultate in (a) und (b) ein und entwickelt weiter, so findet man zunächst aus dem Coefficienten von $x^3$

(d) $$9a_4^4 a_1^2 + ba_4^3 + c = 0.$$

Es soll aber $a_1$ eine gegebene Grösse sein, denn wir wollen alle Curven mit einer bestimmten Asymptote; wir setzen daher den aus dieser Gleichung folgenden Werth von $e$ in (a) ein. Dadurch gelangen wir zu folgender Gleichung — es ist $P = y^3 - \alpha x^2$ —

[16] 1) $$\{P^2+\beta x^3\} + bPx + ay^4 + b'y^3 + y^2(cx+e') + y(dx^2+\cdots) + e'x^2 + \cdots = 0.$$

Hier wurde statt $-9a_4^4 a_1^2\ \beta$ geschrieben, welche Zahl *jeden von Null verschiedenen reellen Werth* annehmen kann. (Bei positiven $\beta$ braucht man nur $x$ mit $-x$ zu vertauschen, um für $a_1$ einen reellen Werth zu erhalten.) Diese Curve hat einfach unendlich viele Asymptoten $\mathfrak{A}(x-\sigma, y) = 0$

$$\mathfrak{A}(x, y) \equiv P^2 + \beta x^3,$$

die sämmtlich nach Formel (27) 20-punktig osculiren. Es ist hier $\varrho_1 = 1$, daher die Formel (27*) eintritt, welche $19 - k_r$ als Punktwerth des Contactes liefert. Nach Nr. 14. befindet sich darunter keine von höherem Contacte. — Die noch unbestimmte Constante $\sigma$ kann so gewählt werden, dass aus 1) das Glied $Px$ entfällt.

Um aus der Form 1) die weiteren Arten dieser Gruppe zu entwickeln, bemerke man, dass $a_{-h}$ aus dem Coefficienten von $x$ zur Potenz $\frac{17-h}{6}$ eindeutig bestimmt werde. Sucht man die Glieder vom Grade $\frac{16}{6}$ in $x$, so findet man, dass $a_{-1}$ in den Entwickelungen von $y$ aus 1) und $\mathfrak{A}(x, y) = 0$ übereinstimmt, *wenn* $a\alpha + d = 0$ *ist.* Dann steigt der Contact aller Asymptoten um *einen* Punkt. Aber aus (24) wird man schliessen, dass unter denselben jetzt *eine* 22-punktig osculirt. $a_{-2}$ wird aus dem Coefficienten von $x^{\frac{15}{6}}$ bestimmt, so dass die 22-punktige Osculation zwischen den in Rede stehenden Curven die Bedingung $b = 0$ verlangt, welche, wie bereits bemerkt, in der That durch eine Transformation $x = x' + \sigma$ erfüllt werden kann. — Als zweite Art der Gruppe folgt mithin

[15] 2) $$\{P^2+\beta x^3\} + aPy + b'y^3 + y^2(cx+c') + y(d'x+d'') + e'x^2 + \cdots = 0.$$

Nun giebt es noch 8 Arten in dieser Gruppe, bis endlich der Contact zwischen Curve und Asymptote den Werth von 36 Punkten erreicht. Man findet dieselben leicht nach Nr. 15., indem man nur den Grad in $x$ der Glieder von 2) notirt. — Die Asymptote osculirt

[14] 3) 23-punktig, wenn $c = 0$;
[13] 4) 24-punktig, wenn noch $a = 0$;
5) 26-*punktig*, wenn noch $b'\alpha + e' = 0$, so dass man die Gleichung erhält

[12] $(P^2 + \beta x^3) + b'P + c'y^2 + y(d'x + d') + e''x + e''' = 0$;

[11] 6) 27-punktig, wenn hier $b' = 0$;
[10] 7) 28-punktig, wenn noch $d' = 0$;
[9] 8) 30-*punktig*, wenn noch $c' = 0$;
[8] 9) 32-*punktig*, wenn noch $e'' = 0$;
[7] 10) 36-*punktig*, wenn noch $d'' = 0$.

25. I. b. $k = 2$. $a_3 = a_1 = 0$. Wir können offenbar hinzufügen $a_2 = 0$, wenn wir die Coordinaten so transformiren, dass die Gleichung der Asymptote die Form $\mathfrak{A} = 0$ annimmt. Uebrigens lehren dieses auch die Gleichungen (c). Die mittlere derselben zeigt, dass, solange $\gamma \gtrless 0$, $a_2$ für jeden Werth von $a_4$ zweiwerthig ist, was nur möglich wäre, wenn zwei Gruppen von Asymptoten 3. Ordnung existirten. Da dieser Fall hier nicht in Betracht gezogen wird, so muss demnach $\gamma = 0$ und also auch $a_2 = 0$ genommen werden. Die Gleichung (d) liefert ferner $b\alpha + c = 0$. Damit $x^{\frac{1}{6}}$ in der Entwickelung von (a) verschwinde, folgt noch $a\alpha + d = 0$.

Die allgemeinste Gleichung dieser Gruppe ist demnach

[14] 11) $P^2 + (bx + ay)P + b'y^3 + y^2(cx + c') + y(d'x + d') + c'x^2 + e''x + e''' = 0$.

Die semicubischen Parabeln $y^3 - \alpha(x + \sigma)^2 = 0$ osculiren sämmtlich 11-punktig, wie man auch an den Gleichungen der Curven leicht nachweist. Eine Asymptote von höherem Contacte kann es nach Nr. 14. darunter nicht geben. (Durch die Transformation $x = x' + \sigma$ könnte man wie oben das Glied $x'P'$ entfernen.)

Für $a_{-1}$ muss sich jetzt eine quadratische Gleichung ergeben; in der That liefert $x^{\frac{1}{6}}$ dafür

$$9a_{-1}^2 + c = 0.$$

Wenn $c = 0$ ist, so steigt der Contact *aller* semicubiparabolischer Asymptoten um je *einen* Punkt. (Die allgemeine Formel dafür ist nämlich nach (27) $10 - k_r$.) Die Coefficienten von $x^2$, $x^{\frac{1}{6}}$, $x^{\frac{1}{6}}$, wenn in 11)

$$y = a_4 x^{\frac{4}{6}} + a_{-2} x^{-\frac{2}{6}} + \cdots$$

eingeführt wird, geben die Gleichungen

$$(3a_4^2 a_{-2} + \tfrac{1}{2}b)^2 + b'\alpha + c' = \tfrac{1}{4}b^2,$$

$$a_{-3}(3a_4^2 a_{-2} + \tfrac{1}{2}b) = 0,$$

$$9\alpha a_{-3}^2 + 6a_{-4}a_4(3a_4^2 a_{-2} + \tfrac{1}{2}b) + 3aa_4^2 a_{-2} + d' = 0.$$

Die erste zeigt, dass, wenn eine Doppelasymptote 6. Ordnung vorhanden sein soll, noch $b'\alpha + e' = \frac{1}{4}b^2$ sein müsse, damit $a_4$ und $a_{-2}$ gleichwerthig seien. Dann erhalten wir aus der dritten in der That *zwei* Werthe von $a_{-3}$, so lange $2d' - ab$ nicht verschwindet. — Bemerken wir noch nach (24), dass sich jetzt unter den 12-punktig osculirenden Asymptoten *eine* befinden muss, deren Contact um *einen* Punkt höher ist {in der That um $a_{-2} = 0$ zu machen, braucht man nur $b = 0$, was sich, wie schon oben bemerkt, durch eine Transformation $x = x' + \sigma$ erreichen lässt}, so können wir als zweite Curven-Art dieser Gruppe ansetzen:

[12] 12) $P^2 + (ay + b')P + c'y^2 + y(d'x + d'') + e''x + e''' = 0.$

*Dabei darf jedoch $d'$ nicht verschwinden.*

In derselben Art fortschreitend, gelangen wir noch zu folgenden *zwei* Arten:

[10] 13) $\{P + \frac{1}{2}ay\}^2 + b'P + d'y + e''x + e''' = 0,$

[9] 14) $P^2 + b'P + d'y + e''x + e''' = 0.$

*Es muss aber $e'' \gtrless 0$ sein.* Im ersten Falle, wo $a_{-4}$ nicht verschwindet, osculirt die ausgezeichnete Asymptote $P = 0$ 14-; im zweiten, wo erst $a_{-5}$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, 15-punktig.

26 II. a) $k = 3$, $a_2 = 0$, $a_1 \gtrless 0$. $2k = m$. So lange $a_2$ nicht verschwindet, hat man nach Gleichung (12)

$$W_0(x, y) \equiv (y^2 - \alpha x)^3 + \beta y^3 x + \gamma y x^2,$$

und für die Curven mit einer solchen Asymptote die allgemeine Gleichung

(d*) $W_0 + ay^4 + by^3 + y^2(cx + c) + y(dx + d') + ex^2 + e'x + e'' = 0.$

Setzt man hier

(e) $$y = a_3 x^{\frac{3}{6}} + a_1 x^{\frac{1}{6}} + a_{-1} x^{-\frac{1}{6}} + \cdots,$$

so folgt durch Annullirung der Coefficienten von $x^{\frac{15}{6}}$, $x^{\frac{13}{6}}$, $x^2$

$$a_3^2 = \alpha, \quad \beta a_3^2 + \gamma = 0, \quad a_1(3\beta a_3^2 + \gamma) = 0,$$

d. i. $\beta = 0$, $\gamma = 0$ und

$$8a_3^3 a_1^3 + aa_3^4 + ca_3^2 + e = 0.$$

Demnach lautet, wenn statt $-8a_3^3 a_1^3$ $\delta$, statt $a\alpha + c\,a'$, statt $y^2 - \alpha x$ $Q$ geschrieben wird, die Gleichung der allgemeinen Curve dieser Gruppe: ($\delta \gtrless 0$)

[12] 15) $\{Q^3 + \delta x^2\} + Q(ay^2 + a'x) + by^3 + c'y^2 + y(dx + d') + e'x + e'' = 0.$

Die zweifach unendlich vielen Asymptoten

$$W(x-\varrho y-\sigma, y-\tfrac{1}{2}\varrho\alpha)=0, \quad (W\equiv Q^3+\delta x^3)$$

— vergl. Nr. 11. — osculiren sämmtlich 26-punktig (allgemein nach (27) $(25+k_r)$-punktig); keine derselben in mehr Punkten (Nr. 14.).

$a_{-k}$ wird bestimmt aus dem Coefficienten von $x^{\frac{11-k}{6}}$ in 15) nach vollzogener Substitution (e). Soll nun $a_{-1}$ in den Entwickelungen von $y$ aus den Gleichungen der Curve und ihrer Asymptote stimmen, so muss $a\alpha + a' = 0$ sein. Versucht man an 15) die Transformation

$$\text{(f)} \qquad x-\varrho y-\sigma = x', \quad y-\tfrac{1}{2}\varrho\alpha = y',$$

so bleibt der Ausdruck $a\alpha+a'$, wie es sein muss, ungeändert. (Wollte man aus der Gleichung 15) die überschüssigen Constanten $\varrho$, $\sigma$ wegschaffen, so könnte dieses durch der Entfernung Glieder $Qy^2$ und $y^3$ geschehen.) — Ist aber $a\alpha+a'=0$, so steigt der Contact *aller* Asymptoten um je *einen* Punkt. Und es befindet sich darunter *eine ausgezeichnete Asymptote von* 29-punktigem Contacte. Es braucht nur gezeigt zu werden, dass die Werthe von $a_{-2}$ zur Uebereinstimmung gebracht werden können, denn dass dieses durch geeignete Annahme von $\sigma$ bezüglich $a_{-3}$ möglich sei, weiss man ohnehin aus (24). Es wird aber $a_{-2}$ aus dem Coefficienten von $x^{\frac{9}{6}}$ bestimmt, so dass die genannte Forderung durch die Bedingung $b\alpha + d = 0$ erfüllt wird. Durch die Transformation (f) geht diese Gleichung über in

$$b\alpha + d + 2\delta\varrho = 0,$$

welche also zur Bestimmung von $\varrho$ stets geeignet ist. — Endlich bemerke man, dass die Uebereinstimmung der Werthe von $a_{-3}$ die Relation $a = 0$ nach sich ziehe. Demnach erhalten wir für die neue Art die allgemeine Gleichung:

[11] 16) $(Q^3+\delta x^2) + byQ + c'y^2 + d'y + e'x + e'' = 0.$

Dazu fügen wir noch *vier* Arten:

[10] 17) $b = 0$. Contact der Asymptote 30-punktig;

[9] 18) nnd ausserdem $ac'+e'=0$; Contact der Asymptote 32-punktig;

[8] 19) und weiter $c' = 0$; Contact der Asymptote 33-punktig;

[7] 20) und endlich $d' = 0$, 36-punktiger Contact.

27. II. b. $k=3$, $a_2=a_1=0$. Aus den am Eingange der vorigen Nr. erwähnten Gleichungen folgt jetzt nur $\beta\alpha+\gamma=0$ und $e=-\alpha a'$. Führen wir dieses in (d*) ein und setzen daselbst

$$y = a_3x^{\frac{3}{6}} + a_{-1}x^{-\frac{1}{6}} + \cdots,$$

so ergiebt sich sofort als nothwendige Bedingung:

$$\beta = 0, \quad b\alpha + d = 0, \quad a\alpha + a' = 0,$$

ferner zur Bestimmung von $a_{-1}$ die Gleichung:

$$8a_3^3 a_{-1}^3 + c'\alpha + e' = 0.$$

Durch die Transformation (f) kann nach Nr. 14. $a_{-1}$ im Allgemeinen nicht zum Verschwinden gebracht werden, sodass wir unter den 10-punktig osculirenden parabolischen Asymptoten $Q + \delta = 0$ *keine* durch höheren Contact ausgezeichnete bezeichnen können. Die Gleichung dieser Curvenart, im Allgemeinen von der Form

[9] 21) $$Q^3 + aQ^2 + byQ + c'y^2 + d'y + e'x + e'' = 0,$$

kann durch die eben erwähnte Transformation noch so vereinfacht werden, dass $a = 0$ und $d' = 0$ werden. Dabei ist vorausgesetzt, dass $c'\alpha + e'$ *nicht verschwindet.*

Wenn aber $e' = -c'\alpha$, so wird $a_{-1} = 0$. Damit die dreifache Parabel $Q = 0$ Asymptote von der 6. Ordnung bleibe, muss, wie aus weiterer Entwickelung der linken Seite von 21) leicht folgt, auch $b = 0$ sein. Dann erhält, *so lange $d'$ nicht Null ist*, $a_{-2}$ einen von Null verschiedenen Werth. Die Curven, deren allgemeine Gleichung

[7] 22) $$Q^3 + aQ^2 + c'Q + d'y + e'' = 0,$$

haben die (dreifachen) Parabeln $Q + \delta = 0$, jede 11-punktig osculirend, zu Asymptoten. Es befindet sich jedoch darunter *keine* von höherem Contacte. Durch Anwendung der Transformation (f) kann man aus dieser Gleichung noch die Glieder $Q^2$ und $e''$ entfernen.

28. III. $k = 4$, $a_1 = 0$, $2k > m$. Nach Nr. 1. und 3. müssen die Gleichungen der hierhergehörigen Curven jedenfalls von der Form sein

$$(y^3 + \alpha x)^2 + ay^4 + by^3 + cy^2 + y(dx + d') + ex + e' = 0,$$

worin die mit den Coefficienten $a$, $b \cdots$ versehenen Glieder $y^{6-r}x^s$ durch die Bedingung gefunden wurden $s \leq r - g_{r-1} - 2$. Setzt man dann versuchsweise

$$y = a_2 x^{\frac{2}{6}} + a_{-1} x^{-\frac{1}{6}} + \cdots,$$

so erhält man die Bedingung $a\alpha + d = 0$ und ferner für $a_{-1}$ die quadratische Gleichung

$$9a_2^4 a_{-1}^2 + b\alpha + e = 0.$$

Somit gelangt man zur Curve (wenn anstatt $y^3 - \alpha x$ $R$ geschrieben wird)

[9] 23) $$R^2 + ayR + by^3 + cy^2 + d'y + ex + e' = 0.$$

Die Asymptoten sind zweifache cubische Parabeln, deren jede, einfach gerechnet, nach (27) in 15 Punkten osculirt. Nach Nr. 14. hat keine Curve dieser zweifach unendlichen Schaar

$$y^3 - \alpha(x - \varrho y - \sigma) = 0$$

eine höhere als die genannte Berührung. — Durch Anwendung der Transformation

(g) $$x = x' + \varrho y + \sigma$$

könnte man aus 23) noch die Glieder $yR$ und $y^3$ (oder $x'$) entfernen.

Für $b\alpha + e = 0$ würde $a_{-1} = 0$; die Existenz einer Asymptote 6. Ordnung fordert aber noch weiter $a^2 = 4c$. Dann folgt $6a_2a_{-2} + a = 0$, so dass mit $a = 0$ auch $a_{-2} = 0$. Dieses lässt sich aber an der Curvengleichung durch die Transformation (g) erreichen. Demnach finden wir die Art

[7] 24) $$R^2 + bR + d'y + e' = 0,$$

aus welcher Gleichung man durch geeignete Annahme von $\sigma$ noch das Glied mit $R$ wegschaffen kann. Die Curve hat einfach unendlich viele cubiparabolische Asymptoten $R + \delta = 0$ von 17-punktigem Contacte $\{$die Formel (27) giebt jetzt $2(14 + k_r)\}$, aber keine von höherem. Die Existenz einer solchen würde die Bedingung $a_{-3} = 0$, d. i. $d' = 0$ nach sich ziehen, womit 25) reducibel würde.

29. *Schlussbemerkung über die hier behandelten Curven 6. Ordnung.* In den Fällen I. a) und II. a) ist die Wahl der typischen Asymptoten nicht völlig frei von Willkürlichkeit. Betrachten wir z. B. die Curven der erstgenannten Gruppe (Nr. 24.). Wir entnahmen aus der nothwendigen Bedingungsgleichung (d) den Werth von $c$ und führten denselben in die linke Seite von (a) ein. Lösen wir jedoch dieselbe nach $b$ auf, so erhalten wir eine Gleichung, welche sich von 1) dadurch unterscheidet, dass am Anfange steht

$$P^2 + \frac{\beta}{\alpha} y^3 x \equiv \mathfrak{A}_1(x, y).$$

Als typische Asymptoten erscheinen somit nun die Curven $\mathfrak{A}_1(x - \sigma, y) = 0$, welche von den a. a. O. gebrauchten $\mathfrak{A}(x - \sigma, y) = 0$ *wesentlich verschieden* sind. Alles übrige bleibt offenbar ganz gleich. Die Form

$$\mathfrak{A}(x, y) \equiv P^2 + \beta x^3$$

hat nur den Vorzug einer gewissen *algebraischen* Einfachheit. — Genau das Nämliche gilt auch im Falle II. a), wo an Stelle der in Nr. 26. gebrauchten typischen Asymptoten auch die aus den Gleichungen

$$Q^3 + \frac{\delta}{\alpha} y^2 x = 0 \text{ oder } Q^3 + \frac{\delta}{\alpha^2} y^4 = 0$$

abgeleiteten Curven treten können.

# Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen.

(Zweite Abhandlung.)

Von J. Lüroth in Karlsruhe.

In einer ersten Abhandlung obigen Titels, welche im 8. Bande dieser Annalen Seite 145 erschienen ist, gab ich eine Darstellung der von v. Staudt vorgeschlagenen Repräsentation des Imaginären in der Geometrie und eine Erweiterung der von demselben Geometer erfundenen Rechnung mit Würfen. Die vorliegende Arbeit behandelt diejenige Darstellung des Imaginären in der Geometrie, welche Herr Klein in den Göttinger Nachrichten 1872 Seite 373 gegeben hat, und die bis jetzt, soviel mir bekannt, noch nicht in rein geometrischer Weise durchgeführt ist. Sie beruht auf einer Verallgemeinerung der Involution, die verschieden ist von derjenigen, welche Jonquières*) angegeben hat. Um den passenden Namen *Involution* nicht entbehren zu müssen, bezeichne ich die in vorliegender Arbeit benutzte Verallgemeinerung als *cyclische* Involution, weil die darin auftretenden Punktgruppen solche sind, die Clebsch (Borchardt's Journal Bd. 68, S. 167) cyclisch-projectivisch genannt hat. Die Theorie dieser Punktgruppen bildet den ersten Theil des Folgenden, während dann der zweite die Anwendung auf die Darstellung des Imaginären in der Geometrie liefert. In vielen Beziehungen konnte ich mich dabei auf meine frühere Arbeit berufen. Nur in einem Punkte war eine wesentliche Abweichung nöthig. Bei dem Beweise des Satzes nämlich, dass zwei Punktepaare durch ein Paar reeller oder imaginärer Punkte harmonisch getrennt werden (Mathem. Annalen Bd. VIII, S. 175, Nr. 39.) fehlt der Satz, dass nur *ein* solches Punktepaar existirt, oder ein anderer, der ihn im Zusammenhange mit den übrigen vertreten könnte. Um diese Lücke zu umgehen, ist hier ein anderer Weg eingeschlagen worden, der zugleich andeuten soll, wie man den Fehler in der ersten Arbeit verbessern kann.

## § 1.

## Cyclische Involutionen.

1. Wenn zwei aufeinander projectivisch bezogene Punktreihen in dieselbe Gerade fallen, so können sie noch verschiedene Lagen gegen

*) Annali di matematica. Tom. 2. 1859.

einander haben. Von diesen ist eine, die *involutorische*, bisher besonders betrachtet, bei welcher zwei Punkte in beiden Reihen sich abwechselnd entsprechen, so dass dem Punkte $a_1$ der ersten der Punkt $a_2$ der zweiten und dem $a_2$ jener der $a_1$ dieser zugeordnet ist. Möglicherweise können aber die Punktreihen auch so liegen, dass dem Punkte $a_1$ der ersten der Punkt $a_2$ der zweiten, dem $a_2$ der ersten der $a_3$ der zweiten, und dem $a_3$ der ersten schliesslich wieder der $a_1$ der zweiten Reihe entspricht. Oder verallgemeinert: die beiden Reihen können so liegen, dass dem Punkte $a_1$ der ersten Reihe der $a_2$ der zweiten, dem $a_2$ der ersten der $a_3$ der zweiten u. s. w. entspricht, bis endlich einem Punkte $a_n$ der ersten Reihe wieder der $a_1$ der zweiten entspricht. Ist dies der Fall, und es soll bald bewiesen werden, dass es möglich ist, so hat man eine Gruppe von $n$ Punkten $a_1 a_2 \cdots a_n$ derart, dass

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \barwedge a_2 a_3 a_4 \cdots a_1;$$

und dann wollen wir sagen: *Die Punkte $a_1 a_2 \cdots a_n$ bilden eine cyclisch-projectivische Gruppe (abgekürzt: cycl.-proj. Gruppe)*, indem wir durch die Reihenfolge der Punkte in der Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ zugleich andeuten, dass man zwei in der Geraden vereinigt liegende Punktreihen so projectivisch beziehen kann, dass jedem Punkte der Gruppe der ihm folgende und dem letzten der erste entspricht; so dass die Aussage: die Punkte $a_1 a_2 \cdots a_n$ bilden eine cycl.-proj. Gruppe, identisch ist mit der, dass:

$$a_1 a_2 \cdots a_n \barwedge a_2 a_3 \cdots a_1$$

ist*).

2. Wir wollen nun in einigen speciellen Fällen zeigen, wie man solche cycl.-proj. Gruppen finden kann.

Soll die Gruppe aus nur zwei Punkten bestehen, so kann man noch einem dieser Punkte einen beliebigen zuordnen, weil die projectivische Beziehung erst dadurch bestimmt ist, dass zu 3 Punkten die entsprechenden gegeben sind.

Aus demselben Grunde bilden drei Punkte stets eine cycl.-proj. Gruppe.

Soll aber die Gruppe vier oder mehr Punkte enthalten, so können diese nicht mehr willkührlich gewählt werden.

Bei vier Punkten muss sein

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \barwedge a_2 a_3 a_4 a_1,$$

da dies aber auch $\barwedge a_1 a_4 a_3 a_2$, so ist $a_1 a_3$ harmonisch getrennt durch

---

*) Nach einer mündlichen Mittheilung von Herrn Prof. Schröter in Breslau hat Steiner darüber schon Untersuchungen angestellt. Vergl. Tageblatt der Dresdener Naturforschervers. Math.-Astr. Section, Sitzung vom 21. Sept.; und Steiner's Vorlesungen II. Theil, Seite 81, Nr. 12.

$a_2 a_4$. Sind also drei Punkte $a_1 a_2 a_3$ gegeben, so ist der vierte eindeutig bestimmt und weil die vier Punkte $a_1 a_2 a_3 a_4$ dann einen harmonischen Wurf bilden, liegen sie in dieser Reihenfolge auf der Geraden.

Die Bedingung, die bei fünf Punkten erfüllt sein muss,

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \barwedge a_2 a_3 a_4 a_5 a_1,$$

zerfällt in die beiden

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \barwedge a_2 a_3 a_4 a_5 \barwedge a_5 a_4 a_3 a_2$$
$$a_1 a_2 a_3 a_5 \barwedge a_2 a_3 a_4 a_1 \barwedge a_3 a_2 a_1 a_4,$$

von welchen die erste zeigt, dass $a_1 a_5$ und $a_2 a_4$ Paare einer Involution sind, von welcher $a_3$ ein Ordnungselement ist, während die zweite zeigt, dass $a_1 a_3$ und $a_4 a_5$ Paare einer Involution sind mit dem Ordnungselement $a_2$. Die Construction von $a_4 a_5$ aus $a_1 a_2 a_3$ wird am einfachsten gefunden, wenn man das Rechnen mit Würfen anwendet.

Lässt man nämlich $a_1 a_2 a_3$ resp. die Würfe 0, 1, $\infty$ darstellen und setzt die beiden $a_1 a_2 a_3 a_4 = x$ und $a_1 a_2 a_3 a_5 = y$, so ergeben die von v. Staudt aufgestellten Rechnungsregeln (siehe Mathem. Annalen Bd. VIII, S. 188 ff.), dass vermöge der obigen Involutionen die Gleichungen bestehen müssen

$$xy = 1, \quad 1 + x = y.$$

Setzt man $-x = x' = a_1 a_2 a_3 b_4$, so muss sein

$$x' + y = 1, \quad x'y = -1.$$

Um hiernach zu construiren, nimmt man am besten an, die Punkte seien durch Projection von der Geraden auf einen Kegelschnitt übertragen. Sei $a_2'$ der Punkt, in welchem der Kegelschnitt getroffen wird von der Linie, die $a_2$ verbindet mit dem Schnittpunkte $c$ der Tangenten in $a_1$ und $a_3$. Die zweite Gleichung verlangt dann, dass die Linie $b_4 a_5$ durch den Punkt $d$ geht, in dem $a_1 a_3$ und $a_2 a_2'$ sich schneiden. Nach der ersten muss aber dieselbe Linie durch den Schnittpunkt $e$ der Linie $a_1 a_2$ mit der Tangente in $a_3$ gehen. Folglich liefert die Linie $de$ in ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte die beiden Punkte $b_4$ und $a_5$. Man kann nach Belieben den einen für $a_5$ und den andern für $b_4$ nehmen. Aus $b_4$ findet man $a_4$ dadurch, dass man den Punkt $c$ mit $b_4$ verbindet und mit der Verbindungslinie den Kegelschnitt schneidet. Weil $xy = 1$ sein soll, müssen die beiden Würfe $x$ und $y$ entweder positiv oder negativ sein; im ersten Falle folgt aus $1 + x = y$, dass $y > 1$, im zweiten, dass es $> x$ ist. Daher ist die Reihenfolge der Punkte auf dem Kegelschnitte, oder der Geraden entweder die: $a_1 a_4 a_2 a_5 a_3$ oder die $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$. Und dies zeigt, dass bei einer cycl.-proj. Gruppe die Reihenfolge, in welcher die Punkte auf der Geraden liegen, nicht übereinzustimmen braucht mit der Reihenfolge, in welcher sie in der Gruppenbezeichnung stehen; denn in obigem Beispiel war die Gruppe

die $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ und nur im zweiten Falle war dies auch die Reihenfolge der Punkte auf der Geraden.

3. Für das Folgende ist der Satz wichtig, dass *eine cyclisch-projectivische Gruppe von n Punkten* $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$, *wenn drei Punkte* $a_1 a_2 a_3$ *gegeben sind, vollständig und eindeutig bestimmt ist durch die beiden Bedingungen* 1) *dass* $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \barwedge a_2 a_3 a_4 \cdots a_1$ *und* 2) *dass die Punkte* $a_4 a_5 \cdots a_n$, *in dieser Reihenfolge auf* $a_3$ *folgend, in dem Stücke* $a_3 a_1$ *der Geraden liegen sollen.* Hier, wie im Folgenden stets, ist unter dem Geradenstück $ab$ dasjenige, von den beiden Punkten $a\,b$ begrenzte, Stück verstanden, welches den Punkt $a_2$ nicht enthält. Als Vorbereitung zum Beweise des vorstehenden Satzes leiten wir zuerst einen anderen ab.

Ausgehend von den Punkten $a_1 a_2 a_3$ und einem vierten $x_4$, construiren wir andere Punkte $x_5 x_6 \cdots$, so dass

$$a_1 a_2 a_3 x_4 x_5 x_6 \cdots \barwedge a_2 a_3 x_4 x_5 x_6 x_7 \cdots.$$

*Bewegt sich dann* $x_4$, *so bewegen sich* $x_5 x_6 x_7 \cdots$ *in derselben Richtung wie* $x_4$, solange alle diese Punkte im Stücke $a_1 a_3$ gelegen sind. Für welche Lagen von $x_4$ dies stattfindet, wird bald untersucht werden (Nr. 4.).

Sei nun, um dies zu beweisen, $x_4'$ eine zweite Lage des Punktes $x_4$ und $x_5' x_6' \cdots$ bestimmt aus der Beziehung

$$a_1 a_2 a_3 x_4' x_5' x_6' \cdots \barwedge a_2 a_3 x_4' x_5' x_6' x_7' \cdots,$$

und dabei $x_4'$ so gewählt, dass auch die Punkte $x_4' x_5' x_6' \cdots$ alle dem Stücke $a_1 a_3$ angehören. Bestimmt man nun $\xi_5$, so dass $a_1 a_2 a_3 x_4' \barwedge a_2 a_3 x_4 \xi_5$, so ist $a_1 a_2 a_3 x_4 x_4' \barwedge a_2 a_3 x_4 x_5 \xi_5$. Ist $x_4'$ so gegen $x_4$ verschoben, dass die Punkte auf der linken Seite der letzten Beziehung eine Folge bilden, d. h. ist $x_4'$ gegen $x_4$ im Sinne von $a_3$ nach $a_1$ verschoben, so bilden auch die Punkte rechts eine Folge, so dass $\xi_5$ gegen $x_5$ im Sinne von $a_2 a_3 x_4$, also auch im Sinne von $a_3$ gegen $a_1$, d. h. in demselben Sinne verschoben ist, wie $x_4'$ gegen $x_4$. Aus den Beziehungen

$$a_2 a_3 x_4 \xi_5 \barwedge a_1 a_2 a_3 x_4' \barwedge a_2 a_3 x_4' x_5' \barwedge a_3 a_2 x_5' x_4'$$

folgt aber, dass $a_2 a_3 \cdot x_4 x_5' \cdot \xi_5 x_4'$ eine Involution bilden und also

$$a_2 a_3 x_4 x_4' \barwedge a_3 a_2 x_5' \xi_5 \barwedge a_2 a_3 \xi_5 x_5'$$

ist. Weil links eine Folge steht, steht auch rechts eine, folglich ist $x_5'$ gegen $\xi_5$ in demselben Sinne verschoben wie $x_4'$ gegen $x_4$. $\xi_5$ ist aber gegen $x_5$, wie oben bewiesen, ebenso verschoben, daher ist auch $x_5'$ gegen $x_5$ in demselben Sinne verschoben wie $x_4'$ gegen $x_4$.

Nachdem dies bewiesen ist, bestimme man $\xi_6$ aus der Beziehung $a_1 a_2 a_3 x_5' \barwedge a_2 a_3 x_4 \xi_6$. Dann ist

$$a_1 a_2 a_3 x_5 x_5' \barwedge a_2 a_3 x_4 x_6 \xi_6.$$

Beiderseits stehen nach dem zuletzt Bewiesenen wieder Folgen; daher sind die beiden Richtungen $x_5 x_5'$ und $x_6 \xi_6$ dieselben. Es ist aber

$$a_2 a_3 x_4 \xi_6 \curlywedge a_1 a_2 a_3 x_5' \curlywedge a_2 a_3 x_4' x_6'.$$

Daraus folgt ähnlich wie vorhin

$$a_2 a_3 x_4 x_4' \curlywedge a_2 a_3 \xi_6 x_6',$$

so dass auch $x_6'$ gegen $\xi_6$ in demselben Sinne verschoben ist, wie $x_4'$ gegen $x_4$. Weil aber die beiden Richtungen $x_6 \xi_6$ und $\xi_6 x_6'$ mit $x_4 x_4'$ übereinstimmen, gilt dies auch von der $x_6 x_6'$.

Dass man auf diese Art weitergehend den oben angeführten allgemeinen Satz beweisen kann, ist klar.

4. Indem wir wieder $x_4$ in dem Stücke $a_3 a_1$ annehmen, bestimmen wir $x_5$ durch

$$a_1 a_2 a_3 x_4 \curlywedge a_2 a_3 x_4 x_5.$$

Wir wissen dann, dass $x_4$ und $x_5$ sich in derselben Richtung auf $a_3 a_1$ bewegen und wollen jetzt beweisen, dass $x_5$ auf jeden Punkt $a$ von $a_1 a_3$ fallen kann. Es sei ein Hülfspunkt $y$ bestimmt durch

$$a_1 a_2 a_3 y \curlywedge a_2 a_3 x_4 a \curlywedge a_3 a_2 a x_4.$$

Bewegt sich dann $x_4$ durch das Stück $a_3 a$ in der Richtung von $a_3$ nach $a$, so bewegt sich $y$ durch das entsprechende Stück $a_1 a_3$ in der Richtung von $a_1$ nach $a_3$, also in umgekehrter Richtung wie $x_4$. Soll nun $x_5$ nach $a$ fallen, so muss $a_1 a_2 a_3 x_4 \curlywedge a_2 a_3 x_4 a \curlywedge a_1 a_2 a_3 y$ sein, also der Punkt $y$ mit $x_4$ zusammenfallen. Da die beiden Punkte auf der Strecke $a_3 a_1$, der eine von $a_1$ nach $a_3$, der andere in entgegengesetzter Richtung von $a_3$ nach $a$ läuft, so fallen beide einmal, aber auch nur einmal, zusammen in einen Punkt $\alpha$, für den $a_1 a_2 a_3 \alpha \curlywedge a_2 a_3 \alpha a$ ist. Folglich kann in der That $x_5$ auf jeden Punkt des Stückes $a_1 a_3$ fallen. $\alpha$ und $a$ bewegen sich in gleicher Richtung, fällt $a$ nach $a_1$, so falle $\alpha$ nach $a_4'$. Dann ist

$$a_1 a_2 a_3 a_4' \curlywedge a_2 a_3 a_4' a_1$$

und es folgt, dass, wenn $x_4$ die Strecke $a_3 a_4'$ durchläuft, $x_5$ die ganze Strecke $a_3 a_1$ durchlaufen muss und dabei jeden Punkt nur einmal trifft. Nun setze man

$$a_1 a_2 a_3 x_4 x_5 \curlywedge a_2 a_3 x_4 x_5 x_6$$

und lasse $x_4$ sich zwischen $a_3$ und $a_4'$ bewegen. Dann soll bewiesen werden, dass $x_6$ auf jeden Punkt von $a_3 a_1$ fallen kann. Soll es mit einem Punkte $a$ dieser Strecke zusammenfallen, so muss sein

$$a_1 a_2 a_3 x_5 \curlywedge a_2 a_3 x_4 a.$$

Bestimmt man also wie vorhin den Punkt $y$ zu $x_4$ durch $a_2 a_3 x_4 a \curlywedge a_1 a_1 a_3 y$, so müssen $y$ und $x_5$ identisch sein. Lässt man jetzt $x_4$ sich von $a_3$ nach $a_4'$ bewegen, so geht $x_5$ von $a_3$ nach $a_1$ und $y$ von $a_1$ aus in der Richtung gegen $a_3$. Da $x_5$ dabei jeden Punkt der Strecke

einmal und nur einmal berührt, so müssen die beiden Punkte $x_5$ und $y$ einmal zusammenfallen, aber werden auch nur einmal zusammenfallen. Tritt dies im Punkte $\alpha'$ ein und ist $\beta$ die zugehörige Lage von $x_4$, so ist

$$a_1 a_2 a_3 \beta \alpha' \curlywedge a_2 a_3 \beta \alpha' a.$$

Folglich kann $x_6$ auf jeden Punkt der Strecke $a_1 a_3$, also auch auf den $a_1$ fallen. Dies möge eintreten für die Lage $b_4$ von $x_4$ und $b_5$ von $x_5$, so ist

$$a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 \curlywedge a_2 a_3 b_4 b_5 a_1$$

und aus dem in der vor. Nummer bewiesenen Satze folgt, dass $x_4$ nur zwischen $a_3$ und $b_4$ sich zu bewegen braucht, damit $x_6$ zu jedem Punkte von $a_1 a_3$ kommen kann.

Ist dies bewiesen, so kann man das Entsprechende beweisen für den Punkt $x_7$, der aus der Bedingung

$$a_1 a_2 a_3 x_4 x_5 x_6 \curlywedge a_2 a_3 x_4 x_5 x_6 x_7$$

bestimmt ist. Soll er auf einen Punkt $a$ fallen, so muss

$$a_1 a_2 a_3 x_6 \curlywedge a_2 a_3 x_4 a$$

sein. Setzt man also $a_2 a_3 x_4 a \curlywedge a_1 a_2 a_3 y$, so muss $y$ mit $x_6$ coincidiren. Bewegt sich $x_4$ zwischen $a_3$ und $b_4$, so durchläuft nach dem schon Bewiesenen $x_6$ die Strecke $a_3 a_1$ einmal, während $y$ von $a_1$ aus gegen $a_3$ geht. Folglich müssen sich beide Punkte einmal begegnen. Geschieht dies im Punkte $\alpha''$ und entspricht diesem die Lage $\gamma$ von $x_4$ und $\beta'$ von $x_5$, so ist

$$a_1 a_2 a_3 \gamma \beta' \alpha'' \curlywedge a_2 a_3 \gamma \beta' \alpha'' a.$$

Liegt $a$ in $a_1$, so möge $\gamma$ nach $c_4$, $\beta'$ nach $c_5$, $\alpha''$ nach $c_6$ fallen; dann ist

$$a_1 a_2 a_3 c_4 c_5 c_6 \curlywedge a_2 a_3 c_4 c_5 c_6 a_1,$$

und wenn $x_4$ zwischen $a_3$ und $c_4$ liegt, durchläuft $x_7$ die ganze Strecke $a_3 a_1$ einmal.

Indem man so weiter geht, kann man den Satz beweisen: *Wenn man zu einem Punkt $x_4$ die Punkte $x_5 x_6 \cdots x_{n+1}$ so bestimmt, dass die Beziehung*

$$a_1 a_2 a_3 x_4 x_5 \cdots x_n \curlywedge a_2 a_3 x_4 x_5 \cdots x_{n+1}$$

*besteht, so giebt es eine Strecke $a_3 a_4$ derart, dass, wenn $x_4$ diese Strecke durchläuft, $x_{n+1}$ die ganze Strecke $a_3 a_1$ einmal und ohne Unterbrechung durchläuft und dass für den Punkt $a_4$ selbst und die aus ihm für $x_5 x_6 \cdots$ folgenden $a_5 a_6 \cdots a_n$ die Beziehung stattfindet*

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n \curlywedge a_2 a_3 a_4 \cdots a_1,$$

*wobei noch die sämmtlichen Punkte $a_3 a_4 \cdots a_n a_1$ in dieser Reihenfolge in der Strecke $a_3 a_1$ liegen.*

Hiermit ist aber der oben im Beginn von Nr. 3. angekündigte Satz bewiesen.

Eine Gruppe von der angenommenen Beschaffenheit, dass ihre Punkte eine Folge auf der Geraden bilden, wenn man sie nach der Anordnung berührt, die sie in der Bezeichnung der Gruppe haben, wollen wir eine ordentliche Gruppe nennen. Man kann den eben bewiesenen Satz dann so aussprechen: *Wenn drei Punkte gegeben sind, die in einer ordentlichen cycl.-proj. Gruppe von n Punkten aufeinander folgen sollen, so ist die Gruppe vollständig und eindeutig bestimmt.* Und daraus folgt: *wenn zwei ordentliche Gruppen von je n Punkten drei aufeinander folgende Punkte gemein haben, so stimmen sie in allen Punkten überein.*

Die gefundenen Resultate übertragen sich natürlich durch Projection auf Ebenenbüschel und Strahlenbüschel, sowie auf cycl.-proj. Gruppen auf einem Kegelschnitt, indem ja durch Projection einer cycl.-proj. Gruppe offenbar wieder eine solche entsteht. Insbesondere gilt der Satz:

*Wenn drei aufeinander folgende Ebenen (Strahlen) einer ordentlichen cycl.-proj. Gruppe von n Ebenen (Strahlen) durch drei aufeinander folgende Punkte einer ordentlichen cycl.-proj. Gruppe von n Punkten gehen, so liegen auch die übrigen Punkte der letzten Gruppe je auf einer Ebene (einem Strahle) der ersten.*

5. Wenn ein Punkt die eine von zwei vereinigt gelegenen projectivisch bezogenen Punktreihen durchläuft, so bewegt sich der entsprechende Punkt entweder in demselben oder in entgegengesetztem Sinne, und beide Reihen haben 0, 1 oder 2 Punkte entsprechend gemein. Sind $a_1 a_2 \cdots a_n$ Punkte einer cycl.-proj. Gruppe, so findet bei der projectivischen Beziehung, bei welcher

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \barwedge a_2 a_3 a_4 \cdots a_1$$

ist, der erste Fall statt. Gesetzt die beiden Punktreihen hätten den Punkt $a$ entsprechend gemein und die beiden auf der Geraden ihm zunächst benachbarten Punkte der Gruppe seien $a_p$ und $a_q$, so entspricht das Stück $a_p a a_q$ der einen Reihe dem $a_{p+1} a a_{q+1}$ der zweiten, so dass beide einen Punkt $a$ und seine Umgebung gemein haben. Da einem Punkte der Gruppe wieder ein Punkt der Gruppe entspricht und im Innern des ersten Stückes $a_p a a_q$ keine solchen gelegen sind, so kann auch das zweite Stück $a_{p+1} a a_{q+1}$ in seinem Innern keine Punkte jener Gruppe enthalten; desshalb können beide Stücke nur dann theilweise sich decken, wenn die Grenzpunkte beider zusammenfallen. $a_p$ und $a_{p+1}$ sowie $a_q$ und $a_{q+1}$ können nicht zusammenfallen, daher müssen $a_p$ mit $a_{q+1}$ und $a_q$ mit $a_{p+1}$ zusammenfallen. Da hier die Zahlen $> n$ durch ihre Reste zu ersetzen sind, so verlangt dies, dass

$$\begin{aligned} p+1 &= q+\varepsilon n, \\ q+1 &= p+\varepsilon' n, \end{aligned} \qquad \varepsilon,\ \varepsilon' = 0 \text{ oder } 1,$$

woraus $(\varepsilon+\varepsilon')n = 2$. Die möglichen Lösungen sind

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= 0, \quad \varepsilon' = 1 \\ \varepsilon &= 1, \quad \varepsilon' = 0 \end{aligned}\right\} \ n = 2,$$

$$\varepsilon = 1, \quad \varepsilon' = 1, \quad n = 1.$$

Die beiden ersten Fälle liefern Gruppen von 2 Punkten, der dritte gar keine Gruppe; daher sind beide Annahmen ausgeschlossen und ein Punkt $a$ kann nicht existiren. *Also haben die beiden Reihen keinen Punkt entsprechend gemein und folglich bewegen sich zwei Punkte, welche beide Reihen so durchlaufen, dass sie sich stets entsprechen, in derselben Richtung.*

6. Ist $a_1 a_2 \cdots a_n$ eine cycl.-proj. Gruppe, so ist

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \barwedge a_2 a_3 a_4 \cdots a_1;$$

Die Reihe rechter Hand ist aber wieder $\barwedge a_3 a_4 \cdots a_2$ und folglich auch

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \barwedge a_3 a_4 a_5 \cdots a_2.$$

Die erste Beziehung lehrt aber, dass $a_3 a_4 a_5 \cdots a_2 \barwedge a_4 a_5 a_6 \cdots a_3$; daher ist ferner

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \barwedge a_4 a_5 a_6 \cdots a_3$$

u. s. w., d. h. *jede Reihe ist projectivisch zu jeder andern, welche entsteht dadurch, dass man sämmtliche Indices um dieselbe Zahl erhöht (und für $n+1$, $n+2$, $\cdots$ resp. $1, 2 \cdots$ setzt).* Wenn man nun unter $b_1$ einen Punkt versteht, der der eben benützten Gruppe nicht angehört, so kann man aus ihm andere $b_2$, $b_3$, $\cdots$ $b_n$ ableiten durch die Beziehung

$$a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \barwedge a_2 a_3 \cdots a_1 b_2 b_3 \cdots b_n.$$

Aus $b_n$ leite man dann ab $b_{n+1}$ durch

$$a_1 a_2 \cdots a_n b_n \barwedge a_2 a_3 \cdots a_1 b_{n+1},$$

so ist $b_{n+1}$ mit $b_1$ identisch. Denn in Folge der angenommenen Beziehungen ist $a_1 a_2 a_3 b_1 \barwedge a_2 a_3 a_4 b_2$, dies selbst aber wieder $\barwedge a_3 a_4 a_5 b_3 \cdots$ u. s. w., bis endlich $\barwedge a_n a_1 a_2 b_n$ und $\barwedge a_1 a_2 a_3 b_{n+1}$, woraus $b_{n+1} = b_1$ folgt.

*Diese Punkte $b$ sind alle verschieden von den Punkten $a$ der ursprünglichen Gruppe.* Denn wäre z. B. $b_p = a_q$, so wäre nach der Definition der Punkte $b$

$$a_1 a_2 \cdots a_n b_{p-1} \barwedge a_2 a_3 \cdots a_1 a_q \barwedge a_1 a_2 \cdots a_n a_{q-1},$$

so dass $b_{p-1}$ und $a_{q-1}$ u. s. w. identisch sein und schliesslich $b_1 = a_{q-p+1}$ sein müsste gegen unsere Annahme.

Ferner sind *die Punkte $b$ alle von einander verschieden.* Denn es sei $b_p = b_q$, $q > p$, so ist

$$a_1 a_2 \cdots a_n b_{q-1} \curlywedge a_2 a_3 \cdots a_1 b_p \curlywedge a_1 a_2 \cdots a_n b_{p-1},$$

$b_{p-1}$ also mit $b_{q-1}$ identisch u. s. w., schliesslich $b_1$ identisch mit $b_{q-p+1} = b_{k+1}$, also mit einem andern der Punkte $b$. Dann ist aber

$$a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_k \curlywedge a_2 a_3 \cdots a_1 b_2 b_3 \cdots b_1.$$

Die rechte Seite ist aber wieder $\curlywedge a_3 a_4 \cdots a_2 b_3 b_4 \cdots b_2$, $\curlywedge a_4 a_5 \cdots a_3 b_4 b_5 \cdots b_3$ u. s. w., schliesslich $\curlywedge a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_k b_1 b_2 \cdots b_k$. Für $k > 2$ haben also die beiden projectivisch bezogenen Punktreihen $a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_k$ und $a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_k b_1 b_2 \cdots b_k$ die $k$ Punkte $b_1 b_2 \cdots b_k$ entsprechend gemein und folglich muss sein $a_{k+1} = a_1$ u. s. w. gegen unsere Annahme, dass die ursprüngliche Gruppe aus $n$ Punkten bestehe. Ist aber $k = 2$, so ist $a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \curlywedge a_2 a_3 \cdots a_1 b_2 b_1$, was nicht möglich ist, weil, wenn die beiden Punkte $b_1 b_2$ sich abwechselnd entsprechen, auch die übrigen sich abwechselnd entsprechen müssen, also dem $a_1$ nicht $a_2$ und dem $a_2$ der Punkt $a_3$ entsprechen kann; ausser wenn $n = 2$ ist, welchen Fall wir stets ausschliessen. Es bilden somit die Punkte $b_1 b_2 \cdots b_n$ wieder eine cyclisch-projectivische Gruppe von $n$ Punkten und diese ist durch die Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ und den einen ihrer Punkte $b_1$ vollständig bestimmt. Da $a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_n \curlywedge a_2 a_3 \cdots a_1 b_2 b_3 \cdots b_1$ und diese letzte Reihe wieder $\curlywedge a_3 a_4 \cdots a_2 b_3 b_4 \cdots b_2$ und ferner $\curlywedge a_4 a_5 \cdots a_3 b_4 b_5 \cdots b_3$ u. s. w., so ist auch die erste Reihe projectivisch zu jeder andern, die aus ihr entsteht, indem man alle Indices um dieselbe Zahl erhöht.

7. Die Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$, von der wir hier ausgingen, kann man noch in anderer Art als cyclisch-projectivische Gruppe anordnen. Wenn man nämlich, unter $p$ eine beliebige Zahl $< n$ verstanden, die Zahlen $p+1$, $2p+1$, $3p+1$, $\cdots$ $(n-1)p+1$, resp. ihre Reste bei Division durch $n$, der Reihe nach mit $\alpha\ \beta\ \gamma \cdots \nu$ bezeichnet, so ist die Reihe $a_1 a_\alpha a_\beta \cdots a_\nu$ projectivisch zu der Reihe, welche durch Erhöhung der Indices um $p$ entsteht, also zu der Reihe $a_\alpha a_\beta a_\gamma \cdots a_1$. Soll diese Gruppe wieder $n$ Punkte enthalten, so müssen die Zahlen $\alpha\ \beta\ \gamma \cdots \nu$ alle verschieden sein, und dazu ist nothwendig und hinreichend, dass $p$ relative Primzahl zu $n$ ist. Es wird nachher (Nr. 10.) bewiesen, dass dies die einzigen Anordnungen der $n$ Punkte sind, in welchen sie cycl.-proj. Gruppen bilden. Nun werde die Gruppe $b_1 b_2' \cdots b_n'$ bestimmt, welche sich zu $b_1$ aus der Beziehung

$$a_1 a_\alpha a_\beta \cdots a_\nu b_1 b_2' \cdots b_n' \curlywedge a_\alpha a_\beta \cdots a_1 b_2' b_3' \cdots b_1$$

ergiebt. Indem man aber in der Reihe $a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_n$ die Indices um $p$ erhöht, folgt

$$a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_n \curlywedge a_{1+p} a_{2+p} \cdots a_p b_{1+p} b_{2+p} \cdots b_1,$$

oder, indem man sie beiderseits passend umstellt,

$$a_1 a_\alpha a_\beta \cdots a_\nu b_1 b_\alpha b_\beta \cdots b_\nu \barwedge a_\alpha a_\beta a_\gamma \cdots a_1 b_{1+p} b_{\alpha+p} \cdots b_{\nu+p}$$
$$\barwedge a_\alpha a_\beta a_\gamma \cdots a_1 b_\alpha b_\beta b_\gamma \cdots b_1.$$

Daher ist $b_2' = b_\alpha$, $b_3' = b_\beta$, $\cdots b_n' = b_\nu$, so dass man dieselben Punkte wiederfindet, die bei der ersten Anordnung schon gefunden waren. *Es sind also die Punkte $b_1 b_2 \cdots b_n$, abgesehen von ihrer Anordnung, bestimmt durch den Punkt $b_1$ und die Punkte $a_1 a_2 \cdots a_n$ der gegebenen Gruppe, unabhängig davon, wie diese letzteren in cyclisch-projectivische Gruppen zusammengefasst werden.*

Ein weiterer Punkt $c$, der keiner der beiden Gruppen angehört, bestimmt wieder eine cycl.-proj. Gruppe, die von den früheren verschieden ist. Es zerfällt so die Gerade, als Punktreihe betrachtet, in eine unendliche Zahl von cycl.-proj. Gruppen, deren Gesammtheit wir als *cyclische Involution* bezeichnen.

Das Kennzeichen, dass zwei cycl.-proj. Gruppen von je $n$ Punkten $a_1 a_2 \cdots a_n$, $b_1 b_2 \cdots b_n$ derselben cyclischen Involution angehören, ist somit dies: dass sie eine Beziehung wie die

$$a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_n \barwedge a_2 a_3 \cdots a_1 b_2 b_3 \cdots b_1$$

befriedigen.

Die Gruppe $b_1 b_2 \cdots b_n$, welche, wie eben angegeben, vom Punkte $b_1$ aus construirt ist, soll bezeichnet werden als diejenige Gruppe der cyclischen Involution, *welche vom Punkte $b_1$ ausgeht.* Man sieht, dass diejenigen Gruppen, welche von den Punkten $b_2 b_3 \cdots b_n$ der ersten Gruppe ausgehen, sich von dieser nur durch die Anordnung der Punkte in der Gruppe unterscheiden.

8. Wenn $a_1 a_2 \cdots a_n$ eine cycl.-proj. Gruppe ist, so kann man nach Nr. 6. zwei in der Geraden vereinigt gelegene Punktreihen auch so projectivisch auf einander beziehen, dass

$$a_1 a_2 \cdots a_n \barwedge a_k a_{k+1} \cdots a_{k-1}.$$

Auch *dann haben die beiden Reihen keinen Punkt entsprechend gemein.* Gesetzt sie hätten einen Punkt $a$ gemein, so wäre

$$a_1 a_2 \cdots a_n a \barwedge a_k a_{k+1} \cdots a_{k-1} a.$$

In der durch die Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ bestimmten cyclischen Involution sei nun die von $a$ ausgehende Gruppe $a a' a'' \cdots$, so dass

$$a_1 a_2 \cdots a_n a a' \cdots \barwedge a_2 a_3 \cdots a_1 a' a'' \cdots.$$

Dann ist $a_1 a_2 \cdots a_n a \barwedge a_2 a_3 \cdots a_1 a'$ und dies wieder $\barwedge a_3 a_4 \cdots a_2 a''$ u. s. w., endlich auch $\barwedge a_k a_{k+1} \cdots a_{k-1} a^{(k-1)}$. Daher wäre auch

$$a_k a_{k+1} \cdots a_{k-1} a \barwedge a_k a_{k+1} \cdots a_{k-1} a^{(k-1)},$$

oder $a = a^{(k-1)}$, d. h. die von $a$ ausgehende Gruppe bestände nur aus $k - 1$ Punkten, also, da $k$ nicht $> n$ ist, aus weniger als $n$ Punkten,

während in der vorigen Nummer bewiesen wurde, dass sie aus $n$ Punkten bestehen muss.

*Wenn also zwei Punkte sich so bewegen, dass sie in den zu Anfang der Nummer charakterisirten Punktreihen sich stets entsprechen, so müssen sie sich in derselben Richtung bewegen.*

9. Wir haben schon früher (Nr. 2. Ende) darauf hingewiesen, dass die Punkte einer cycl.-proj. Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ nicht in dieser Reihenfolge auf der Geraden zu liegen brauchen. Nehmen wir an, sie lägen in der Reihe $a_1 a_q a_r a_s \cdots$, wo $1\,q\,r\,s \cdots$ eine Permutation von $1\,2\,3 \cdots n$ ist. Nun ist nach Nr. 6. die Reihe projectivisch zu der, welche aus ihr durch Erhöhung aller Indices um $q - 1$ entsteht, also zu der

$$a_q a_{2q-1} a_{r+q-1} \cdots.$$

Da zwei Punkte, welche die beiden Reihen so durchlaufen, dass sie sich stets entsprechend bleiben, sich in gleicher Richtung bewegen müssen, wie eben gezeigt wurde, und weil einem Punkt der Gruppe wieder ein Punkt der Gruppe entspricht, so muss, wenn der eine Punkt von $a_1$ ausgehend nach $a_q a_r a_s \cdots$ gekommen ist, der entsprechende von $a_q$ aus wandernd nach resp. $a_{2q-1} a_{r+q-1} \cdots$ gekommen sein, und diese Punkte müssen nothwendig mit $a_r a_s \cdots$ identisch sein, so dass zwischen den Indices die Gleichungen bestehen

$$2q - 1 = r, \quad r + q - 1 = s \cdots,$$

welche aussagen, dass die Indices $1\,q\,r\,s \cdots$ eine arithmetische Reihe bilden. Andererseits folgt dann, dass

$$a_1 a_q a_r a_s \cdots \barwedge a_q a_r a_s \cdots,$$

und dies zeigt, dass *man zwei in der Geraden vereinigt liegende Punktreihen so projectivisch beziehen kann, dass jedem Punkte der Gruppe, als einem Punkte der ersten Reihe, der in der Geraden auf ihn folgende Punkt als Punkt der zweiten Reihe entspricht, oder dass jede cyclisch-projectivische Gruppe bei anderer Anordnung der Punkte eine ordentliche Gruppe ist.*

In dem einen Falle einer Gruppe von fünf Punkten (Nr. 2.) ist die Gruppe $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, im andern die $a_1 a_4 a_2 a_5 a_3$ eine ordentliche.

Wenn nun auf einer Geraden zwei Gruppen von je $n$ Punkten liegen, $a_1 a_2 \cdots a_n$ und $b_1 b_2 \cdots b_n$, und zwar in den Reihenfolgen $a_p a_q a_r \cdots$ und $b_l b_m b_n \cdots$, und wenn die Punkte $a_p$ und $b_l$, $a_q$ und $b_m$, $a_r$ und $b_n$ identisch sind, so haben die beiden ordentlichen Gruppen $a_p a_q a_r \cdots$, $b_l b_m b_n \cdots$ 3 aufeinander folgende Punkte gemein, fallen also in allen ihren Punkten zusammen, d. h. *wenn zwei cyclisch-projectivische Gruppen von je $n$ Punkten drei auf einander folgende Punkte gemein haben, so stimmen sie in allen Punkten überein.*

Wenn man die vorstehenden Sätze auf andere Elemente als Punkte einer Geraden überträgt, so kann man sagen: *liegen von zwei cyclisch-*

*projectivischen Gruppen von gleich viel Elementen drei aufeinander folgende Elemente der einen in drei aufeinander folgenden Elementen der zweiten, so liegt jedes Element der ersten in einem Element der zweiten.*

Hiermit ergiebt sich nun eine einfache Construction von cycl.-proj. Gruppen, wenn man die Theilung des Kreises als vollzogen annimmt*). Legt man nämlich $n$ Strahlen durch einen Punkt so, dass sie die Ebene in gleiche Winkel theilen, so bilden sie eine cycl.-proj. Strahlengruppe. Denn heissen sie $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$, so ist der Büschel $\alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n \alpha_1$ dem ersten sogar congruent, folglich auch projectivisch. Gehen drei aufeinander folgende Strahlen eines solchen Büschels durch drei aufeinander folgende Punkte einer cycl.-proj. Punktgruppe, so gehen die übrigen Strahlen durch die andern Punkte; so dass man mit einem solchen Büschel jede cycl.-proj. Gruppe von $n$ Punkten auf einer Geraden ausschneiden kann.

10. Mit Hülfe des am Anfang der Nummer 9. bewiesenen Satzes kann man nun auch die Frage erledigen, ob und wie man aus $n$ Punkten einer cycl.-proj. Gruppe noch andere solche Gruppen bilden kann. Bezeichnen wir die Punkte der Gruppe in der Reihenfolge, wie sie auf der Geraden liegen, von $a_1$ ausgehend mit $b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$, so stehen diese Zeichen mit den oben (Nr. 9.) benützten in dem Zusammenhang, dass

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_q, \quad b_3 = a_r, \quad b_4 = a_s \cdots.$$

Da nun die Gruppe war $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$, so zeigt die Zahl $q$ an, an welcher Stelle dieser Gruppe der Punkt $b_2$ steht, $r$ bedeutet dasselbe für $b_3$ u. s. w. Nennen wir diese Zahlen $1\, q\, r\, s \cdots$ die *Stellenzahlen* der Punkte $b_1 b_2 b_3 \cdots$ in der Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$, so können wir den oben bewiesenen Satz so aussprechen: *Wenn die Punkte $b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$ in irgend einer Anordnung eine cyclisch-projectivische Gruppe bilden, so bilden ihre Stellenzahlen eine arithmetische Reihe.*

Bezeichnen wir die constante Differenz der Glieder dieser Reihe mit $\delta$, so ist die Reihe der Stellenzahlen

$$1, \quad 1+\delta, \quad 1+2\delta, \quad 1+3\delta \cdots.$$

Damit diese von einander verschiedene Reste nach $n$ lassen, muss $\delta$ zu $n$ relativ prim sein. Zwei Punkte, $b_k$ und $b_l$, stehen dann in der Gruppe neben einander, wenn ihre Stellenzahlen sich um 1 unterscheiden, also

$$1 + (k-1)\delta + 1 \equiv 1 + (l-1)\delta \pmod{n}$$
$$(l-k)\delta \equiv 1 \pmod{n}$$

ist. Ist $l > k$, so ist $l - k > 0$ aber $< n$; ist aber $l < k$, so denke

*) Klein a. o. a. O.

man sich $l+n$ für $l$ gesetzt, d. h. den Punkt $b_l$ auch bezeichnet mit $b_{l+n}$, so ist $l+n-k$ wieder $>0$ und $<n$. Nach dieser Festsetzung ist $l-k$ stets $>0$, aber $<n$, und daher kann es nur gleich sein der einzigen zwischen denselben Grenzen gelegenen Wurzel $\varepsilon$ der Congruenz

$$\varepsilon\delta \equiv 1 \pmod{n}.$$

Diese Congruenz hat nur eine Wurzel in jenen Grenzen, weil $\delta$ zu $n$ relativ prim ist. Folglich bilden die Indices der $b$ in der Bezeichnung der Gruppe eine arithmetische Reihe. Weil aber, wenn man

$$q-1=r-q=s-r=\cdots$$

mit $d$ bezeichnet,

$$b_1=a_1,\quad b_2=a_{d+1},\quad b_3=a_{2d+1},\quad b_4=a_{3d+1}\cdots$$

ist, so bilden auch die Indices der $a$ eine arithmetische Reihe, wenn die der $b$ eine solche bilden, d. h. also: *bilden die Punkte $a_1a_2a_3\cdots a_n$ eine cyclisch-projectivische Gruppe, so sind alle übrigen Anordnungen, in welchen sie eine solche Gruppe bilden, diejenigen, in welchen die Indices der Punkte eine arithmetische Reihe bilden.*

So z. B. hat man bei 5 Punkten $a_1a_2a_3a_4a_5$ die Anordnungen $a_1a_3a_5a_2a_4$, $a_1a_4a_2a_5a_3$, $a_1a_5a_4a_3a_2$, in welchen die Punkte cyclisch-projectivische Gruppen bilden.

11. Auch die Sätze der letzten Nummern übertragen sich natürlich auf Ebenen- und Strahlbüschel und insbesondere vom letzteren auch auf einen Kegelschnitt, der durch das Centrum des Büschels geht. Wir wenden uns nun zur Betrachtung von cycl.-proj. Punktgruppen, die auf einem Kegelschnitt gelegen sind.

Besteht die Gruppe aus drei Punkten $a_1a_2a_3$, so schneiden, wie bekannt, die Tangenten in den drei Punkten $a_1a_2a_3$ die gegenüberliegenden Linien $a_2a_3$, $a_3a_1$, $a_1a_2$ in Punkten einer Geraden. Diese Gerade wollen wir als *die zu der Gruppe gehörige* bezeichnen. Auch zu einer Gruppe von mehr als drei Punkten gehört eine Gerade. Um dies zu beweisen, bemerken wir, dass nach dem in Nr. 6. gegebenen Satze

$$a_1a_na_{1+p}a_p \barwedge a_{n-p+1}a_{n-p}a_1a_n$$
$$\barwedge a_na_1a_{n-p}a_{n-p+1}$$

ist, weil die Indices rechts in der ersten Beziehung sich von denen links um $n-p$ unterscheiden und $a_{1+n}=a_1$, $a_{2n-p}=a_{n-p}$ ist. Folglich sind $a_1a_n$, $a_pa_{n-p+1}$, $a_{p+1}a_{n-p}$ Paare einer Involution. Für $p=2$ zeigt sich, dass $a_1a_n$, $a_2a_{n-1}$, $a_3a_{n-2}$ einer Involution angehören; $p=3$ lehrt, dass auch $a_1a_{n-3}$ ein Paar derselben Involution ist u. s. w. Daher gehen die Verbindungslinien der Punkte $a_1$ und $a_n$, $a_2$ und $a_{n-1}$, $a_3$ und $a_{n-2}$ u. s. w. alle durch einen Punkt $p_1$, und weiter ist

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \barwedge a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 .$$

Weil aber $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \barwedge a_2 a_3 a_4 \cdots a_1$, so ist auch

$$a_2 a_3 \cdots a_n a_1 \barwedge a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_2 a_1 .$$

Weil hier $a_2$ und $a_n$ sich abwechselnd entsprechen, sind $a_2 a_n$, $a_3 a_{n-1}$, $a_4 a_{n-2}$, $\cdots$ Punktepaare einer Involution und die Verbindungslinien der Punkte dieser Paare schneiden sich in einem Punkte $p_2$. Ebenso sieht man, dass auch

$$a_3 a_4 \cdots a_n a_1 a_2 \barwedge a_n a_{n-1} \cdots a_3 a_2 a_1 ,$$

folglich $a_3 a_n$, $a_4 a_{n-1}$, $a_5 a_{n-2}$, $\cdots$ ebenfalls Paare einer Involution sind, deren Centrum ein Punkt $p_3$ ist. So kann man weiter schliessen und findet: *alle Sehnen zwischen Punkten einer Gruppe gehen durch denselben Punkt, für welche die Summe der Indices der Punkte dieselbe ist.* Den Punkt bezeichnen wir mit $p_s$, wenn $s$ die Summe der Indices ist.

Nun sind die beiden Büschel $a_2(a_1 a_2 \cdots a_n)$ und $a_1(a_2 a_3 \cdots a_1)$ projectivisch und perspectivisch gelegen, also liegen nach der eben eingeführten Bezeichnung die Punkte $p_4 p_5 \cdots p_n p_1 p_2$ auf einer Geraden. Weil andererseits die Büschel $a_3(a_1 a_2 \cdots a_n)$ und $a_2(a_2 a_3 \cdots a_1)$ projectivisch und perspectivisch gelegen sind, so liegen auch die Punkte $p_4 p_6 \cdots p_n p_1 p_2 p_3$ auf einer Geraden, so dass demnach alle $n$ Punkte $p$ auf derselben geraden Linie gelegen sind. Indem man andere und andere Punkte der Gruppe zu Centren der projicirenden Strahlbüschel nimmt, findet man, dass *zu jeder Gruppe eine Linie gehört, auf welcher die Projection der Gruppe von jedem ihrer Punkte aus dieselbe cyclisch-projectivische Gruppe liefert.*

Ist $p$ eine beliebige zu $n$ relative Primzahl $< n$ und bezeichnet man wie oben (Nr. 7.) die Reste der Zahlen

$$1, \quad p+1, \quad 2p+1, \quad 3p+1, \cdots$$

der Reihe nach mit $1\ \alpha\ \beta\ \gamma \cdots$, so ist $a_1 a_\alpha a_\beta a_\gamma \cdots a_\nu$ eine Gruppe, die von der $a_1 a_2 \cdots a_n$ nur der Ordnung der Punkte nach verschieden ist. Nennen wir die Punkte $a_1 a_2' a_3' \cdots a_n'$ und suchen die zu ihr gehörige Linie. Ein Punkt dieser Linie ist nach dem eben Bewiesenen der Schnittpunkt der Linien

$$a_1 a_{l+1}', \quad a_2' a_l', \quad a_3' a_{l-1}' \text{ u. s. w. allgemein } a_{k+1}' a_{l-k+1}',$$

der Punkt $a_k'$ ist aber mit dem $a_{(k-1)p+1}$ identisch, daher sind die genannten Linien die Verbindungslinien der Punkte

$$a_1 a_{lp+1}, \quad a_{p+1} a_{(l-1)p+1}, \quad a_{2p+1} a_{(l-2)p+1}, \cdots a_{kp+1} a_{(l-k)p+1} \cdots .$$

Die Summe der Indices ist hier $= lp+2$, folglich gehen die Linien alle durch den Punkt $p_s$, wenn $s \equiv lp+2 \pmod n$ ist. Die Centren aller Involutionen, welche zu der neuen Gruppe gehören, sind mit

Centren von Involutionen der alten Gruppe identisch und folglich *gehört zu beiden Gruppen dieselbe Linie, oder diese ist nur von den Punkten selbst, nicht aber von ihrer Anordnung in der Gruppe abhängig.*

12. Es sei $b_1$ ein Punkt des Kegelschnitts, der nicht der Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ angehört, und $b_1 b_2 \cdots b_n$ diejenige Gruppe, welche von $b_1$ ausgeht und mit der ersten zu derselben cyclischen Involution gehört. Dann sind die $n$ Büschel

$$\begin{aligned} &a_n(a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_n),\\ &a_{n-1}(a_2 \cdots a_1 b_2 \cdots b_1),\\ &\quad\vdots\\ &a_2(a_{n-1} \cdots a_{n-2} b_{n-1} \cdots b_{n-2}),\\ &a_1(a_n \cdots a_{n-1} b_n \cdots b_{n-1}) \end{aligned}$$

jedes zu jedem andern projectivisch und perspectivisch gelegen. Folglich liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen je zweier dieser Büschel in einer Geraden; diese ist aber die zur Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ gehörige, auf welcher die Punkte $p_1 p_2 \cdots p_n$ gelegen sind. Somit gehen entsprechende Strahlen aller dieser Büschel durch denselben Punkt jener Geraden, z. B. die Strahlen

$$a_n b_1, \quad a_{n-1} b_2, \quad a_{n-2} b_3, \cdots a_2 b_{n-1}, \quad a_1 b_n,$$

und so kann man sagen: von welchem Punkte der ersten Gruppe aus man auch die zweite auf die erwähnte Gerade projiciren mag, stets entsteht dort (von der Ordnung abgesehen) dieselbe Gruppe von $n$ Punkten. Da diese Gruppe in symmetrischer Weise von den beiden ersten abhängt, so folgt also noch, dass zu beiden Gruppen dieselbe Linie gehört, oder allgemeiner, dass *zu allen Gruppen derselben cyclischen Involution auf dem Kegelschnitt dieselbe Gerade gehört, von der man also auch sagen kann, sie gehöre zu der cyclischen Involution.*

Projicirt man die Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ von einem beliebigen Punkte $b$ des Kegelschnitts aus auf die zugehörige Gerade $g$, so erhält man eine Punktgruppe, die mit der Gruppe $p_1 p_2 \cdots p_n$ zu derselben cyclischen Involution gehört. Sind nämlich $q_1 q_2 \cdots q_n$ die Schnittpunkte von $g$ mit den Strahlen $b a_1 b a_2 \cdots b a_n$, so folgt, indem man die unter sich projectivischen Büschel

$$a_1(a_1 a_2 \cdots a_n b), \quad a_2(a_1 a_2 \cdots a_n b), \cdots a_n(a_1 a_2 \cdots a_n b)$$

durch $g$ schneidet,

$$p_2 p_3 \cdots p_1 q_1 \barwedge p_3 p_4 \cdots p_2 q_2 \barwedge \cdots \barwedge p_1 p_2 \cdots p_n q_n,$$

oder anders geordnet, indem man je zwei aufeinander folgende vergleicht,

$$p_1p_2\cdots p_nq_1 \barwedge p_2p_3\cdots p_1q_2,$$
$$p_1p_2\cdots p_nq_2 \barwedge p_2p_3\cdots p_1q_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_1p_2\cdots p_nq_n \barwedge p_2p_3\cdots p_1q_1,$$

so dass in der That

$$p_1p_2\cdots p_nq_1q_2\cdots q_n \barwedge p_2p_3\cdots p_1q_2q_3\cdots q_1$$

ist; eine Beziehung, die nach Nr. 6. beweist, dass beide Gruppen derselben cyclischen Involution angehören. *Folglich gehören alle Gruppen, die man erhält, durch Projection der Gruppe $a_1a_2\cdots a_n$ auf die zugehörige Gerade, von verschiedenen Punkten des Kegelschnitts aus, zu derselben cyclischen Involution.* Die Linie, welche zu einer cyclischen Involution gehört, kann den Kegelschnitt nicht schneiden. Wäre nämlich $a$ ein Schnittpunkt, so würde durch Projection der Punktreihe $p_1p_2\cdots p_na$ von den beiden Punkten $a_n$ und $a_{n-1}$ aus folgen

$$a_1a_2\cdots a_na \barwedge a_2a_3\cdots a_1a,$$

so dass $a$ ein den beiden Punktreihen entsprechend gemeinsames Element wäre gegen Nr. 5.

13. Wenn der Kegelschnitt und eine ihn nicht schneidende Gerade gegeben ist, so ist dadurch eine cyclische Involution auf dem Kegelschnitt, zu der die Linie gehört, vollständig und eindeutig bestimmt. Um dies zu zeigen, sei zuerst angenommen, dass auf dem Kegelschnitt zwei cycl.-proj. Gruppen von je $n$ Punkten vorhanden sind, die aber nicht derselben cyclischen Involution anzugehören brauchen; die eine $A$ sei $a_1a_2\cdots a_n$, die andere $B$ $b_1b_2\cdots b_n$. Bezieht man nun zwei auf dem Kegelschnitt gelegene Punktreihen projectivisch so aufeinander, dass drei aufeinander folgenden Punkten der $B$ drei ebensolche Punkte der $A$ entsprechen, so entspricht der zweiten cycl.-proj. Gruppe eine andere, die mit der ersten drei aufeinander folgende Punkte gemein hat, also nach Nr. 9. ganz mit ihr übereinstimmt. Eine projectivische Beziehung zwischen zwei auf einem Kegelschnitt gelegenen Punktreihen bestimmt aber auch eine solche Beziehung zwischen zwei die Ebene des Kegelschnitts bedeckenden Punktfeldern, bei der der Kegelschnitt unverändert bleibt, und diese führt, weil sie die Gruppe $B$ in die $A$ überführt, die zu $B$ gehörige Linie $h$ in die zu $A$ gehörige $g$ über.

*Wenn somit zwei Gruppen $A$ und $B$ von gleich viel Punkten auf einem Kegelschnitt gegeben sind, so giebt es immer eine projectivische Umformung der Ebene des Kegelschnitts in sich selbst, welche $B$ in $A$ und die zu $B$ gehörige Linie in die zu $A$ gehörige überführt, während der Kegelschnitt in sich übergeht.*

Sei jetzt gegeben $B$, seine zugehörige Linie $h$, ferner eine den Kegelschnitt nicht schneidende Gerade $g$ und ein Punkt $a_1$ des Kegelschnitts. Ist $A$ eine Gruppe, welche $a_1$ enthält und $g$ zur zugehörigen Linie hat, so muss es möglich sein, die Ebene des Kegelschnitts so in sich projectivisch zu transformiren, dass $h$ in $g$, der Kegelschnitt in sich selbst und $b_1$ in $a_1$ übergeht. Es seien $G$ und $H$ die Pole von $g$ und $h$, also Punkte im Innern des Kegelschnittes, weil $g$ und $h$ diesen nicht schneiden. Man lege nun durch $H$ und $b_1$ eine Gerade, welche den Kegelschnitt in $b'$ zum zweitenmal treffen möge, ziehe in $b_1$ und $b'$ die Tangenten und bezeichne mit $c$ deren Schnittpunkt und mit $d$ den einen der beiden Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der Linie $Hc$. Die durch Construction mit $G$ und $a_1$ erhaltenen Punkte seien entsprechend $a_1 a' c' d'$. Man lasse dann die vier Punkte $a_1 a' c' d'$ den $b_1 b' c d$ entsprechen, womit das Gewünschte erreicht ist. Die hier verlangte Beziehung kann aber in mehr als einer Art hergestellt werden. Sind nämlich die beiden Schnittpunkte des Kegelschnitts mit $Hc$ $d_1$ und $d_2$ und die mit $Gc'$ $d_1' d_2'$, so kann man für $d$ nehmen $d_1$ oder $d_2$ und für $d'$ entweder $d_1'$ oder $d_2'$. Die beiden Annahmen $d = d_1$, $d' = d_1'$ und $d = d_2$, $d' = d_2'$ liefern dasselbe. Denn in Folge der ersten entspricht dem, von $d_1$ verschiedenen, Schnittpunkte $d_2$ der Linie $Hc$ mit dem Kegelschnitt der, von $d_1'$ verschiedene, von $Gc'$ also $d_2'$. Aus dem gleichen Grunde liefern die beiden Annahmen $d = d_1$, $d' = d_2'$ und $d = d_2$, $d' = d_1'$ dieselbe Beziehung. Es bleiben also noch zu vergleichen die beiden Festsetzungen $d = d_1$, $d' = d_1'$ und $d = d_1$, $d' = d_2'$. Sei $e$ ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts und $e_1'$ und $e_2'$ die ihm in beiden Hypothesen entsprechenden. Die Linie $c' e_1'$ bestimmt sich daraus, dass $c'(a_1 a' d_1' e_1') \barwedge c(b_1 b' d_1 e)$ und die Linie $c' e_2'$ aus der Bedingung $c'(a_1 a' d_2' e_2') \barwedge c(b_1 b' d_1 e)$. Da die beiden Linien $c' d_1'$ und $c' d_2'$ zusammenfallen, so müssen auch, weil $c'(a_1 a' d_1' e_1') \barwedge c'(a_1 a' d_2' e_2')$, die beiden $c' e_1'$ und $c' e_2'$ identisch sein. Entspricht also bei der ersten Art der Beziehung dem Punkt $c$ der Punkt $e_1'$, so entspricht ihm nach der zweiten Art der $e_2'$, welcher mit ihm und $c'$ auf derselben Geraden liegt.

Nun entsprechen den Punkten $b_1 b_2 \cdots b_n$ der Gruppe $B$ bei der ersten Art der Beziehung der Reihe nach die Punkte der Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$. Da die Punkte $b_1 b_1 \cdot b_2 b_n \cdot b_3 b_{n-1} \cdots$ Punktepaare einer Involution sind mit dem Centrum $c$ (siehe Nr. 11.), so sind auch $a_1 a_1 \cdot a_2 a_n \cdot a_3 a_{n-1} \cdots$ Punktepaare einer Involution mit dem Centrum $c'$. Daher werden bei der zweiten Art, die Beziehung festzusetzen, nach der obigen Bemerkung den Punkten $b_1 b_2 \cdots b_n$ die Punkte $a_1 a_n a_{n-1} \cdots a_2$ entsprechen, d. h. man erhält bei der zweiten Beziehung dieselbe Punktgruppe nur in anderer Anordnung ihrer Punkte.

*Durch eine den Kegelschnitt nicht schneidende Gerade und einen*

*Punkt $a_1$ der Curve ist also eine cycl.-proj. Gruppe bestimmt, zu welcher die Gerade gehört, und folglich ist durch die Gerade allein die ganze cyclische Involution eindeutig bestimmt, zu welcher die Gerade gehört.*

Wenn also zu zwei Gruppen dieselbe Gerade gehört, so sind beide Gruppen in derselben cyclischen Involution enthalten.

14. Weil die Punktepaare $a_2a_n \cdot a_3a_{n-1} \cdots$ einer Involution angehören, von welcher $a_1$ ein Ordnungselement ist, so hat sie noch ein zweites $b_1$, welches von $a_1$ harmonisch getrennt ist durch die Punktenpaare $a_2a_n$, $a_3a_{n-1}$, $\cdots$ und daher zu $a_1$ *in der Gruppe harmonisch zugeordnet heissen soll.* Zu $a_2$ gehört ebenso ein Punkt $b_2$, welcher von jenem durch $a_1a_3$, $a_4a_n$, $\cdots$ harmonisch getrennt ist, allgemein zu $a_k$ ein Punkt $b_k$, der ihm in der Gruppe harmonisch zugeordnet heissen soll, weil er von ihm durch alle Punktenpaare $a_{2k-1}a_1$, $a_{2k-2}a_2$, $\cdots$ harmonisch getrennt ist. Der Punkt $b_k$ ist ein Punkt der Gruppe, nämlich $a_{\frac{1}{2}n+k}$, wenn $n$ gerade ist, dagegen gehört er bei ungeradem $n$ nicht der Gruppe an.

Ist die cycl.-proj. Gruppe $a_1a_2 \cdots a_n$ auf einem Kegelschnitt gelegen, so ist das Centrum der Involution, deren Paare sind $a_2a_n$, $a_3a_{n-1}$, $\cdots$, der Punkt $p_2$ der zur Gruppe gehörigen Linie. $a_1$ ist der Berührungspunkt der einen von $p_2$ an den Kegelschnitt gezogenen Tangente, folglich der der andern $b_1$, und die Linie $a_1b_1$ geht durch den Pol der zur Gruppe gehörigen Geraden. *So geht jede Verbindungslinie eines Punktes der Gruppe mit dem ihm in der Gruppe harmonisch zugeordneten durch den Pol der Linie, welche zu der Gruppe gehört.* Daraus folgt, dass eine gegebene Linie zu einer gegebenen Gruppe gehört, wenn der Pol der Linie das Centrum der Involution ist, welche von den Paaren gebildet wird, die aus den Punkten der Gruppe und ihren harmonisch in der Gruppe zugeordneten bestehen. Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass zwei Verbindungslinien etwa $a_1b_1$, $a_2b_2$ sich in dem Pole schneiden.

Durch drei Punkte $a_1a_2b_2$ ist eine und nur eine ordentliche cycl.-proj. Gruppe $a_1a_2a_3 \cdots a_n$ bestimmt, in der $a_1$ und $a_2$ zwei benachbarte Punkte und $b_2$ der zu $a_2$ harmonisch zugeordnete sein sollen. Da nämlich $a_1a_3$ harmonisch getrennt ist durch $a_2b_2$, so bestimmen die gegebenen Punkte noch $a_3$ und die drei Punkte $a_1a_2a_3$ eine einzige ordentliche Gruppe, in der sie aufeinander folgende Punkte sind.

Derselbe Satz gilt natürlich auch für Gruppen im Strahl- und Ebenenbüschel. Gehen nun zwei benachbarte Strahlen $\alpha_1\alpha_2$ einer ordentlichen Gruppe $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$ in einem Strahlbüschel durch die beiden Punkte $a_1a_2$ der Punktgruppe und der dem Strahl $\alpha_2$ zugeordnete Strahl $\beta_2$ durch den Punkt $b_2$, so schneidet die Gruppe im Strahlbüschel die Gerade in einer ordentlichen Gruppe, welche mit der Gruppe $a_1a_2 \cdots a_n$

die beiden benachbarten Punkte $a_1 a_2$ und den $a_2$ harmonisch zugeordneten $b_2$ gemein hat, folglich nach dem oben Bewiesenen mit jener zusammenfällt. Somit liegt in jedem Strahl der Strahlengruppe $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ ein Punkt der Punktgruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$.

15. Projicirt man die Punkte $a_1 a_2 \cdots a_n$ und die zugeordneten $b_1 b_2 \cdots b_n$ von einem Punkte des Kegelschnitts aus auf die zur Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ gehörige Linie $g$, so entstehen dort zwei Gruppen $c_1 c_2 \cdots c_n$ resp. $d_1 d_2 \cdots d_n$. Weil $a_2 a_n$, $a_3 a_{n-1} \cdots$ harmonisch getrennt sind durch $a_1 b_1$, so sind auch $c_2 c_n$, $c_3 c_{n-1} \cdots$ harmonisch getrennt durch $c_1 d_1$, d. h. $d_1$ ist der Punkt, welcher in der Gruppe $c_1 c_2 \cdots c_n$ dem $c_1$ harmonisch zugeordnet ist. Nun geht aber $a_1 b_1$ durch den Pol der Linie $g$, folglich sind nach einem Math. Annalen Bd. VIII, S. 156 bewiesenen Satze $c_1 d_1$ conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt. Ebenso sind natürlich $c_2 d_2$, $c_3 d_3 \cdots c_n d_n$ conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt.

Wie in Nr. 13. bewiesen wurde, bestimmt eine den Kegelschnitt nicht schneidende Gerade auf der Curve eine cyclische Involution, zu deren Gruppen allen die Gerade gehört. Projicirt man diese cyclische Involution von einem Punkte des Kegelschnitts aus auf die Gerade, so entsteht dort natürlich wieder eine solche Involution; dieselbe ist aber vom Projectionscentrum unabhängig und also nur durch den Kegelschnitt und die Gerade bestimmt. Sei nämlich die Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ mit $A$ bezeichnet, $C$ eine andere cycl.-proj. Gruppe des Kegelschnittes, die mit $A$ zu derselben cyclischen Involution gehört, $r$ und $s$ zwei Punkte der Curve und $A_r A_s C_r C_s$ die 4 Gruppen, welche durch Projection der Gruppen $A$ und $C$ von den Punkten $r$ und $s$ auf die Gerade entstehen. Ferner sei $P$ die Gruppe der oben Nr. 12. mit $p_1 p_2 \cdots p_n$ bezeichneten Punkte. Dann gehören nach dem, was Ende von Nr. 12. bewiesen wurde, die Gruppen $P$, $A_r$, $A_s$ derselben cyclischen Involution an. Weil andererseits $A$ und $C$ derselben cyclischen Involution zugehören, so folgt durch Projection, dass einerseits $A_r C_r$, andererseits $A_s C_s$ je derselben cyclischen Involution angehören. In Verbindung mit dem Vorigen folgt also, dass die 4 Gruppen auf $g$ $A_r A_s C_r C_s$ derselben Involution angehören, von der auch $P$ eine Gruppe ist. Somit kann man sagen: *wenn die Gruppe $c_1 c_2 \cdots c_n$ der durch die Gerade $g$ bestimmten Involution angehört, so ist jeder ihrer Punkte conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt zu dem ihm in der Gruppe harmonisch zugeordneten. Wenn umgekehrt die Gruppe $c_1 c_2 \cdots c_n$ diese Eigenschaft hat, so gehört sie der durch $g$ bestimmten cyclischen Involution an.* Denn bezeichnen wir wie oben mit $d_1 \cdots d_n$ die den Punkten $c_1 \cdots c_n$ harmonisch zugeordneten, so ergiebt sich durch Projection von einem Punkte $r$ des Kegelschnitts aus auf diesen eine Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ und eine zweite $b_1 b_2 \cdots b_n$, deren Punkte die den Punkten

der ersten harmonisch zugeordneten sind. An der vorhin citirten Stelle wurde nun ein Satz bewiesen, dem zufolge, weil $c_1$ und $d_1$, $c_2$ und $d_2 \cdots$ conjugirt sind, die Verbindungslinien $a_1 b_1$, $a_2 b_2 \cdots$ sich im Pole der Linie $g$ schneiden.

Weil nun $a_1 a_2 \cdots a_n$ eine cycl.-proj. Gruppe, schneiden sich die Linien $a_2 a_n$, $a_3 a_{n-1} \cdots$ alle mit den Tangenten in $a_1$ und $b_1$ in einem Punkte $p_2$, der auf $g$ liegt, weil $a_1 b_1$ durch den Pol von $g$ geht. Ebenso wie $p_2$ liegt auch das Centrum $p_4$ der bei der Gruppe auftretenden Involution $a_1 a_3$, $a_2 a_2 \cdots$ auf $g$, so dass $g$ die zur Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ gehörige Linie ist, folglich die Gruppe $c_1 c_2 \cdots c_n$ eine durch die Gerade $g$ bestimmte Gruppe.

Nach dem zuerst Bewiesenen gehen alle Linien $a_1 b_1$, $a_2 b_2 \cdots$ durch den Pol von $g$, wenn dies bei zweien der Fall ist, und dies wieder tritt ein, wenn zwei Punkte der Gruppe $c_1 c_2 \cdots c_n$ conjugirt sind zu den ihnen harmonisch zugeordneten. Also hat man den Satz: *Wenn auf einer Geraden eine cyclisch-projectivische Gruppe liegt, von welcher zwei Punkte conjugirt sind zu ihren harmonisch zugeordneten, so gehört die Gruppe der cyclischen Involution an, welche durch die Gerade bestimmt ist.*

Endlich werden wir im Folgenden noch den Satz brauchen, *dass man in einer cyclischen Involution stets eine Gruppe finden kann, in welcher ein Punkt und sein harmonisch zugeordneter ein Paar einer gegebenen Involution bilden.*

Nehmen wir, um den Satz zu beweisen, an, die Gruppe liege auf einem Kegelschnitte. Dann gehen die Verbindungslinien eines Punktes mit seinem harmonisch zugeordneten für alle Gruppen der cyclischen Involution durch einen festen Punkt im Innern des Kegelschnitts. Sollen zwei solche Punkte ein Paar einer anderen Involution bilden, so muss ihre Verbindungslinie noch durch das Centrum dieser Involution gehen. Die beiden Punkte sind also gegeben als Schnittpunkte des Kegelschnittes mit einer Geraden und diese sind vorhanden, weil die Gerade durch einen im Innern des Kegelschnitts gelegenen Punkt geht. Eine Gruppe, welche der gegebenen cyclischen Involution angehört und von einem der beiden Punkte ausgeht, hat die gewünschte Eigenschaft.

## § 2.

## Die Darstellung des Imaginären in der Geometrie mit Hülfe cyclisch-projectivischer Gruppen.

16. Wir nennen eine ordentliche cyclisch-projectivische Gruppe $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ einen imaginären Punkt, Ebene oder Gerade erster Art, je nachdem ihre Elemente $a_1 a_2 \cdots a_n$ Punkte einer Geraden, Ebenen eines Ebenenbüschels oder Strahlen eines Strahlenbüschel sind. Dabei

soll der cyclisch-projectivischen Gruppe ein bestimmter Sinn beigelegt werden, in welchem man sie von einem Elemente durchlaufen annehmen kann; diesen Sinn kann man in der Bezeichnung der Gruppe ausdrücken, so dass z. B. die beiden Gruppen $a_1 a_2 \cdots a_n$ und $a_1 a_n a_{n-1} \cdots a_2$ entgegengesetzen Sinn haben.

Ist $b_1 b_2 \cdots b_n$ eine zweite ordentliche Gruppe, welche mit $a_1 a_2 \cdots a_n$ zu derselben cyclischen Involution gehört, so soll sie dasselbe Element darstellen wie die letztere Gruppe, wenn der Sinn $b_1 b_2 \cdots b_n$ mit dem Sinne $a_1 a_2 \cdots a_n$ übereinstimmt. Nach Nr. 6. giebt es immer eine solche Gruppe, welche von einem gegebenen Punkt ausgeht.

Zwei imaginäre Elemente, deren Darstellungen sich nur durch den Sinn von einander unterscheiden, sollen conjungirt heissen. So stellen die beiden Gruppen von $a_1 a_2 \cdots a_n$ und $a_1 a_n \cdots a_2$ zwei conjungirte Elemente vor.

Die Definition, die oben gegeben ist, zeigt, dass jeder imaginäre Punkt eine reelle Gerade zum Träger hat, jede imaginäre Ebene eine reelle Axe besitzt und jede Gerade erster Art in einer reellen Ebene liegt und durch einen reellen Punkt geht.

Wir sagen nun zwei cyclische Involutionen verschiedener Art z. B. auf einer Geraden und in einem Ebenenbüschel seien perspectivisch nach der Lage, wenn jede Punktgruppe der einen Involution in einer Ebenengruppe der andern liegt. Nach dem in § 1. Bewiesenen findet dies offenbar statt, wenn alle Ebenen *einer* Gruppe im Ebenenbüschel durch die Punkte *einer* Gruppe auf der Geraden gehen, und dies wieder verlangt nach Nr. 4. nur, dass drei aufeinander folgende Punkte der Punktgruppe in drei aufeinander folgenden Ebenen der Ebenengruppe liegen.

Aehnliches gilt für Punktreihe und Strahlbüschel sowie für Ebenenbüschel und Strahlbüschel. Zwei solche cyclische Involutionen sollen nach *Lage und Sinn* perspectivisch heissen, wenn der Sinn, in dem die eine Gruppe beschrieben ist, dem Sinne entspricht, der der zweiten beigelegt wurde.

Hiemit kann man die Definitionen wörtlich beibehalten, welche in der ersten Abhandlung Bd. 8, S. 152, § 3. gegeben sind, nur ist für Involution zu setzen: cyclische Involution.

17. Nun ist zu zeigen, dass zwei imaginäre Punkte, deren reelle Träger nicht zusammenfallen, aber doch sich schneiden, stets eine imaginäre Gerade erster Art bestimmen. Wenn es überhaupt eine solche Gerade giebt, so müssen die beiden Punkte in einer reellen Ebene liegen, also ihre Träger sich schneiden, und auf beiden Trägern müssen cyclische Involutionen liegen, die perspectivisch sind. Es geht vom Schnittpunkt $a_1$ der beiden Träger auf der ersten Geraden die ordent-

liche Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ aus, auf der zweiten die ordentliche Gruppe $a_1 b_2 \cdots b_n$, welche den cyclischen Involutionen angehören, die auf jenen Geraden liegen und also die beiden imaginären Punkte darstellen. Die Linien $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ mögen sich im Punkte $M$ schneiden. Zieht man von $M$ aus die Strahlen $Ma_1$, $Ma_2 \cdots Ma_n$, so gehen von ihnen, die eine ordentliche cycl.-proj. Gruppe $M(a_1 a_2 \cdots a_n)$ bilden, die drei aufeinander folgenden $Ma_1$, $Ma_2$, $Ma_3$ durch die drei Punkte $a_1 b_2 b_3$ der Gruppe auf der zweiten Geraden und folglich gehen auch die übrigen Strahlen durch die übrigen Punkte und beide Involutionen sind perspectivisch. Daher stellt die Gruppe $M(a_1 a_2 \cdots a_n)$ im Strahlenbüschel die imaginäre Gerade dar, welche durch die beiden imaginären Punkte geht.

Ersetzt man den zweiten Punkt durch seinen conjungirten, so ist dieser durch $a_1 b_n b_{n-1} \cdots b_2$ dargestellt und man hat nun als Linie, welche beide enthält, die imaginäre, deren reeller Punkt $N$ auf den beiden Linien $a_2 b_n$ und $a_3 b_{n-1}$ gelegen ist und die durch die Gruppe $N(a_1 a_2 \cdots a_n)$ dargestellt wird. Die Linie $Na_n$ dieser Gruppe geht folglich durch $b_2$. Weil sich in $M$ die Linien $a_2 b_2$, $a_n b_n$ und in $N$ die $a_2 b_n$ und $a_n b_2$ schneiden, so werden $M$ und $N$ durch die beiden reellen Träger der beiden Punkte harmonisch getrennt und die Linie $MN$ selbst schneidet die beiden Träger in den beiden Punkten, welche zu $a_1$ in beiden Gruppen harmonisch zugeordnet sind.

Spricht man den dualistisch entsprechenden Satz ohne die Worte imaginärer Punkt oder Linie aus, so lautet er: es giebt nur eine Linie, welche von 2, mit bestimmten Sinnen begabten cycl.-proj. Gruppen zweier Strahlbüschel derselben Ebene, in zwei in demselben Sinne beschriebenen Gruppen derselben cyclischen Involution geschnitten wird. Daraus folgt nun: wenn man eine cycl.-proj. Gruppe mit einem Sinn, auf einem Kegelschnitt, von zwei verschiedenen Punkten der Curve aus auf eine Gerade projicirt und beidemal in demselben Sinne beschriebene Gruppen *einer* Involution erhält, so gehört die Gerade zur Gruppe auf dem Kegelschnitt. Denn aus dem Früheren folgt, dass die zur Gruppe gehörige Linie diese Eigenschaft hat, und das Obige zeigt, dass nur eine solche Linie existirt, also muss es die fragliche sein.

Durch einfache Projection kann man jetzt die in den Nummern 13. und 14. § 3. der ersten Arbeit enthaltenen Sätze beweisen.

18. Wir betrachten nun zwei imaginäre Punkte A, B deren reelle Träger $p$, $q$ sich nicht schneiden. Durch einen reellen Punkt $A$ geht dann eine reelle Axe einer imaginären Ebene, welche gleichzeitig die beiden Punkte AB enthält. Denn die beiden imaginären Geraden erster Art $A$A und $A$B haben einen reellen Punkt $A$ gemein und liegen folglich in einer imaginären Ebene, deren reelle Axe $r$ durch den Punkt $A$ geht. Diese Linie $r$ ist die Axe eines Ebenenbüschels, in

dem eine cyclische Involution vorhanden ist, nach Sinn und Lage perspectivisch zu denjenigen, welche die Punkte A und B darstellen. In jeder Ebene dieses Büschels liegt eine Gerade, welche die drei $pqr$ schneidet und alle diese bilden die Geraden einer Regelschaar, von der $pqr$ Leitstrahlen sind. Diese Geraden sind zu dem Ebenenbüschel perspectivisch, also sind auch sie in cycl.-proj. Gruppen geordnet und da jede Gruppe des Ebenenbüschels durch eine Gruppe auf jeder der beiden Linien $p$, $q$ geht, so geht auch eine Gruppe von Strahlen der Regelschaar durch je eine der A und B darstellenden Gruppen auf $p$ und $q$ und schneidet $r$ wieder in einer solchen Gruppe.

Folglich bestimmen zwei imaginäre Punkte A, B, deren Träger sich nicht schneiden, mit einem reellen Punkte $A$ eine Regelschaar, deren Gerade in cycl.-proj. Gruppen einer cyclischen Involution geordnet sind. Schneidet man die Regelschaar durch eine reelle Ebene $B$, welche keine Gerade enthält, so enthält sie einen Kegelschnitt, der eine cyclische Involution trägt, zu der eine Gerade $s$ gehört. Nun sei $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ eine der, aus den Geraden der Regelschaar gebildeten, cycl.-proj. Gruppen, die beiden Strahlbüschel, in welchen $B$ von den Ebenenbüscheln $p(a_1 a_2 \cdots a_n)$ und $q(a_1 a_2 \cdots a_n)$ getroffen wird, schneiden dann $s$, weil es unserer Annahme nach zu der Involution auf dem Kegelschnitte gehört, in 2 Gruppen gleichen Sinnes derselben cycl. Involution. Folglich thun dies auch die beiden Ebenenbüschel $p(a_1 a_2 \cdots a_n)$ und $q(a_1 a_2 \cdots a_n)$, deren Schnitte mit $B$ eben jene Strahlbüschel sind, und weiter auch ihre Schnitte mit jeder andern durch $s$ gehenden Ebene $C$. Diese Ebene $C$ trifft die Regelschaar in einem Kegelschnitt, der eine cyclische Involution trägt, welche zu denen in beiden letztgenannten Strahlbüscheln perspectivisch ist. Man hat also einen Kegelschnitt, auf dem eine cycl.-proj. Gruppe, gebildet durch die Schnitte von $C$ mit den Linien $a_1 a_2 \cdots a_n$, gelegen ist, welche, von den beiden Schnittpunkten von $p$ und $q$ mit $C$ aus, auf eine Gerade $s$ projicirt, zwei Gruppen gleichen Sinnes einer cyclischen Involution liefert. Daher muss, wie oben bewiesen, $s$ die zur Gruppe auf dem Kegelschnitt gehörige Linie sein. Weil somit $s$ für jede durch die Linie gehende Ebene diese Eigenschaft besitzt, wenn es für eine der Fall ist, so kann man sagen: $s$ ist die zur Liniengruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ gehörige Linie. Solcher Linien giebt es unzählig viele. Durch jeden Punkt geht eine, und wie man unschwer findet, in jeder Ebene liegt eine.

Die vorliegenden Sätze erlauben nun leicht anzugeben, was man im § 5. der ersten Abhandlung abändern muss, damit sie auch jetzt noch gelten. Und dann ergiebt sich, dass die dort in den Nr. 22—37. incl. enthaltenen Betrachtungen hier genau ebenso anzustellen sind.

19. Es soll nun der Punkt gesucht werden, welcher durch zwei reelle Punkte $P$, $Q$ von einem imaginären, mit $P$ und $Q$ auf derselben

Geraden liegenden Punkte A harmonisch getrennt ist. A sei dargestellt durch die Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$. Man lege durch $P$ zwei reelle Linien und nehme auf einer derselben den Punkt $R$ an. Die Linie $RA$ treffe dann die andere Linie in dem imaginären Punkte $\Gamma$. Dann hat man zu ziehen $RQ$ und $\Gamma Q$, mit der ersten Linie zu schneiden die reelle Linie $P\Gamma$, mit der zweiten die Linie $PR$ im Punkte $S$ und im imaginären Punkte $\Delta$. Endlich hat man zu ziehen $S\Delta$. Disse Linie trifft $PQ$ im gesuchten vierten harmonischen B und zwar findet man sofort für B eine Darstellung durch eine Punktgruppe $b_1 b_2 \cdots b_n$. Die Ausführung der Construction, die gar keine Schwierigkeiten bietet, zeigt, dass die Punktepaare $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3 \cdots a_n b_n$ Paare einer Involution mit den Ordnungselementen $P$, $Q$ sind.

Der Punkt A hat eine von $P$ ausgehende Darstellung, die $PP_2 \cdots P_n$ sein möge; ist dann $PP_2' \cdots P_n'$ die von $P$ ausgehende Darstellung von B, so sind $P_2 P_2'$, $P_3 P_3' \cdots P_n P_n'$ harmonisch getrennt durch $P$ und $Q$. Soll B zu A conjungirt sein, so ist die von $P$ ausgehende Darstellung $PP_n P_{n-1} \cdots P_2$, daher müssen $P_2 P_n$, $P_3 P_{n-1} \cdots$ durch $P$ und $Q$ harmonisch getrennt sein, d. h. $Q$ ist zu $P$ harmonisch zugeordnet in der A darstellenden Gruppe. Folglich werden je zwei in einer Gruppe harmonisch zugeordnete Punkte harmonisch getrennt durch die beiden conjungirten Punkte, welche durch die Gruppe dargestellt werden, wenn man ihr die beiden möglichen Sinne beilegt.

20. Wenn zwei Strahlbüschel reell projectivisch sind, so entspricht jedem imaginären Strahle A des einen, ein imaginärer Strahl B des andern. Ist nämlich $a_1 a_2 \cdots a_n$ eine Strahlengruppe, welche den Strahl A darstellt und entsprechen den reellen Strahlen $a_1 a_2 \cdots a_n$ im zweiten Büschel die Strahlen $b_1 b_2 \cdots b_n$, so stellt die Gruppe $b_1 b_2 \cdots b_n$ den A entsprechenden Strahl B dar.

Zwei reell projectivische Büschel sind entweder perspectivisch gelegen, oder man kann ein anderes Büschel dazwischen setzen, welches zu beiden perspectivisch ist. Da nun durch Projection von vier harmonischen Punkten oder Strahlen wieder ein harmonischer Wurf entsteht, so folgt, dass, wenn zwei Büschel reell projectivisch sind, je vier harmonischen, reellen oder imaginären, Strahlen des ersten vier harmonische Strahlen des zweiten entsprechen.

Sind die beiden Strahlbüschel nicht perspectivisch, so erzeugen die Schnitte entsprechender reeller Strahlen einen Kegelschnitt. Zwei entsprechende imaginäre Strahlen $\alpha$ und $\beta$ haben einen imaginären Punkt $\Gamma$ gemein, von dem gesagt werden soll, er liege auf dem Kegelschnitt. Es sei $p$ der reelle Träger von $\Gamma$, die Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ eine Darstellung des Strahles $\alpha$ uud die Gruppe $b_1 b_2 \cdots b_n$ die entsprechende Darstellung von $\beta$, so dass $a_1$ und $b_1$, $a_2$ und $b_2$, $\cdots$ $a_n$ und $b_n$ entsprechende reelle Strahlen der beiden Büschel sind und sich also in

Punkten $c_1 c_2 \cdots c_n$ des Kegelschnittes treffen. Andererseits schneiden sie den reellen Träger $p$ von $\Gamma$ in zwei cycl.-proj. Gruppen gleichen Sinnes, die derselben cyclischen Involution angehören. Folglich ist nach dem Ende von Nr. 17. angeführten Satze $p$ die Gerade, welche zu der Gruppe $c_1 c_2 \cdots c_n$ und der durch sie bestimmten cyclischen Involution gehört. Daher kann auch die Gruppe $c_1 c_2 \cdots c_n$ zur Darstellung des Punktes $\Gamma$ dienen. Will man von einem Punkt $p$ des Kegelschnittes eine Linie durch den Punkt $\Gamma$ legen, so braucht man nach dem Satze in Nr. 12. nur von $P$ aus das Büschel $P(c_1 c_2 \cdots c_n)$ zu legen, denn dieses schneidet $p$ nach dem citirten Satze in einer Gruppe, welche der dort liegenden Involution angehört.

Legt man durch einen anderen reellen Punkt $Q$ des Kegelschnittes ein Strahlenbüschel, so sind dessen reelle Strahlen auf die des Büschels $P$ durch die Punkte des Kegelschnittes reell projectivisch bezogen. Der Strahlengruppe $P(c_1 c_2 \cdots c_n)$ entspricht dabei die Gruppe $Q(c_1 c_2 \cdots c_n)$ d. h. dem imaginären Strahle $P\Gamma$ der $Q\Gamma$ oder die beiden Büschel sind reell projectivisch und zwar entsprechen sich 2 (reelle oder imaginäre) Strahlen, wenn sie durch denselben Punkt des Kegelschnittes gehen.

Sind nun $abcd$ vier harmonische Strahlen vo $P$, die den Kegelschnitt in vier Punkten $ABCD$ schneiden, so sind wegen der reell projectivischen Beziehung die 4 Strahlen $Q(ABCD)$ harmonisch, und weil diese Eigenschaft also nicht vom Centrum des Büschels, sondern nur von der Lage der vier Punkte auf dem Kegelschnitt abhängt, so nennen wir dann die vier Punkte $ABCD$ harmonische Punkte.

21. Auf dem Kegelschnitt betrachten wir jetzt vier Punkte: zwei reelle $AB$ und zwei imaginäre $\mathsf{AB}$ und nehmen an $\mathsf{AB}$ seien durch $AB$ harmonisch getrennt. Ist $M$ ein weiterer reeller Punkt der Curve, so ist dann $M(A\mathsf{A}B\mathsf{B})$ ein harmonischer Wurf. Wenn nun die Strahlen $M\mathsf{A}$ und $M\mathsf{B}$ der Kegelschnitt in den Punktgruppen $a_1 a_2 \cdots a_n$ resp. $b_1 b_2 \cdots b_n$ schneiden, so werden nach dem in Nr. 19. bewiesenen Satze die Strahlen $Ma_1$ und $Mb_1$, $Ma_2$ und $Mb_2 \cdots$ harmonisch getrennt durch $MA$ und $MB$ oder die Punktepaare $a_1 b_1$, $a_2 b_2 \cdots a_n b_n$ gehören einer Involution an, mit den Ordnungselementen $A$ und $B$, so dass die Linien $a_1 b_1$, $a_2 b_2 \cdots a_n b_n$ alle durch den Schnittpunkt $R$ der Tangenten in $A$ und $B$ gehen.

Bezieht man jetzt zwei in der Ebene vereinigt gelegene Punktfelder projectivisch so aufeinander, dass den Punkten $ABRa_1$ des einen die Punkte $ABRb_1$ des andern entsprechen, so sind sie involutorisch so bezogen, dass $R$ das Involutionscentrum und $AB$ die Involutionsaxe ist. Desshalb entspricht der Punktgruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ die Gruppe $b_1 b_2 \cdots b_n$, der zur ersten gehörigen Linie $g$, die zur zweiten gehörige $h$, die sich also auf $AB$ im Punkte $\tau$ schneiden. $g$ ist Träger von $\mathsf{A}$, welches durch eine Gruppe $a_1' a_2' \cdots a_n'$ dargestellt werde, die

durch Schnitt von $g$ mit dem Büschel $B(a_1 a_2 \cdots a_n)$ entstanden sein möge. Der Punkt B kann dargestellt werden durch eine auf $h$ gelegene Gruppe $b_1' b_2' \cdots b_n'$, entstanden durch Projection der Gruppe $b_1 b_2 \cdots b_n$ von $B$ aus. Die beiden Büschel, welche von $B$ aus die Gruppen $a_1 a_2 \cdots a_n$ und $b_1 b_2 \cdots b_n$ projiciren, entsprechen sich dann, und weil $g$ und $h$ sich entsprechen, sind auch die Punkte $a_1' a_2' \cdots a_n'$ den $b_1' b_2' \cdots b_n'$ zugeordnet, so dass die Linien $a_1' b_1'$, $a_2' b_2' \cdots a_n' b_n'$ durch das Involutionscentrum $R$ gehen. Folglich geht die Linie AB durch $R$.

Sind die beiden Punkte A und B conjungirt, so fallen die Linien $g$ und $h$ zusammen, bilden also eine in der oben hergestellten Beziehung sich selbst entsprechende Linie, die, weil sie nicht Involutionsaxe ist, durch $R$ gehen muss. Somit ist bewiesen: *wenn zwei reelle Punkte eines Kegelschnittes durch zwei andere harmonisch getrennt werden, so geht die Verbindungslinie der letzteren durch den Pol der Verbindungslinie der reellen Punkte.*

Sind auf dem Kegelschnitt zwei reelle Punktepaare gegeben, $AB$ und $CD$, so geht die Verbindungslinie der Punkte eines Paares, welches $AB$ und $CD$ gleichzeitig harmonisch trennt, durch den Pol von $AB$ und den von $CD$, ist also eine reelle Gerade, und die Punkte des gesuchten Paares, als die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der reellen Geraden, sind entweder zwei reelle oder zwei conjungirt imaginäre Punkte.

Durch Projection überträgt sich diese Eigenschaft auf Punktepaare einer Geraden u. s. w.

Nun kann man die Nr. 40.—44. der ersten Arbeit absolviren. Auch der erste Absatz der Nr. 45. gilt wörtlich wie dort. Was den zweiten betrifft, so sei A ein imaginärer Punkt und B sein conjungirter. Die Gruppe $a_1 a_2 \cdot \cdot a_n$ sei eine Darstellung von A. Sind die in dieser Gruppe den $a_1$ und $a_2$ harmonisch zugeordneten Punkte $b_1$ und $b_2$, so sind nach der Nr. 19. die beiden Würfe $a_1 A b_1 B$, $a_2 A b_2 B$ harmonisch. Es mögen den Punkten $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 \cdots a_n$ die Punkte $a_1' b_1' a_2' b_2' a_3' \cdots a_n'$ und den imaginären Punkten A und B die A′ und B′ entsprechen. Weil harmonische Würfe wieder ebensolchen entsprechen, so müssen A′ und B′ die beiden Paare $a_1' b_1'$ und $a_2' b_2'$ harmonisch trennen. Da nun die Gruppe $a_1' a_2' \cdots a_n'$ eine cycl.-proj. ist und ferner nach der Bedeutung der $b$, der $b_1'$ und $b_2'$ den $a_1'$ und $a_2'$ harmonisch zugeordnet sind, so stellt die Gruppe $a_1' a_2' \cdots a_n'$ einen der beiden Punkte $A' \cdot B'$ vor, weil aber zwei entsprechende Würfe gleicher Art sein sollen, so muss A′ durch $a_1' a_2' \cdots a_n'$ dargestellt werden, wenn A durch $a_1 a_2 \cdots a_n$ dargestellt wird. Hiemit ist der Schlusssatz von Nr. 45. bewiesen.

22. Es bleibt nur noch übrig die Schnittpunkte eines reellen Kegelschnittes mit einer imaginären Geraden zu untersuchen. Diese

Aufgabe kann man auf die im ersten Aufsatze in Nr. 49. und 50. behandelten, wie folgt, reduciren.

Nach dem Satze, der in Nr. 15. bewiesen wurde, kann man annehmen, die imaginäre Gerade sei gegeben durch eine in einem Strahlbüschel mit dem Centrum $M$ gelegene Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$, die so beschaffen ist, dass $a_1$ und der in der Gruppe harmonisch zugeordnete Strahl $b_1$ zugleich in Bezug auf den Kegelschnitt conjungirt sind. Es kommt nun darauf an eine Gerade $p$ zu finden, welche von der Strahlengruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ in einer Punktgruppe $c_1 c_2 \cdots c_n$ geschnitten wird, die zu der cyclischen Involution gehört, die $p$ mit dem Kegelschnitt bestimmt. Sind $d_1 d_2$ die zu $c_1 c_2$ in der Gruppe harmonisch zugeordneten Punkte, so findet dies nach Nr. 15. statt, wenn $c_1$ und $d_1$, $c_2$ und $d_2$ conjungirt sind. Nun ist aber $d_2$ der Schnitt von $p$ mit dem Strahle $b_2$, welcher $a_2$ in der Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ zugeordnet ist. Folglich ist $p$ so zu bestimmen, dass die Schnittpunkte mit $a_1$ und $b_1$ und gleichzeitig mit $a_2$ und $b_2$ conjungirt sind, während $a_1$ und $b_1$ selbst conjungirte Strahlen sind. Dies ist aber gerade die a. a. O. gelösste Aufgabe, deren Lösung zeigt, dass die gerade Linie mit dem Kegelschnitt einen oder zwei Punkte gemein hat.

Alles Uebrige kann nun genau und wörtlich so wie in der öfter genannten Arbeit im 8. Bd. absolvirt werden.

Carlsruhe, im Juni 1876.

# Extrait d'une lettre de M. F. Brioschi à M. F. Klein*).

**1.** Les formes binaires $f(\xi_1, \xi_2)$ du troisième ordre et d'ordre $n$ pair pour lesquelles on a $\frac{1}{2}(f,f)^4 = 0$ identiquement, sont de deux catégories. Pour la première en posant:

$$\tfrac{1}{2}(f,f)^2 = h, \quad 2(f,h) = \Theta$$

on a la rélation:

$$\alpha f^k + 4h^3 + \Theta^2 = 0, \tag{1}$$

$\alpha$ étant un invariant de $f$, et $\varkappa$ un nombre entier. Evidemment les ordres de $h$, $\Theta$ étant $2(n-2)$, $3(n-2)$ on doit avoir:

$$n\varkappa = 6(n-2),$$

par conséquent

$$\varkappa = 2, 3, 4, 5$$

pour

$$n = 3, 4, 6, 12.$$

Pour les formes de la seconde catégorie correspondantes aux autres valeurs de $n$ on a:

$$4h^3 + \Theta^2 = 0. \tag{2}$$

Soient pour $n=3$; $\delta$ le discriminant de la forme cubique; pour $n=4$, $g_3$ l'invariant cubique de la forme biquadratique, pour $n = 6, 12$, $A$ l'invariant quadratique: la rélation (1) devient dans ces cas:

$$\delta f^2 + 4h^3 + \Theta^2 = 0, \quad g_3 f^3 + 4h^3 + \Theta^2 = 0,$$

$$\tfrac{1}{18} A f^4 + 4h^3 + \Theta^2 = 0, \quad \tfrac{1}{6} A f^{10} = 3^4 \cdot 4^2 \cdot 5^2 (4h^3 + \Theta^2)^2,$$

et pour les cas de la seconde catégorie on a l'invariant quadratique $A = \frac{1}{2}(f,f)^n = 0$**).

**2.** Supposons dans la rélation (1) $z = \frac{\xi_1}{\xi_2}$, en posant:

$$x = -\frac{4h^3}{f^\varkappa}, \tag{3}$$

on aura:

---

*) Vergl. eine Arbeit von Hrn. Brioschi, die demnächst in den Annali di Matematica erscheint. F. K.

**) J'ai obtenu ces résultats par la théorie des formes associées, mais on peut aussi les déduire des formules données par M. Wedekind dans ses „Studien im binären Werthgebiete — Carlsruhe — 1876."

(4) $$\frac{\Theta^2}{f^\mu} = x - \alpha \ .$$

Or l'équation (3) nous donne:

$$x' = 4 \cdot \frac{h^2}{f^{\varkappa+1}} \ (\varkappa h f' - 3 f h'),$$

étant $x' = \frac{dx}{dz}$, $f' = \frac{df}{dz} \cdots$; ou en considérant qu'on a pour $\Theta$:

$$\Theta = 2(fh) = \frac{1}{n(n-2)} \left\{ 2(n-2) h f' - n f h' \right\}$$

on aura pour la valeur supérienne de $\varkappa$:

$$x' = 12(n-2) \cdot \frac{h^2 \Theta}{f^{\varkappa+1}};$$

ou à cause des rélations (3) (4):

$$x' = 6(n-2) \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sqrt{x-\alpha}}{f^{\frac{2}{n}}} .$$

On a donc pour les formes de la première catégorie qu'à la rélation rationelle

$$x f^\varkappa + 4 h^3 = 0$$

corresponde l'équation différentielle:

(5) $$\frac{dz}{dx} = C \cdot \frac{f^{\frac{2}{n}}}{x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x-\alpha}} \text{ étant } C = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3(n-2)}$$

et l'on a pour les intégrales de la forme:

$$\mu = \int \frac{dz}{f^{\frac{2}{n}}}$$

la propriété indiquée par M. Schwarz.

Or en posant avec vous:

$$\frac{2 \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^3z}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}{2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = [z]_x$$

on déduit de la supérieure (5):

$$(z)_x = \frac{2}{n^2} \frac{1}{f^2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 [n f f'' - (n-1) f'^2] + \frac{4}{9x^2} + \frac{3}{8(\alpha-x)^2} + \frac{1}{3x(\alpha-x)}$$

mais on a:

$$h = \tfrac{1}{2}(f,f)^2 = \frac{1}{n^2(n-1)} [n f f'' - (n-1) f'^2]$$

et

$$\frac{h}{f^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{1}{36(n-2)^2} \cdot \frac{1}{x(\alpha-x)},$$

par conséquent:

$$[z]_x = \frac{4}{9x^2} + \frac{3}{8(\alpha-x)^2} + \frac{6(n-2)^2+n-1}{18(n-2)^2} \cdot \frac{1}{x(\alpha-x)}$$

ou

$$(6) \qquad [z]_x = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(\alpha-x)^2} - \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2x(\alpha-x)}$$

étant:

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{1}{\varkappa}, \quad \nu = \frac{1}{2}.$$

Soit $x$ fonction d'une autre variable $y$, on a la formule de transformation:

$$(7) \qquad [z]_y = [x]_y + [z]_x \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)^2,$$

en conséquence si $x = \alpha y$ on déduira de la (6) l'équation différentielle:

$$(8) \qquad [z]_y = \frac{1-\lambda^2}{2y^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-y)^2} - \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2y(1-y)}$$

dont l'équation intégrale sera:

$$\alpha y f^\varkappa + 4h^3 = 0,$$

étant

$$\varkappa = 6\,\frac{n-2}{n}, \quad \lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{1}{\varkappa}, \quad \nu = \frac{1}{2}$$

et $n = 3, 4, 6, 12$. C'est notre résultat sauf le cas $n = 3$.

Pour les autres valeurs de $n$ étant $\alpha = 0$ on déduit de l'équation (6):

$$[z]_x = \frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

équation différentielle dont l'intégrale:

$$x f^\varkappa + 4h^3 = 0,$$

est irrationnelle. Mais si l'on suppose $m\varkappa$ nombre entier, et l'on fait $x = y^{\frac{1}{m}}$ on aura pour la formule de transformation (7) l'équation différentielle:

$$[z]_y = \frac{m^2\varkappa^2-1}{2m^2\varkappa^2} \cdot \frac{1}{y^2}$$

ou l'équation (8) dans laquelle:

$$\lambda = \mu = \frac{1}{m\varkappa}, \quad r = 1,$$

et l'équation intégrale deviendra:

$$y f^{m\varkappa} = (-1)^m \cdot 4^m \cdot \varkappa^{3m}$$

expression rationnelle, si $3m$ nombre entier.

**3.** Soit $f(\xi_1, \xi_2)$ une forme biquadratique quelconque, et $g_2$ son invariant quadratique, on a, comme il est connu:

$$\Theta^2 + 4h^3 - g_2 f^2 h + g_3 f^3 = 0.$$

En posant

$$x = -\frac{h}{f},$$

et $z = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ on obtient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{f(z)}}{\sqrt{\varphi(x)}}, \quad \varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

En opérant comme ci-dessus on arrive à l'équation différentielle:

$$[z]_x = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}$$

étant

$$p = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad q = -\frac{1}{32}\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

et l'équation intégrale sera:

$$xf + h = 0.$$

Or si $g_2 = 0$ en posant:

$$y = \frac{4x^3}{g_3}$$

on retombe sur l'équation (7) dans laquelle $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{2}$; et si $g_3 = 0$ on obtient:

$$[z]_x = \frac{3}{8}\frac{g_2(12x^2 + g_2)}{x^2(4x^2 - g_2)^2}.$$

De cette équation en posant:

$$y = \frac{4x^2}{g_2}$$

on arrive après quelques réductions à l'équation différentielle (7) dans laquelle:

$$\lambda = \frac{1}{4}, \quad \mu = r = \frac{1}{2},$$

et dont l'équation intégrale sera

$$g_2 f^2 \cdot y - 4h^2 = 0.$$

En général pour les formes d'ordre pair pour lesquelles $(fh)^1 = 0$ on a la rélation:

$$\alpha f^2 h^\varkappa = 4h^3 + \theta^2$$

étant $\varkappa = 2\frac{n-3}{n-2}$, et $\alpha = A^{\frac{2}{n-2}}$. Pour $n = 6, 8 \cdots$ on a:

$$A^{\frac{1}{2}} f^2 h^{\frac{3}{2}} = 4h^3 + \theta^2, \quad A^{\frac{1}{3}} f^2 h^{\frac{5}{3}} = 4h^3 + \theta^2.$$

Cela posé on démontre facilement que l'équation algébrique irrationelle (sauf pour $n = 4$):

$$\alpha f^2 y - 4h^{\frac{n}{n-2}} = 0$$

est l'intégrale de l'équation différentielle (8) où

$$\lambda = \frac{1}{n}, \quad \mu = r = \frac{1}{2}.$$

Je pourrais ajouter d'autres exemples mais la méthode est assez éclaircie par les cas supérieurs.

Milan, 6 Aout 1876.

# Ueber lineare Differentialgleichungen*).

Von Felix Klein in München.

Der Societät erlaube ich mir im Folgenden eine Methode vorzulegen, *die zu entscheiden gestattet, ob eine gegebene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coëfficienten durchaus algebraische Integrale besitzt.* Meine Methode geht darauf aus, alle derartigen Differentialgleichungen wirklich aufzustellen, und man hat daher, wenn es sich um die Untersuchung einer gegebenen Differentialgleichung handelt, nur eine Coëfficientenvergleichung zu veranstalten, deren Ausführung freilich Gegenstand einer besonderen algebraischen Untersuchung sein muss, die ich noch nicht beendet habe.

Sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1 \cdot \frac{dy}{dx} + p_0 \cdot y = 0$$

eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. So genügt bekanntlich**) der Quotient zweier unabhängiger Particularlösungen $y_1$, $y_2$:

$$\eta = \frac{y_1}{y_2}$$

der folgenden Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$[\eta] = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = 2p_0 - \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{dp_1}{dx} = P.$$

Diese Differentialgleichung hat die Eigenschaft, dass ihr allgemeines Integral eine gebrochene lineare Function eines beliebigen Particularintegrals ist:

$$\eta = \frac{\alpha\eta_0 + \beta}{\gamma\eta_0 + \delta};$$

sie wird ferner (selbstverständlicherweise) durchaus algebraische Integrale besitzen, wenn die Differentialgleichung zweiter Ordnung diese Eigenschaft hatte, und auch den umgekehrten Schluss kann man machen, sofern

---

*) Abgedruckt aus den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Sitzung vom 26. Juni 1876.

**) Vergl. die auch weiterhin benutzte Arbeit von Schwarz: Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes ist. Borchardt's Journ. Bd. 75. p. 292—335.

$$e^{\int p_1 dx}$$

eine algebraische Function ist. Dementsprechend soll weiterhin nur von dieser Differentialgleichung dritter Ordnung

$$[\eta] = P$$

die Rede sein, wo $P$, entsprechend der gleichen Voraussetzung, die wir schon in der Einleitung hinsichtlich $p_0$ und $p_1$ machten, eine rationale Function von $x$ bezeichnet.

Es sei $\eta_0$ ein particuläres Integral dieser Gleichung. Lässt man dann $x$ von einem beliebigen Werthe beginnend einen geschlossenen Weg beschreiben, so wird $\eta_0$ entweder unverändert wieder erscheinen oder in eine lineare Function

$$\eta_1 = \frac{\alpha\eta_0 + \beta}{\gamma\eta_0 + \delta}$$

verwandelt sein, wo die Verhältnisse $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ nur durch den Weg, nicht durch den Anfangswerth von $x$ oder durch $\eta_0$ bedingt sind. Zugleich muss, wenn $\eta_0$ Zweig einer algebraischen Function war, $\eta_1$ ein Zweig derselben algebraischen Function sein, da $\eta_1$ in $\eta_0$ continuirlich übergegangen ist. Ich will nun mit

$$\eta_0, \eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$$

die Gesammtheit der Werthe bezeichnen, die auf diese Weise aus $\eta_0$ entstehen. So bilde man die algebraische Gleichung:

$$0 = (\eta - \eta_0)(\eta - \eta_1) \cdots (\eta - \eta_n).$$

Sie besitzt zwei wesentliche Eigenschaften, die sogleich gestatten werden, alle derartige Gleichungen der Art nach anzuschreiben. Erstens sind ihre Coëfficienten, als symmetrische Functionen aller Werthe, die $\eta_0$ annehmen kann, wenn sich $x$ in der complexen Ebene bewegt, rationale Functionen von $x$. Zweitens hat die Gleichung die Eigenschaft, durch gewisse lineare Transformation von $\eta$ ungeändert zu bleiben, und zwar sind diese Transformationen in einer solchen Zahl vorhanden, dass durch sie jede Wurzel $\eta_i$ in jede andere $\eta_k$ verwandelt werden kann.

Nun aber habe ich mich früher, wie ich der Societät bei verschiedenen Gelegenheiten mittheilte (Juli, December 1874, Juli 1875) und ich im vorigen Jahre in einer grösseren Abhandlung (Mathematische Annalen IX, p. 183—208) ausführte, mit der Bestimmung aller Gleichungen beschäftigt, welche die letztangeführte Eigenschaft besitzen. Sie sind, von linearen Transformationen abgesehen, denen man das Argument $\eta$ unterwerfen mag, alle in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Der Buchstabe $R$ bedeutet einen willkürlichen Parameter; ausserdem sind die zugesetzten Zahlencoëfficienten so gewählt, dass bei dem später anzugebenden Schlussresultate möglichst einfache Glieder entstehen:

(1) $\eta^n = R,$

(2) $\eta^n + \eta^{-n} = 4R - 2,$ ($n$ eine beliebige ganze Zahl)

(3) $Rjf^3 + 3H^3 = 0,$

$f$ eine äquianharmonische biquadratische Form, $H$ die zugehörige Hesse'sche, $j$ die Invariante dritten Grades;

(4) $RAf^4 + 18H^3 = 0,$

$f$ die linke Seite einer Oktaedergleichung, $A$ die Invariante zweiten Grades (vergl. meine Annalenarbeit oder auch Clebsch, Binäre Formen p. 447 ff.);

(5) $7RBf^5 + 720H^3 = 0;$

$f$ die linke Seite einer Ikosaedergleichung, $B$ die Invariante ersten Grades.

*Die Integrale unserer Differentialgleichung müssen daher, unter $R$ eine geeignete rationale Function von $x$ verstanden, durch eine der Gleichungen* (1)—(5) *dargestellt sein.*

Ich behaupte aber ferner, dass für $R$ jede rationale Function von $x$ eingesetzt werden darf; die sofort mitzutheilende Aufstellung der zugehörigen Differentialgleichung zeigt es.

Für (1) nämlich berechnet man ohne Weiteres die Differentialgleichung:

(I) $$[\eta] = [R] + \frac{n^2 - 1}{2n^2}\left(\frac{R'}{R}\right)^2.$$

Andererseits könnte man auch (was ich wirklich ausführte) für (2)—(5) die zugehörigen Differentialgleichungen berechnen; es sind dazu nur einige wenige Sätze über das Formensystem der bez. Grundformen $f$ erforderlich. Aber man kann diese Rechnung sparen, wenn man die Resultate verwerthet, die Schwarz in der bereits citirten Abhandlung gewonnen hat. Schwarz betrachtet insonderheit die Differentialgleichung

$$[\eta] = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{2x(1-x)}$$

und sucht diejenigen Fälle, in denen sie algebraische Integrale besitzt. Dies findet vor Allem dann statt, wenn $\lambda$, $\mu$, $\nu$ bezüglich gleich genommen werden:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{n}, \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$$

und zwar sind die dann auftretenden Integralgleichungen geradezu durch unsere Gleichungen (2)—(5) gegeben, sofern man in ihnen $R = x$ setzt.

Daher findet man umgekehrt die von uns geforderten Differentialgleichungen, wenn man in die bei Schwarz betrachtete Differentialgleichung $R(x)$ statt $x$ einführt. Sie geht dadurch über in:

$$[\eta] = [R] + R'^2 \left\{ \frac{1-\lambda^2}{2R^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-R)^2} - \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2R(1-R)} \right\}.$$

*Schreibt man hier für $\lambda$, $\mu$, $\nu$ bez. die angegebenen Werthe, so hat man die Differentialgleichungen* (II)—(V), *welche zu den Integralgleichungen* (2)—(5) *gehören.*

Hiermit ist das Ziel erreicht, welches wir zu Eingang der Arbeit bezeichneten; es bleibt nur das ebenfalls schon berührte Transformationsproblem: Wann kann eine rationale Function $R(x)$ umgesetzt werden in eins der bei den Gleichungen (I)—(V) auf der rechten Seite auftretenden Aggregate, in denen $R$ eine rationale Function von $x$ bedeutet? Und wenn das der Fall ist, wie bestimmt man $R$?

Ich muss zum Schluss dieser Mittheilung noch einige Bemerkungen zufügen über eine Arbeit von Fuchs*), die den hier vorliegenden Gegenstand ebenfalls behandelt, und deren Studium, zu dem ich neuerdings veranlasst wurde, mich eben zu der einfachen Methode hinleitete, welche ich auseinandersetzte. Fuchs giebt eine allgemeine, aber, wie mir scheint, viel weitläufigere Lösung. Ohne auf dieselbe hier näher eingehen zu wollen, bemerke ich nur, dass die von ihm sogenannten *Primformen* identisch sind mit denjenigen binären Formen, welche lineare Transformationen in sich besitzen, und dass daher die Liste der Primformen niedersten Grades, welches er l. c. p. 126 aufstellt, noch überflüssige Formen enthält. Sie sollte nur umfassen:

die allgemeine biquadratische Form,
die äquianharmonische biquadratische Form,
die linke Seite der Oktaedergleichung ($n=6$),
die linke Seite der Ikosaedergleichung ($n=12$);

die erste der beiden aufgeführten Formen sechsten Grades, sowie die Form achten und die Form zehnten Grades existiren nicht**).

München, Juni 1876.

---

*) Ueber diejenigen Differentialgleichuugen 2. Ordn., welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Borchardt's Journ. Bd. 81. p. 97—142; vergl. Gött. Nachrichten 1875, p. 568—581, p. 612—613.

**) Auch ist es l. c. überflüssig, die allgemeine biquadratische Form mit aufzuzählen, da sie (irrationale) quadratische Covarianten hat, welche durch die nämlichen linearen Transformationen in sich übergehen, wie die Grundform. Dagegen ist die Reduction der Primformenzahl, wie sie Hr. C. Jordan (Comptes Rendus, 13. März 1876) und Hr. Pepin angeben (ebenda 5. Juni), nicht statthaft, was hinsichtlich der Behauptungen von Pepin bereits Hr. Fuchs gezeigt hat (ebenda 26. Juni, 3. Juli). Nach C. Jordan würde der Fall $n=12$ nicht existiren. [Nov. 1876.]

# Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen.

Von L. Königsberger in Dresden.

Herr Tchebichef hat sich im 18ten Bande des Liouville'schen Journals mit den auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbaren Integralen von der Form

$$\int \frac{F_0(x)}{f_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\Theta(x)}}$$

beschäftigt und gezeigt, wie der algebraische Theil dieses Integrales zu bestimmen, die Anzahl der einzelnen logarithmischen Ausdrücke zu ermitteln und wie die analytischen Bedingungen zu finden sind, welche jeden Ausdruck gesondert bestimmen, oder anders ausgedrückt, wie die Form dieser logarithmischen Ausdrücke festgestellt werden kann. Im zweiten Bande der zweiten Serie dieses Journals stellt sich derselbe die Aufgabe, zu zeigen, wie man, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, die logarithmischen Ausdrücke in dem einfachsten Falle, in welchem das Differential eine Quadratwurzel aus einem Polynom dritten oder vierten Grades enthält, auch wirklich finden kann. Herr Weierstrass bemerkt (s. die Monatsberichte der Berliner Akademie aus dem Jahre 1857), „dass bei der angegebenen Beschränkung dieser Aufgabe „dieselbe eigentlich schon vollständig erledigt ist durch die von Abel „in seiner letzten leider unvollendet gebliebenen Arbeit in Betreff der „allgemeinsten unter elliptischen, logarithmischen und algebraischen „Functionen möglichen Relationen entwickelten Principien und dass „sich für elliptische Integrale die ganze Untersuchung am einfachsten „und übersichtlichsten gestaltet, wenn man, nachdem das vorgelegte „Integral durch eine einfache Substitution auf die Form

$$\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

„gebracht worden, wo $F(x)$ eine beliebige rationale Function von $x$ „bedeuten soll,

$$x = \sin^2 \operatorname{am} u$$

„setzt und nun dasselbe als Function von $u$ betrachtet." Auf ähnlichem Wege lässt sich, wie Herr Weierstrass ausspricht, die analoge Untersuchung für Integrale der Form

$$\int F\left(x, \sqrt[m]{R(x)}\right) dx$$

ausführen.

Ich will im Folgenden die Aufgabe zu lösen suchen, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, dass hyperelliptische Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar sind, ohne die Umkehrungsfunctionen der hyperelliptischen Integrale zu benutzen, sondern mich nur auf die Beziehungen stützen, welche ich in meinen letzten Arbeiten über die hyperelliptischen Integrale aufgestellt habe und welche allein genügen werden, das ausgesprochene Problem vollständig zu erledigen und zugleich die Ueberzeugung zu verschaffen, dass genau auf diesem Wege auch für die allgemeinen Abel'schen Integrale die Frage behandelt werden kann.

Sei

$$R(z) = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1}) \tag{1}$$

und

$$\int f\left(z, \sqrt{R(z)}\right) dz, \tag{a}$$

worin $f$ eine rationale Function von $z$ und $\sqrt{R(z)}$ bedeutet, in Betreff der Möglichkeit der Reduction auf algebraisch-logarithmische Functionen zu untersuchen (der unpaare Grad des Polynoms $R(z)$ giebt bekanntlich keine Beschränkung der Allgemeinheit des gestellten Problems), so ist ersichtlich, dass man sich nur mit einem Integrale von der Form

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}, \tag{b}$$

worin $F(z)$ eine rationale Function von $z$ bedeutet, wird zu beschäftigen haben, da sich das vorgelegte stets auf ein solches und ein Integral einer rationalen Function von $z$ zurückführen lässt, welches letztere durch eine algebraisch-logarithmische Function dargestellt werden kann.

Fragen wir zuerst nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein Integral von der Form (b) auf eine algebraische Function von $z$ oder mit Berücksichtigung des bekannten Abel'schen Satzes auf eine rationale Function von $z$ und $\sqrt{R(z)}$ reducirbar ist, so wird, wenn

$$z_1, z_2, \cdots z_n$$

die Werthe von $z$ bedeuten, für welche $F(z)$ unendlich wird, mit Hülfe der in meiner Arbeit: „über die Entwicklung der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Reihen" (Mathematische Annalen

Band IX, Heft 4) für die Zerlegung eines hyperelliptischen Integrales eingeführten Bezeichnungen die Gleichung statthaben müssen:

$$(2)\quad C_1\int\frac{\sqrt{R(z_1)}\,dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}}+C_2\int\frac{\sqrt{R(z_2)}\,dz}{(z-z_2)\sqrt{R(z)}}+\cdots+C_r\int\frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}}$$
$$+l^{(0)}\int\frac{z^{2p-1}dz}{\sqrt{R(z)}}+l^{(1)}\int\frac{z^{2p-2}dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+l^{(p-1)}\int\frac{z^p\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+k^{(p)}\int\frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}}+k^{(p+1)}\int\frac{z^{p-2}dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+k^{(2p-1)}\int\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}+f(z)\sqrt{R(z)}$$
$$=q\sqrt{R(z)},$$

worin die Grössen

$$C_1,\ C_2,\ \cdots C_n,\quad l^{(0)},\ l^{(1)},\ \cdots l^{(p-1)},\quad k^{(p)},\ k^{(p+1)},\ \cdots k^{(2p-1)},\quad f(z)$$

die dort näher angegebenen Werthe haben und $q$ eine rationale Function von $z$ bedeutet.

Da nun die Integrale dritter Gattung auf der linken Seite der Gleichung (2) in $z_1, z_2, \cdots z_n$ logarithmisch unendlich werden und sonst logarithmische Unstetigkeiten in dieser Gleichung nicht vorkommen, so müssen diese aus der in $z$ identischen Gleichung herausfallen, und es ergeben sich somit zunächst als nothwendige Bedingungen für die Reduction des hyperelliptischen Integrales auf eine algebraische Function

$$C_1=C_2=\cdots=C_n=0,$$

da diese die Coefficienten der Unstetigkeitsfunctionen

$$\log(z-z_1),\ \log(z-z_2),\ \cdots\ \log(z-z_n)$$

sind.

Um weitere nothwendige Bedingungen zu finden, bemerke man, dass nunmehr nach der obigen Gleichung eine Summe von Integralen erster und zweiter Gattung (wobei wir als Integrale zweiter Gattung diejenigen der obigen Gleichung bezeichnen, welche im Verzweigungspunkte $z=\infty$ algebraisch unendlich werden) einer algebraischen Function oder vielmehr einer aus $z$ und $\sqrt{R(z)}$ rational zusammengesetzten Function gleich sein soll, und dass somit die an den $2p$ Querschnitten

$$a_1,\ a_2,\ \cdots a_p,\quad b_1,\ b_2,\ \cdots b_p$$

(ich verweise auf meine im Crelle'schen Journal Bd. 81, Heft 3 veröffentlichte Arbeit über die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen) stattfindenden Stetigkeitssprünge der linken Seite der obigen Gleichung, wenn man $f(z)\sqrt{R(z)}$ mit $q\sqrt{R(z)}$ vereinigt denkt, verschwinden müssen. Bezeichnet man nun die Stetigkeitssprünge des Integrales erster Gattung

$$J^{(\varrho)}(z) = \int \frac{z^\varrho dz}{\sqrt{R(z)}},$$

worin $\varrho = 0, 1, 2, \cdots p-1$ sein soll, an dem $a_k$- und $b_k$-Querschnitte mit

$$J^{(\varrho)}_{a_k} \text{ und } J^{(\varrho)}_{b_k},$$

die Stetigkeitssprünge des Integrales zweiter Gattung

$$E^{(\sigma)}(z) = \int \frac{z^\sigma dz}{\sqrt{R(z)}},$$

worin $\sigma = p, p+1, \cdots 2p-1$ ist, an dem $a_k$- und $b_k$-Querschnitte mit

$$E^{(\sigma)}_{a_k} \text{ und } E^{(\sigma)}_{b_k},$$

so folgen leicht mit Rücksicht auf die am angegebenen Orte ausgeführte Zerschneidung der zu $\sqrt{R(z)}$ gehörigen Riemann'schen Fläche die Beziehungen

$$J^{(\varrho)}_{a_k} = -2\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} dJ^{(\varrho)}(z) - 2\int_{a_{2k+2}}^{a_{2k+3}} dJ^{(\varrho)}(z) - \cdots - 2\int_{a_{2p}}^{a_{2p+1}} dJ^{(\varrho)}(z)$$

$$J^{(\varrho)}_{b_k} = -2\int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} dJ^{(\varrho)}(z)$$

$$E^{(\sigma)}_{a_k} = -2\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} dE^{(\sigma)}(z) - 2\int_{a_{2k+2}}^{a_{2k+3}} dE^{(\sigma)}(z) - \cdots - 2\int_{a_{2p}}^{a_{2p+1}} dE^{(\sigma)}(z)$$

$$E^{(\sigma)}_{b_k} = -2\int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} dE^{(\sigma)}(z),$$

worin die in $J^{(\varrho)}_{a_k}$ und $E^{(\varrho)}_{a_k}$ vorkommenden Grössen

$$dJ^{(\varrho)}(z) \text{ und } dE^{(\sigma)}(z)$$

die im oberen Blatte genommenen Werthe, die in $J^{(\varrho)}_{b_k}$ und $E^{(\sigma)}_{b_k}$ vorkommenden die auf der oberen Seite des Verzweigungsschnittes in eben diesem Blatte genommenen Werthe eben dieser Functionen bedeuten.

Da nun nach dem Obigen die Stetigkeitssprünge der linken Seite der Gleichung an den $a_k$- und $b_k$-Querschnitten verschwinden müssen,

so werden mit Rücksicht auf die eingeführten Bezeichnungen die Gleichungen bestehen müssen:

$$k^{(2p-1)}J^{(0)}_{a_1}+k^{(2p-2)}J^{(1)}_{a_1}+\cdots+k^{(p)}J^{(p-1)}_{a_1}+l^{(p-1)}E^{(p)}_{a_1}+l^{(p-2)}E^{(p+1)}_{a_1}+\cdots+l^{(0)}E^{(2p-1)}_{a_1}=0,$$

$$k^{(2p-1)}J^{(0)}_{b_1}+k^{(2p-2)}J^{(1)}_{b_1}+\cdots+k^{(p)}J^{(p-1)}_{b_1}+l^{(p-1)}E^{(p)}_{b_1}+l^{(p-2)}E^{(p+1)}_{b_1}+\cdots+l^{(0)}E^{(2p-1)}_{b_1}=0,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$k^{(2p-1)}J^{(0)}_{a_p}+k^{(2p-2)}J^{(1)}_{a_p}+\cdots+k^{(p)}J^{(p-1)}_{a_p}+l^{(p-1)}E^{(p)}_{a_p}+l^{(p-2)}E^{(p+1)}_{a_p}+\cdots+l^{(0)}E^{(2p-1)}_{a_p}=0,$$

$$k^{(2p-1)}J^{(0)}_{b_p}+k^{(2p-2)}J^{(1)}_{b_p}+\cdots+k^{(p)}J^{(p-1)}_{b_p}+l^{(p-1)}E^{(p)}_{b_p}+l^{(p-2)}E^{(p+1)}_{b_p}+\cdots+l^{(0)}E^{(2p-1)}_{b_p}=0,$$

und es wird aus diesen folgen, dass

$$k^{(2p-1)}=k^{(2p-2)}=\cdots=k^{(p)}=l^{(p-1)}=l^{(p-2)}=\cdots=l^{(0)}=0$$

sein muss, wenn gezeigt werden kann, dass die aus den obigen Periodicitätsmoduln bestehende Determinante *nie* verschwindet.

Setzt man aber

$$\eta_{a1}=\int_{a_1}^{a_2}\frac{z^a\,dz}{\sqrt{R(z)}},\quad \eta_{a2}=\int_{a_2}^{a_3}\frac{z^a\,dz}{\sqrt{R(z)}},\quad\cdots\quad \eta_{a2p}=\int_{a_{2p}}^{a_{2p+1}}\frac{z^a\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

wobei die Integration wieder wie oben für

$$\eta_{a2},\ \eta_{a4},\ \cdots\ \eta_{a2p}$$

im oberen Blatte, für

$$\eta_{a1},\ \eta_{a3},\ \cdots\ \eta_{a2p-1}$$

auf der oberen Seite der Verzweigungsschnitte in eben diesem Blatte genommen werden sollen, so ergeben sich unmittelbar die Beziehungen

$$J^{(\varrho)}_{a_k}=-2\eta_{\varrho 2k}-2\eta_{\varrho 2k+2}-\cdots-2\eta_{\varrho 2p},$$

$$J^{(\varrho)}_{b_k}=-2\eta_{\varrho 2k-1},$$

$$E^{(\sigma)}_{a_k}=-2\eta_{\sigma 2k}-2\eta_{\sigma 2k+2}-\cdots-2\eta_{\sigma 2p},$$

$$E^{(\sigma)}_{b_k}=-2\eta_{\sigma 2k-1}.$$

Setzt man nun

$$H=\begin{vmatrix}\eta_{01} & \eta_{02} & \cdots & \eta_{02p}\\ \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{12p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \eta_{2p-11} & \eta_{2p-12} & \cdots & \eta_{2p-12p}\end{vmatrix},\tag{3}$$

so folgt aus den eben aufgestellten Beziehungen auch

$$(4) \qquad H = \frac{1}{2^{2p}} \begin{vmatrix} J_{b_1}^{(0)} & J_{a_1}^{(0)} & \cdots & J_{a_p}^{(0)} \\ J_{b_1}^{(1)} & J_{a_1}^{(1)} & \cdots & J_{a_p}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{b_1}^{(p-1)} & J_{a_1}^{(p-1)} & \cdots & J_{a_p}^{(p-1)} \\ E_{b_1}^{(p)} & E_{a_1}^{(p)} & \cdots & E_{a_p}^{(p)} \\ E_{b_1}^{(p+1)} & E_{a_1}^{(p+1)} & \cdots & E_{a_p}^{(p+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_{b_1}^{(2p-1)} & E_{a_1}^{(2p-1)} & \cdots & E_{a_p}^{(2p-1)} \end{vmatrix}$$

und es wird daher die Determinante des obigen in den Perioden linearen Gleichungssystems den Werth

$$(-1)^p 2^{2p} \cdot H$$

annehmen. Nun hat aber Herr Fuchs in seiner Arbeit: „über eine rationale Verbindung der Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale“ (Crelle's Journal Bd. 71, Heft 2) den schon früher von den Herren Catalan und Enneper für reelle Lösungen des Polynoms $R(z)$ nach dem Vorgange von Haedenkamp entwickelten Werth der Determinante $H$ für beliebige complexe Lösungen des Polynoms in der Form gefunden:

$$H = \frac{(-1)^{\frac{p}{2}} (2\pi)^p}{1 \cdot 3 \cdots (2p-3)(2p-1)},$$

und es wird somit die Determinante des oben aufgestellten Gleichungssystems den *stets* von Null verschiedenen numerischen Werth

$$\frac{(-1)^{\frac{3p}{2}} 2^{3p} \pi^p}{1 \cdot 3 \cdots (2p-3)(2p-1)}$$

annehmen. Es folgt daraus, dass in der obigen reducirten Gleichung sämmtliche Coefficienten der Integrale erster und zweiter Gattung verschwinden müssen.

Dass aber auch das Verschwinden sämmtlicher $k$, $l$, $C$ oder der Integrale erster, zweiter und dritter Gattung für die Reduction eines hyperelliptischen Integrales auf eine algebraische Function hinreichend ist, geht unmittelbar aus der Gleichung (2) hervor, und wenn wir somit die in meiner oben citirten Arbeit hergeleiteten Werthe der $k$, $l$, $C$ benutzen, so ergeben sich als nothwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass das Integral

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

auf algebraische Functionen reducirbar ist, die folgenden:

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} = 0, \cdots \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_1^n{}^{\alpha} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0,$$

wenn

$$R(z) = A z^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \cdots + B_{2p-1} z + B_{2p},$$

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p-2r+1}{2} B_1 t^{r-2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{2p-r+3}{2} B_{r-3} t^2 + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1}$$

und

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots p-1,\ p,\ \cdots 2p-1$$

gesetzt wird.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist auch der algebraische Werth des vorgelegten hyperelliptischen Integrales gefunden, indem derselbe, wie aus der Gleichung (2) zu ersehen,

$$f(z)\sqrt{R(z)},$$

oder

$$\left\{\sum_1^n{}^{\alpha} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\} \sqrt{R(z)}$$

ist.

Wir werfen weiter die Frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, dass ein hyperelliptisches Integral

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

auf algebraische und logarithmische Functionen von $z$ reducirbar ist oder wiederum nach jenem bekannten Abel'schen Satze auf rationale Functionen von $z$ und $\sqrt{R(z)}$ und auf Logarithmen eben solcher Functionen.

Setzt man in der hypothetisch angenommenen Gleichung $-\sqrt{R(z)}$ statt $\sqrt{R(z)}$ und zieht die so erhaltene Gleichung von der ersteren ab, so ergiebt sich als zu befriedigende Gleichung die folgende:

$$(5)\quad C_1\int\frac{\sqrt{R(z_1)}\,dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}}+C_2\int\frac{\sqrt{R(z_2)}\,dz}{(z-z_2)\sqrt{R(z)}}+\cdots+C_n\int\frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}}$$
$$+l^{(0)}\int\frac{z^{2p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+l^{(1)}\int\frac{z^{2p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+l^{(p-1)}\int\frac{z^p\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+k^{(p)}\int\frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+k^{(p+1)}\int\frac{z^{p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+k^{(2p-1)}\int\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+f(z)\sqrt{R(z)}$$
$$=A_1\log\left(\frac{p_1-q_1\sqrt{R(z)}}{p_1+q_1\sqrt{R(z)}}\right)+A_2\log\left(\frac{p_2-q_2\sqrt{R(z)}}{p_2+q_2\sqrt{R(z)}}\right)+\cdots+A_m\log\left(\frac{p_m-q_m\sqrt{R(z)}}{p_m+q_m\sqrt{R(z)}}\right)$$
$$+q\sqrt{R(z)},$$

in welcher

$$p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2,\ \cdots p_m,\ q_m,\ q$$

rationale Functionen von $z$ bedeuten.

Vor Allem darf angenommen werden, dass zwischen den Grössen

$$A_1,\ A_2,\ \cdots A_m$$

nicht eine ganzzahlige homogene lineare Gleichung

$$r_1A_1+r_2A_2+\cdots+r_mA_m=0$$

besteht, da man sonst

$$A_m=-\frac{r_1}{r_m}A_1-\frac{r_2}{r_m}A_2-\cdots-\frac{r_{m-1}}{r_m}A_{m-1}$$

setzen und die rechte Seite der Gleichung (5), wenn

$$(p_1-q_1\sqrt{R(z)})^{r_m}(p_m+q_m\sqrt{R(z)})^{r_1}=P_1-Q_1\sqrt{R(z)}$$

gesetzt wird, in die Form

$$\frac{A_1}{r_m}\log\left(\frac{P_1-Q_1\sqrt{R(z)}}{P_1+Q_1\sqrt{R(z)}}\right)+\frac{A_2}{r_m}\log\left(\frac{P_2-Q_2\sqrt{R(z)}}{P_2+Q_2\sqrt{R(z)}}\right)+\cdots+\frac{A_{m-1}}{r_m}\log\left(\frac{P_{m-1}-Q_{m-1}\sqrt{R(z)}}{P_{m-1}+Q_{m-1}\sqrt{R(z)}}\right)$$
$$+q\sqrt{R(z)}$$

bringen kann, welche dann der weiteren Untersuchung zu Grunde zu legen wäre.

Es war schon hervorgehoben worden, dass die linke Seite der Gleichung (5) für die Werthe $z_1,\ z_2,\ \cdots z_n$ und nur für diese logarithmisch unendlich wird und zwar auf beiden Blättern mit den logarithmischen Gliedern

$$\pm C_1\log(z-z_1),\ \pm C_2\log(z-z_2),\ \cdots\pm C_n\log(z-z_n)$$

und es wird somit auch die rechte Seite für diese Werthe logarithmisch unendlich sein müssen und nur für diese. Untersucht man nun einen

einzelnen der logarithmischen Posten auf der rechten Seite der Gleichung (5)

$$A_k \log\left(\frac{p_k - q_k\sqrt{R(z)}}{p_k + q_k\sqrt{R(z)}}\right),$$

so wird das Argument desselben nur und immer Null oder unendlich, also der Logarithmus in allen Fällen unendlich für Lösungen der Gleichung:

$$p_k^2 - q_k^2 R(z) = 0, \tag{6}$$

wenn diese nicht zu den Verzweigungswerthen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{2p+1}$ gehören, oder wenn diese Gleichung nicht durch die den beiden Gleichungen

$$p_k = 0 \text{ und } R(z) = 0$$

gemeinsamen Lösungen befriedigt wird, indem wir die gemeinsamen Factoren von $p_k$ und $q_k$ bereits aus dem Logarithmanden herausgeschafft denken. Alle übrigen Lösungen der Gleichung (6) nun werden zu den oben angegebenen Werthen $z_1, z_2, \cdots z_n$ gehören müssen; denn wenn diese Gleichung z. B. die Lösung $z'$ und zwar $\tau_k$mal hat, so wird,

$$(p_k - q_k\sqrt{R(z)})\,(p_k + q_k\sqrt{R(z)}) = (z - z')^{\tau_k}\,\varphi(z)\quad .$$

sein, worin $\varphi(z)$ für $z = z'$ endlich und von Null verschieden ist und daher

$$\log(p_k - q_k\sqrt{R(z)}) + \log(p_k + q_k\sqrt{R(z)}) = \tau_k \log(z - z') + \log\varphi(z);$$

somit wird, je nachdem die Irrationalität aus der einen oder andern Beziehung

$$\sqrt{R(z')} = \frac{p_k}{q_k} \text{ oder } \sqrt{R(z')} = -\frac{p_k}{q_k}$$

bestimmt wird, das durch jenen logarithmischen Posten gelieferte logarithmische Unstetigkeitsglied

$$\tau_k A_k \log(z - z') \text{ oder } -\tau_k A_k \log(z - z')$$

sein; da aber die rechte Seite der Gleichung (5) nur für die Werthe $z_1, z_2, \cdots z$ logarithmisch unendlich werden darf, so müsste sich, wenn $z'$ nicht zu dieser Werthereihe gehörte, das eben gefundene Unstetigkeitsglied gegen andere mit derselben Unstetigkeit fortheben und es müsste dann eine Gleichung von der Form bestehen

$$\pm\tau_1 A_1 \pm \tau_2 A_2 \pm \cdots \pm \tau_m A_m = 0,$$

was oben ausdrücklich ausgeschlossen war; man wird somit

$$(7)\quad \begin{cases} p_1^2 - q_1^2 R(z) = M_1 (z-\zeta_{11})^{\tau_{11}} (z-\zeta_{12})^{\tau_{12}} \cdots (z-\zeta_{1h_1})^{\tau_{1h_1}} \\ p_2^2 - q_2^2 R(z) = M_2 (z-\zeta_{21})^{\tau_{21}} (z-\zeta_{22})^{\tau_{22}} \cdots (z-\zeta_{2h_2})^{\tau_{2h_2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_m^2 - q_m^2 R(z) = M_m (z-\zeta_{m1})^{\tau_{m1}} (z-\zeta_{m2})^{\tau_{m2}} \cdots (z-\zeta_{mh_m})^{\tau_{mh_m}} \end{cases}$$

setzen dürfen, worin alle $\zeta$-Werthe, von den Verzweigungswerthen abgesehen, zu den Werthen $z_1, z_2, \cdots z_n$ gehören.

Machen wir nun allgemein die Annahme, dass in der oben hypothetisch angesetzten Gleichung (5) zwischen den Grössen

$$C_1, C_2, \cdots C_n$$

eine Anzahl von linearen homogenen ganzzahligen Relationen bestehe von der Form

$$(8)\quad \begin{cases} T_{11} C_1 + T_{12} C_2 + \cdots + T_{1n} C_n = 0, \\ T_{21} C_1 + T_{22} C_2 + \cdots + T_{2n} C_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_{n-k1} C_1 + T_{n-k2} C_2 + \cdots + T_{n-kn} C_n = 0, \end{cases}$$

die von einander unabhängig sein sollen, so wird man $n-k$ der Grössen $C$, z. B.

$$C_{k+1}, C_{k+2}, \cdots C_n,$$

durch

$$(k)\qquad C_1, C_2, \cdots C_k$$

homogen, linear mit rationalen Coefficienten ausdrücken und annehmen können, dass zwischen den Grössen der Reihe (k) nicht mehr eine lineare homogene ganzzahlige Relation stattfindet.

Stellt man diese Relationen in der Form dar:

$$(9)\quad \begin{cases} D \cdot C_{k+1} = \lambda_{11} C_1 + \lambda_{12} C_2 + \cdots + \lambda_{1k} C_k, \\ D \cdot C_{k+2} = \lambda_{21} C_1 + \lambda_{22} C_2 + \cdots + \lambda_{2k} C_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D \cdot C_n = \lambda_{n-k1} C_1 + \lambda_{n-k2} C_2 + \cdots + \lambda_{n-kk} C_k, \end{cases}$$

worin die Grössen $D$ und $\lambda$ ganze Zahlen bedeuten, so geht die zu befriedigende Gleichung (5), aus deren Existenz wir nothwendige Bedingungen herleiten wollen, in

$$
\begin{aligned}
10)\quad & \frac{C_1}{D}\left\{D\int\frac{\sqrt{R(z_1)}\,dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}}+\lambda_{11}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\,dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}}+\lambda_{21}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+2})}\,dz}{(z-z_{k+2})\sqrt{R(z)}}+\cdots\right.\\
& \qquad\left.\cdots+\lambda_{n-k\,1}\int\frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}}\right\}\\
& +\frac{C_2}{D}\left\{D\int\frac{\sqrt{R(z_2)}\,dz}{(z-z_2)\sqrt{R(z)}}+\lambda_{12}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\,dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}}+\lambda_{22}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+2})}\,dz}{(z-z_{k+2})\sqrt{R(z)}}+\cdots\right.\\
& \qquad\left.\cdots+\lambda_{n-k\,2}\int\frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}}\right\}\\
& +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
& +\frac{C_k}{D}\left\{D\int\frac{\sqrt{R(z_k)}\,dz}{(z-z_k)\sqrt{R(z)}}+\lambda_{1\,k}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\,dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}}+\lambda_{2\,k}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+2})}\,dz}{(z-z_{k+2})\sqrt{R(z)}}+\cdots\right.\\
& \qquad\left.\cdots+\lambda_{n-k\,k}\int\frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}}\right\}\\
& +l^{(0)}\int\frac{z^{2p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+l^{(1)}\int\frac{z^{2p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+l^{(p-1)}\int\frac{z^p\,dz}{\sqrt{R(z)}}\\
& +k^{(p)}\int\frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+k^{(p+1)}\int\frac{z^{p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+k^{(2p-1)}\int\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}+f(z)\sqrt{R(z)}\\
& =A_1\log\left(\frac{p_1-q_1\sqrt{R(z)}}{p_1+q_1\sqrt{R(z)}}\right)+A_2\log\left(\frac{p_2-q_2\sqrt{R(z)}}{p_2+q_2\sqrt{R(z)}}\right)+\cdots+A_m\log\left(\frac{p_m-q_m\sqrt{R(z)}}{p_m+q_m\sqrt{R(z)}}\right)\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+q\sqrt{R(z)}
\end{aligned}
$$

über.

Bezeichnet man mit $\tau_r^{(s)}$ die Zahl, welche angiebt, wie oft die $r^{\text{te}}$ der Gleichungen (7) die Lösung $z_s$ enthält, so werden in Folge der Gleichheit der Coefficienten der logarithmischen Unstetigkeiten in den Punkten $z_1, z_2, \cdots z_k$ auf beiden Seiten der Gleichung (10) die Beziehungen statthaben müssen:

$$
(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
C_1 &= \tau_1^{(1)}A_1+\tau_2^{(1)}A_2+\cdots+\tau_m^{(1)}A_m,\\
C_2 &= \tau_1^{(2)}A_1+\tau_2^{(2)}A_2+\cdots+\tau_m^{(2)}A_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_k &= \tau_1^{(k)}A_1+\tau_2^{(k)}A_2+\cdots+\tau_m^{(k)}A_m,
\end{aligned}\right.
$$

aus denen zuerst unmittelbar ersichtlich ist, dass $m \geq k$ sein muss, weil sonst eine homogene lineare ganzzahlige Relation zwischen den als von einander unabhängig vorausgesetzten Grössen $C_1, C_2, \cdots C_k$ sich ergeben würde. Ist aber $m \geq k$, so können wir die Grössen

$$A_{m-k+1},\ A_{m-k+2},\ \cdots A_m$$

homogen linear und rational durch die Grössen

$$C_1,\ C_2,\ \cdots C_k,\quad A_1,\ A_2,\ \cdots A_{m-k}$$

ausdrücken und die rechte Seite der Gleichung (10) würde sich in die Form bringen lassen

$$\frac{C_1}{n_1}\log\left(\frac{P_1-Q_1\sqrt{R(z)}}{P_1+Q_1\sqrt{R(z)}}\right)+\frac{C_2}{n_2}\log\left(\frac{P_2-Q_2\sqrt{R(z)}}{P_2+Q_2\sqrt{R(z)}}\right)+\cdots+\frac{C_k}{n_k}\log\left(\frac{P_k-Q_k\sqrt{R(z)}}{P_k+Q_k\sqrt{R(z)}}\right)$$
$$+\frac{A_1}{n_{k+1}}\log\left(\frac{P_{k+1}-Q_{k+1}\sqrt{R(z)}}{P_{k+1}+Q_{k+1}\sqrt{R(z)}}\right)+\cdots+\frac{A_{m-k}}{n_m}\log\left(\frac{P_m-Q_m\sqrt{R(z)}}{P_m+Q_m\sqrt{R(z)}}\right)$$

worin

$$n_1,\ n_2,\ \cdots n_m$$

ganze Zahlen bedeuten. Man sieht aber, dass sich hieraus wieder durch Gleichsetzen der Coefficienten der Unstetigkeitsfunctionen in den Punkten $z_1, z_2, \cdots z_k$ auf beiden Seiten der jetzt auf der rechten Seite reducirten Gleichung (10) eine Reihe von homogenen, linearen ganzzahligen Beziehungen von der Form

$$\begin{aligned}
\mu_1 C_1 &= \nu_{11}A_1+\nu_{12}A_2+\cdots+\nu_{1m-k}A_{m-k},\\
\mu_2 C_2 &= \nu_{21}A_1+\nu_{22}A_2+\cdots+\nu_{2m-k}A_{m-k},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mu_k C_k &= \nu_{k1}A_1+\nu_{k2}A_2+\cdots+\nu_{km-k}A_{m-k}
\end{aligned}$$

ergeben wird, welche wiederum eine Reihe der $A$ durch die $C$ und die übrig bleibenden $A$ auszudrücken erlaubt; fährt man so fort, so kann man in der hypothetisch angenommenen Gleichung allmählig alle $A$ fortschaffen und wird schliesslich nur als Coefficienten der logarithmischen Glieder der Gleichung (10) die Grössen $C_1, C_2, \cdots C_k$, mit rationalen Coefficienten versehen, übrig behalten, so dass wir — um die ganze Gleichung (10) nicht noch einmal hinzuschreiben — uns die rechte Seite in die Form gesetzt denken können:

$$(\varrho)\cdots\varrho_1 C_1\log\left(\frac{P^{(1)}-Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}{P^{(1)}+Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}\right)+\varrho_2 C_2\log\left(\frac{P^{(2)}-Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}{P^{(2)}+Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\varrho_k C_k\log\left(\frac{P^{(k)}-Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}{P^{(k)}+Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}\right)+q\sqrt{R(z)},$$

worin

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \cdots \varrho_k$$

rationale Zahlen bedeuten und die Gleichungen

$$P^{(1)^2}-Q^{(1)^2}R(z)=0,\ P^{(2)^2}-Q^{(2)^2}R(z)=0,\ \cdots\ P^{(k)^2}-Q^{(k)^2}R(z)=0,$$

von den Verzweigungswerthen abgesehen, nur die Werthe $z_1, z_2, \cdots z_n$ zu Lösungen haben, und zwar die Gleichung

$$P^{(i)2} - Q^{(i)2} R(z) = 0$$

nur die Lösungen

$$z_i,\ z_{k+1},\ z_{k+2},\ \cdots\ z_n,$$

und zwar

$$t_0^{(i)2},\ t_1^{(i)},\ \cdots\ t_{n-k}^{(i)}$$

fach.

Endlich ist aus der Gleichung (10) mit der rechten Seite ($\varrho$) unmittelbar zu sehen, dass

$$1 = \varrho_1 t_0^{(1)},\quad 1 = \varrho_2 t_0^{(2)},\ \cdots\ 1 = \varrho_k t_0^{(k)},$$

$$\frac{\lambda_{\sigma 1}}{D} C_1 + \frac{\lambda_{\sigma 2}}{D} C_2 + \cdots + \frac{\lambda_{\sigma k}}{D} C_k = \varrho_1 t_\sigma^{(1)} C_1 + \varrho_2 t_\sigma^{(2)} C_2 + \cdots + \varrho_k t_\sigma^{(k)} C_k,$$

woraus folgt, weil eine lineare homogene rationale Beziehung zwischen den Grössen $C_1, C_2, \cdots C_k$ nicht stattfinden darf, dass

$$\frac{\lambda_{\sigma 1}}{D} = \frac{t_\sigma^{(1)}}{t_0^{(1)}},\quad \frac{\lambda_{\sigma 2}}{D} = \frac{t_\sigma^{(2)}}{t_0^{(2)}},\ \cdots\ \frac{\lambda_{\sigma k}}{D} = \frac{t_\sigma^{(k)}}{t_0^{(k)}}$$

sein muss.

Wir erhalten somit das folgende Resultat: wenn ein hyperelliptisches Integral auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar sein soll, so muss nach Zerlegung desselben in die Integrale der drei Gattungen und den algebraischen Theil nach der oben angegebenen Methode und nach Reduction der Coefficienten der Hauptintegrale dritter Gattung auf die von einander unabhängigen, die hypothetisch vorausgesetzte Gleichung in die Form gebracht werden können:

$$\begin{aligned}
(12)\quad & C_1 t_0^{(2)} t_0^{(3)} \cdots t_0^{(k)} \left\{ t_0^{(1)} \int \frac{\sqrt{R(z_1)}\, dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}} + t_1^{(1)} \int \frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\, dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}} + \cdots \right. \\
& \qquad \left. \cdots + t_{n-k}^{(1)} \int \frac{\sqrt{R(z_n)}\, dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}} \right\} \\
& + C_2 t_0^{(1)} t_0^{(3)} \cdots t_0^{(k)} \left\{ t_0^{(2)} \int \frac{\sqrt{R(z_2)}\, dz}{(z-z_2)\sqrt{R(z)}} + t_1^{(2)} \int \frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\, dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}} + \cdots \right. \\
& \qquad \left. \cdots + t_{n-k}^{(2)} \int \frac{\sqrt{R(z_n)}\, dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}} \right\} \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + C_k t_0^{(1)} t_0^{(2)} \cdots t_0^{(k-1)} \left\{ t_0^{(k)} \int \frac{\sqrt{R(z_k)}\, dz}{(z-z_k)\sqrt{R(z)}} + t_1^{(k)} \int \frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\, dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}} + \cdots \right. \\
& \qquad \left. \cdots + t_{n-k}^{(k)} \int \frac{\sqrt{R(z_n)}\, dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}} \right\}
\end{aligned}$$

$$+t_0^{(1)}t_0^{(2)}\cdots t_0^{(k)}\left\{\begin{array}{l} l^{(0)}\int\frac{z^{2p-1}dz}{\sqrt{R(z)}}+\ l^{(1)}\int\frac{z^{2p-2}dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+l^{(p-1)}\int\frac{z^{p}dz}{\sqrt{R(z)}} \\ +k^{(p)}\int\frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}}+k^{(p+1)}\int\frac{z^{p-2}dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+k^{(2p-1)}\int\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \end{array}\right\}$$

$$+t_0^{(1)}t_0^{(2)}\cdots t_0^{(k)}f(z)\sqrt{R(z)}$$

$$=C_1t_0^{(2)}t_0^{(3)}\cdots t_0^{(k)}\log\left(\frac{P^{(1)}-Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}{P^{(1)}+Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}\right)+C_2t_0^{(1)}t_0^{(3)}\cdots t_0^{(k)}\log\left(\frac{P^{(2)}-Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}{P^{(2)}+Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}\right)$$

$$+\cdots+C_kt_0^{(1)}t_0^{(2)}\cdots t_0^{(k-1)}\log\left(\frac{P^{(k)}-Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}{P^{(k)}+Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}\right)+t_0^{(1)}t_0^{(2)}\cdots t_0^{(k)}q\sqrt{R(z)},$$

worin die Gleichung

$$P^{(i)2}-Q^{(i)2}R(z)=0,$$

von den Verzweigungswerthen abgesehen, nur die Lösungen

$$z_i,\ z_{k+1},\ z_{k+2},\ \cdots\ z_n$$

und zwar

$$t_0^{(i)},\ t_1^{(i)},\ t_2^{(i)},\ \cdots\ t_{n-k}^{(i)}$$

fach hat, oder worin, wie aus dem Abel'schen Theorem für hyperelliptische Integrale bekannt ist, die Werthe $z_i,\ z_{k+1},\ z_{k+2},\ \cdots\ z_n$ der Gleichung genügen

$$(13)\quad t_0^{(i)}\int_{z_i^-}^{z_i^+}dJ^{(\varrho)}(z)+t_1^{(i)}\int_{z_{k+1}^-}^{z_{k+1}^+}dJ^{(\varrho)}(z)+\cdots+t_{n-k}^{(i)}\int_{z_n^-}^{z_n^+}dJ^{(\varrho)}(z)=0,$$

oder

$$t_0^{(i)}\int_{\alpha}^{z_i}dJ^{(\varrho)}(z)+t_1^{(i)}\int_{\alpha}^{z_{k+1}}dJ^{(\varrho)}(z)+\cdots+t_{n-k}^{(i)}\int_{\alpha}^{z_n}dJ^{(\varrho)}(z)=L,$$

wenn $J^{(\varrho)}(z)$ irgend ein Integral erster Gattung, $L$ eine Summe von halben Periodicitätsmoduln dieses Integrales und $\alpha$ einen Verzweigungswerth bezeichnet.

Greifen wir nunmehr eine der obigen Gleichungen

$$P^{(i)2}-Q^{(i)2}R(z)=0$$

heraus, so findet nach der in meiner oben erwähnten Arbeit entwickelten Formel (23) die Beziehung statt:

$$(14)\quad t_0^{(i)}\int dH(z,z_i^+,z_i^-)+t_1^{(i)}\int dH(z,z_{k+1}^+,z_{k+1}^-)+\cdots+t_{n-k}^{(i)}\int dH(z,z_n^+,z_n^-$$

$$=\log\left(\frac{P^{(i)}-Q^{(i)}\sqrt{R(z)}}{P^{(i)}+Q^{(i)}\sqrt{R(z)}}\right),$$

worin

$$H(z, z_r^+, z_r^-)$$

ein hyperelliptisches Hauptintegral dritter Gattung bedeutet, welches im Punkte $z_r$ auf beiden Blättern logarithmisch unendlich wird mit der positiven und negativen Einheit als Coefficienten der Unstetigkeitsfunction, und dessen sämmtliche Periodicitätsmoduln an den $a$- oder an den $b$-Querschnitten — wir wählen hier die letzteren — verschwinden.

Nun ist aber auch, wie sofort zu sehen

$$\int \frac{\sqrt{R(z_r)}\, dz}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}}$$

ein Hauptintegral dritter Gattung, da es als Coefficienten der logarithmischen Unstetigkeiten in $z_r^+$ und $z_r^-$ ebenfalls die positive und negative Einheit hat, und es wird somit nach bekannten Schlüssen

$$(15)\quad \int dH(z, z_r^+, z_r^-) = \int \frac{\sqrt{R(z_r)}\, dz}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}} + c_{r1}u_1 + c_{r2}u_2 + \cdots + c_{rp}u_p$$

sein, wenn $u_1, u_2, \cdots u_p$ Integrale erster Gattung bedeuten, welche so beschaffen sind, dass $u_k$ an allen $b$-Querschnitten den Stetigkeitssprung 0, nur am $b_k$-Querschnitte den Sprung 1 hat, und

$$c_{r1}, c_{r2}, \cdots c_{rp}$$

so zu bestimmen sind, dass das Hauptintegral dritter Gattung auf der linken Seite der Gleichung (15) an allen $b$-Querschnitten verschwindende Stetigkeitssprünge hat. Setzt man dann wie früher

$$J^{(\varrho)}(z) = \int \frac{z^\varrho\, dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad J_{b_k}^{(\varrho)} = -2\int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} dJ^{(\varrho)}(z),$$

so wird $u_k$ durch die Grössen $J^{(\varrho)}(z)$ linear in der Form ausgedrückt sein

$$(16)\qquad u_k = d_{k0}J^{(0)}(z) + d_{k1}J^{(1)}(z) + \cdots + d_{kp-1}J^{(p-1)}(z)$$

und die $d$ müssen den Gleichungen genügen

$$(17)\quad \begin{cases} d_{k0}J_{b_1}^{(0)} + d_{k1}J_{b_1}^{(1)} + \cdots + d_{kp-1}J_{b_1}^{(p-1)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{k0}J_{b_{k-1}}^{(0)} + d_{k1}J_{b_{k-1}}^{(1)} + \cdots + d_{kp-1}J_{b_{k-1}}^{(p-1)} = 0, \\ d_{k0}J_{b_k}^{(0)} + d_{k1}J_{b_k}^{(1)} + \cdots + d_{kp-1}J_{b_k}^{(p-1)} = 1, \\ d_{k0}J_{b_{k+1}}^{(0)} + d_{k1}J_{b_{k+1}}^{(1)} + \cdots + d_{kp-1}J_{b_{k+1}}^{(p-1)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{k0}J_{b_p}^{(0)} + d_{k1}J_{b_p}^{(1)} + \cdots + d_{kp-1}J_{b_p}^{(p-1)} = 0, \end{cases}$$

so dass sich allgemein:

$$(18)\quad d_{k\sigma}=(-1)^{k+\sigma}\begin{vmatrix} J_{b_1}^{(0)} & \cdots & J_{b_1}^{(\sigma-1)} & J_{b_1}^{(\sigma+1)} & \cdots & J_{b_1}^{(p-1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{b_{k-1}}^{(0)} & \cdots & J_{b_{k-1}}^{(\sigma-1)} & J_{b_{k-1}}^{(\sigma+1)} & \cdots & J_{b_{k-1}}^{(p-1)} \\ J_{b_{k+1}}^{(0)} & \cdots & J_{b_{k+1}}^{(\sigma-1)} & J_{b_{k+1}}^{(\sigma+1)} & \cdots & J_{b_{k+1}}^{(p-1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{b_p}^{(0)} & \cdots & J_{b_p}^{(\sigma-1)} & J_{b_p}^{(\sigma+1)} & \cdots & J_{b_p}^{(p-1)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} J_{b_1}^{(0)} & J_{b_1}^{(1)} & \cdots & J_{b_1}^{(p-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{b_2}^{(0)} & J_{b_2}^{(1)} & \cdots & J_{b_2}^{(p-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{b_p}^{(0)} & J_{b_p}^{(1)} & \cdots & J_{b_p}^{(p-1)} \end{vmatrix}$$

ergiebt.

Nach Bestimmung der Grössen $d_{k\sigma}$ also auch der $u_k$ folgen für die $c$ die Gleichungen:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\sqrt{R(z_r)}\,dz}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}}+c_{r1}=0,\quad \int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\frac{\sqrt{R(z_r)}\,dz}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}}+c_{r2}=0,\quad\cdots$$

$$\cdots\int_{\alpha_{2p-1}}^{\alpha_{2p}}\frac{\sqrt{R(z_r)}\,dz}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}}+c_{rp}=0,$$

so dass sich allgemein

$$(19)\qquad c_{r\sigma}=-\int_{\alpha_{2\sigma-1}}^{\alpha_{2\sigma}}\frac{\sqrt{R(z_r)}\,dz}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}}$$

ergiebt.

Mit Hülfe der nunmehr bestimmten Werthe der Grössen $c_{r1}, c_{r2}, \cdots c_{rp}$ geht die Gleichung (14), wenn die ursprünglichen Hauptintegrale wieder eingeführt werden, in die folgende über:

$$(20)\quad t_0^{(i)}\int\frac{\sqrt{R(z_i)}\,dz}{(z-z_i)\sqrt{R(z)}}+t_1^{(i)}\int\frac{\sqrt{R(z_{k+1})}\,dz}{(z-z_{k+1})\sqrt{R(z)}}+\cdots+t_{n-k}^{(i)}\int\frac{\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}}$$
$$+\Big\{\big(t_0^{(i)}c_{i1}+t_1^{(i)}c_{k+11}+t_2^{(i)}c_{k+21}+\cdots+t_{n-k}^{(i)}c_{n1}\big)u_1$$
$$+\big(t_0^{(i)}c_{i2}+t_1^{(i)}c_{k+12}+t_2^{(i)}c_{k+22}+\cdots+t_{n-k}^{(i)}c_{n2}\big)u_2+\cdots$$
$$\cdots+\big(t_0^{(i)}c_{ip}+t_1^{(i)}c_{k+1p}+t_2^{(i)}c_{k+2p}+\cdots+t_{n-k}^{(i)}c_{np}\big)u_p\Big\}$$
$$=\log\left(\frac{P^{(i)}-Q^{(i)}\sqrt{R(z)}}{P^{(i)}+Q^{(i)}\sqrt{R(z)}}\right),$$

und es ergiebt sich somit aus (12), wenn in (20) der Reihe nach für $i$ die Zahlen

$$1,\ 2,\ \cdots k$$

gesetzt, die so entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit

$$C_1 t_0^{(2)} t_0^{(3)} \cdots t_0^{(k)}, \quad C_2 t_0^{(1)} t_0^{(3)} \cdots t_0^{(k)}, \quad \cdots C_k t_0^{(1)} t_0^{(2)} \cdots t_0^{(k-1)}$$

multiplicirt und sämmtliche Gleichungen addirt werden, ausserdem

$$\frac{C_i}{t_0^{(i)}} \left( t_0^{(i)} c_{i\varrho} + t_1^{(i)} c_{k+1\varrho} + t_2^{(i)} c_{k+2\varrho} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} c_{n\varrho} \right) = M_{i\varrho}$$

gesetzt wird, die weiter zu erfüllende Gleichung

$$\begin{aligned}(21) \qquad & l^{(0)} \int \frac{z^{2p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + l^{(1)} \int \frac{z^{2p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + l^{(p-1)} \int \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}} \\ & + k^{(p)} \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + k^{(p+1)} \int \frac{z^{p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + k^{(2p-1)} \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \\ & + (M_{11} + M_{21} + \cdots + M_{k1}) u_1 + (M_{12} + M_{22} + \cdots + M_{k2}) u_2 + \cdots \\ & + (M_{1p} + M_{2p} + \cdots + M_{kp}) u_p + f(z) \sqrt{R(z)} = q \sqrt{R(z)}.\end{aligned}$$

Benutzt man jetzt die oben aufgestellte Beziehung (16) zwischen $u_k$ und den in der Reductionsformel des allgemeinen hyperelliptischen Integrales vorkommenden Integralen erster Gattung

$$J^{(0)}(z), \quad J^{(1)}(z), \quad \cdots J^{(p-1)}(z),$$

so wird durch Zusammenfassen der entsprechenden Integrale die Gleichung (21) in

$$\begin{aligned}) \quad & l^{(0)} \int \frac{z^{2p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + l^{(1)} \int \frac{z^{2p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + l^{(p-1)} \int \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}} \\ & + [k^{(2p-1)} + (M_{11} + M_{21} + \cdots + M_{k1}) d_{10} + (M_{12} + M_{22} + \cdots + M_{k2}) d_{20} + \cdots \\ & \qquad + (M_{1p} + M_{2p} + \cdots + M_{kp}) d_{p0}] \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \\ & + [k^{(2p-2)} + (M_{11} + M_{21} + \cdots + M_{k1}) d_{11} + (M_{12} + M_{22} + \cdots + M_{k2}) d_{21} + \cdots \\ & \qquad + (M_{1p} + M_{2p} + \cdots + M_{kp}) d_{p1}] \int \frac{z dz}{\sqrt{R(z)}} \\ & + \cdots \\ & + [k^{(p)} + (M_{11} + M_{21} + \cdots + M_{k1}) d_{1p-1} + (M_{12} + M_{22} + \cdots + M_{k2}) d_{2p-1} + \cdots \\ & \qquad + (M_{1p} + M_{2p} + \cdots + M_{kp}) d_{pp-1}] \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} \\ & + f(z) \sqrt{R(z)} = q \sqrt{R(z)}\end{aligned}$$

übergehen, und somit als nothwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen derselben nach dem früher ausgeführten die folgenden liefern

$$) \qquad l^{(0)} = l^{(1)} = \cdots = l^{(p-1)} = 0,$$

$$\text{h)} \quad \begin{cases} k^{(2p-1)} + (M_{11} + M_{21} + \cdots + M_{k1}) d_{10} + \cdots + (M_{1p} + M_{2p} + \cdots + M_{kp}) d_{p0} = 0, \\ \cdots \\ k^{(p)} + (M_{11} + M_{21} + \cdots + M_{k1}) d_{1p-1} + \cdots + (M_{1p} + M_{2p} + \cdots + M_{kp}) d_{pp-1} = 0, \end{cases}$$

während der algebraische Werth $q\sqrt{R(z)}$ des nach Absonderung der Logarithmen dann übrig bleibenden Integrales durch die Gleichung

$$q = f(z) \tag{25}$$

bestimmt ist.

Es erübrigt nur noch die Werthe der $M$ oder wenigstens die in den Gleichungen (24) vorkommenden Verbindungen derselben mit den $d$-Grössen zu ermitteln.

Geht man wieder von der oben aufgestellten Gleichung (15) aus

$$\int dH(z, z_r^+, z_r^-) = \int \frac{\sqrt{R(z_r)}\,dz}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}} + c_{r1}u_1 + c_{r2}u_2 + \cdots + c_{rp}u_p ,$$

worin die Grössen $c$ durch den Ausdruck (19) definirt sind, und differentiirt diese Gleichung, so erhält man

$$\frac{dH(z, z_r^+, z_r^-)}{dz} = \frac{\sqrt{R(z_r)}}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}} + c_{r1}\frac{du_1}{dz} + c_{r2}\frac{du_2}{dz} + \cdots + c_{rp}\frac{du_p}{dz} \tag{26}$$

woraus sich wiederum, wenn

$$r = i,\quad k+1,\quad k+2,\quad \cdots n$$

gesetzt, die einzelnen Gleichungen resp. mit

$$t_0^{(i)},\ t_1^{(i)},\ \cdots\ t_{n-k}^{(i)}$$

multiplicirt und sämmtlich addirt werden, nach Gleichung (14) die Beziehung ergiebt

$$\frac{d}{dz}\log\left(\frac{P^{(i)}-Q^{(i)}\sqrt{R(z)}}{P^{(i)}+Q^{(i)}\sqrt{R(z)}}\right) = \sum_{r=i,\,k+1,\,\ldots n} t_{r-k}^{(i)}\,\frac{\sqrt{R(z_r)}}{(z-z_r)\sqrt{R(z)}} + \frac{t_0^{(i)}}{C_i}\sum_1^p{}_\varrho\, M_{i\varrho}\frac{du_\varrho}{dz} , \tag{27}$$

wenn statt des Index $i-k$ der Index 0 gesetzt wird, oder mit Benutzung von (16), wenn die rationale Function

$$\frac{2R(z)\left[Q^{(i)}\frac{dP^{(i)}}{dz} - P^{(i)}\frac{dQ^{(i)}}{dz}\right] - P^{(i)}Q^{(i)}\frac{dR(z)}{dz}}{P^{(i)2} - Q^{(i)2}R(z)} = \varphi_i(z) \tag{28}$$

gesetzt, und die Gleichung (27) mit der Irrationalität $\sqrt{R(z)}$ multiplicirt wird,

$$C_i\varphi_i(z) = C_i\sum_{r=i,\,k+1,\,\ldots n} t_{r-k}^{(i)}\frac{\sqrt{R(z_r)}}{z-z_r} + t_0^{(i)}\sum_1^p{}_\varrho\, M_{i\varrho}d_{\varrho 0} + t_0^i z\sum_1^p{}_\varrho\, M_{i\varrho}d_{\varrho 1} + \cdots$$
$$\cdots + t_0^i z^{p-1}\sum_1^p{}_\varrho\, M_{i\varrho}d_{\varrho p-1} . \tag{29}$$

Setzt man endlich hierin

$$i = 1,\ 2,\ \cdots k,$$

und addirt die so entstehenden Gleichungen, so folgt

$$\sum_1^k \frac{C_i}{t_0^{(i)}}\left[\varphi_i(z) - \sum_{r=i,k+1,\ldots n} t_{r-k}^{(i)} \frac{\sqrt{R(z_r)}}{z-z_r}\right] =$$

$$+ (M_{11}+M_{21}+\cdots+M_{k1})d_{10} \quad +\cdots+(M_{1p}+M_{2p}+\cdots+M_{kp})d_{p0}$$
$$+ [(M_{11}+M_{21}+\cdots+M_{k1})d_{11} \quad +\cdots+(M_{1p}+M_{2p}+\cdots+M_{kp})d_{p1}]z$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ [(M_{11}+M_{21}+\cdots+M_{k1})d_{1p-1}+\cdots+(M_{1p}+M_{2p}+\cdots+M_{kp})d_{pp-1}]z^{p-1}$$

Bemerkt man nun, dass auf der linken Seite der Gleichung (30) eine in allen endlichen Werthen von $z$ endliche Function steht, die somit, da sie eine rationale ist, eine ganze und zwar höchstens vom $p-1^{\text{ten}}$ Grade sein muss, so wird man durch Gleichsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von $z$ unmittelbar die in den Gleichungen (24) zu den Grössen

$$k^{(2p-1)},\ k^{(2p-2)},\ \ldots\ k^{(p)}$$

hinzuaddirten Ausdrücke in den Constanten des Problems gegeben erhalten.

Man sieht unmittelbar, dass diese Rechnung auf den von vornherein ersichtlichen Weg hinweist, die gefundenen logarithmischen Ausdrücke differentiirt mit der Function unter dem gegebenen Integrale zu vereinigen und nun das neue Integral als ein auf algebraische Functionen reducirbares zu behandeln; wir haben diesen Weg hier eingeschlagen, um die Bedingungen der Reduction in den Grössen $M$, also auch in den Grössen $c$, d. h. nach (19) in den Stetigkeitssprüngen der Hauptintegrale dritter Gattung an den $b$-Querschnitten ausdrücken zu können.

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn man die Grössen $c$ einzeln berechnen will, die folgende leicht zu entwickelnde Beziehung (vergl. Theorie der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan) das Mittel dazu liefert; setzen wir nämlich

$$\int \frac{\sqrt{R(\zeta)}\,dz}{(z-\zeta)\sqrt{R(z)}} = \Pi(z, \zeta^+, \zeta^-)$$

und den nach $\zeta^-$ genommenen Differentialquotienten dieses in $\zeta^+$ und $\zeta^-$ logarithmisch unendlich werdenden Hauptintegrales, welcher offenbar in denselben beiden Punkten von der ersten Ordnung algebraisch unendlich wird,

$$\frac{\partial\Pi(z, \zeta^+, \zeta^-)}{d\zeta^-} = Z(z, \zeta^+, \zeta^-),$$

endlich

$$c_\sigma = -\int_{a_{2\sigma-1}}^{a_{2\sigma}} d\Pi(z, \zeta^+, \zeta^-) = \tfrac{1}{2}\,\Pi_\sigma(\zeta^+, \zeta^-),$$

worin

$$\Pi_\sigma(\zeta^+, \zeta^-)$$

den Stetigkeitssprung des $\Pi$-Integrales an dem Querschnitte $b_\sigma$ bezeichnet, so ergiebt sich mit Hülfe der oben eingeführten Bezeichnungen unmittelbar aus dem Satze von der Vertauschung der Grenzen und Unstetigkeitspunkte die Gleichung

$$\int_{z_r^-}^{z_r^+} dZ(z, \zeta^+, \zeta^-)$$

$$= -\left(\frac{d\Pi(z, z_r^+, z_r^-)}{dz}\right)_{\zeta^-} - \tfrac{1}{2}\sum_1^p{}_\sigma \left\{ \Pi_\sigma(z_r^+, z_r^-) \left(\frac{du_\sigma}{dz}\right)_{\zeta^-} + \frac{d\Pi_\sigma(\zeta^+, \zeta^-)}{d\zeta^-} \int_{z_r^-}^{z_r^+} du \right.$$

oder wenn die Stetigkeitssprünge des Integrales zweiter Gattung $Z$ an den $b$-Querschnitten mit

$$Z_\sigma(\zeta^+, \zeta^-)$$

bezeichnet werden,

(31)
$$\int_{z_r^-}^{z_r^+} dZ(z, \zeta^+, \zeta^-)$$

$$= -\left(\frac{d\Pi(z, z_r^+, z_r^-)}{dz}\right)_{\zeta^-} - \tfrac{1}{2}\sum_1^p{}_\sigma \left\{ \Pi_\sigma(z_r^+, z_r^-) \left(\frac{du_\sigma}{dz}\right)_{\zeta^-} + Z_\sigma(\zeta^+, \zeta^-) \int_{z_r^-}^{z_r^+} du_\sigma \right.$$

setzt man hierin für $\zeta$ $p$ verschiedene Werthe ein, so erhält man die gesuchten Periodicitätsmoduln des Integrales dritter Gattung durch Integrale zweiter Gattung, zwischen den Unstetigkeitspunkten jenes Hauptintegrales genommen, durch algebraische Functionen und Periodicitätsmoduln von Integralen zweiter Gattung ausgedrückt, Relationen, welche jener bekannten Beziehung für elliptische Integrale analog sind. So würde man die oben eingeführten Grössen $c$ direct berechnen können. Von der Gleichung (31) kommt man auch direct zur Gleichung (27), wenn man $r = i, k+1, k+2, \cdots n$ setzt, alle Gleichungen addirt und das Abel'sche Theorem für die hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung anwendet.

Fassen wir nunmehr all' die erhaltenen Resultate zusammen, so wird man zur Beantwortung der Frage, ob ein vorgelegtes hyperelliptisches Integral von der Form

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar ist, folgendermassen zu verfahren haben:

Man bilde die Gleichung

$$(32)\qquad T_1\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + T_2\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} + \cdots + T_n\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0$$

und suche dieselbe durch Systeme von ganzen Zahlen $T_1, T_2, \cdots T_n$ zu befriedigen; mögen sich nur $n-k$ solcher Systeme finden lassen

$$\begin{aligned} &T_{11}\quad T_{12}\quad \cdots T_{1n}\ ,\\ &T_{21}\quad T_{22}\quad \cdots T_{2n}\ ,\\ &\cdots\cdots\cdots\ ,\\ &T_{n-k1}\,T_{n-k2}\cdots T_{n-kn}\ , \end{aligned}$$

welche von einander unabhängig sind, und mögen sich aus diesen $n-k$-Gleichungen (32) die Relationen ergeben

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_{k+1})^{-1}} = \lambda_{11}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + \cdots + \lambda_{1k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = \lambda_{n-k1}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + \cdots + \lambda_{n-kk}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}},$$

so suche man den grössten gemeinsamen Theiler zwischen den Zahlen

$$D\ \ \lambda_{1i}\ \ \lambda_{2i}\cdots\lambda_{n-ki},$$

worin $i$ eine der Zahlen $1, 2, \cdots k$ bedeuten soll; sei derselbe $\delta_i$, und werde

$$\frac{D}{\delta_i} = t_0^{(i)},\quad \frac{\lambda_{1i}}{\delta_i} = t_1^{(i)},\quad \frac{\lambda_{2i}}{\delta_i} = t_2^{(i)},\quad \cdots \frac{\lambda_{n-ki}}{\delta_i} = t_{n-k}^{(i)}$$

gesetzt, so ist unmittelbar zu sehen, dass

$$(u)\qquad t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} > p$$

sein muss, wenn eine Gleichung von der Form

$$P^{(i)^2} - Q^{(i)^2} R(z) = 0,$$

von Verzweigungspunkten abgesehen, nur die Lösungen

$$z_i,\ z_{k+1},\ \cdots z_n$$

und zwar

$$t_0^{(i)},\ t_1^{(i)},\ \cdots t_{n-k}^{(i)}$$

fach haben soll; denn bezeichnet man die auf die Verzweigungspunkte bezüglichen $s$ linearen Factoren durch $N$, so wird $P^{(i)}$ durch $N$ theilbar sein müssen, und es würde, wenn

$$P^{(i)} = N\cdot p^{(i)},\quad R = N\cdot R_1,\quad Q^{(i)} = q^{(i)}.$$

gesetzt wird,

$$p^{(i)2}N - q^{(i)2}R_1 = (z-z_i)^{t_0^{(i)}}(z-z_{k+1})^{t_1^{(i)}}\cdots(z-z_n)^{t_{n-k}^{(i)}}$$

zu erfüllen sein, woraus, da die linke Seite jedenfalls ein Polynom ist, dessen Grad die Zahl $p$ übersteigt, folgt, dass die Ungleichheit (u) befriedigt werden muss.

Geschieht nun der obigen Ungleichheit Genüge, so unterwerfe man in einer ganzen Function vom

$$\frac{t_0^{(i)}+t_1^{(i)}+\cdots+t_{n-k}^{(i)}-s}{2}$$

ten Grade $p^{(i)}$, und in einer ganzen Function vom

$$\frac{t_0^{(i)}+t_1^{(i)}+\cdots+t_{n-k}^{(i)}+s}{2}-p-1$$

ten Grade $q^{(i)}$, worin $s$ so gewählt sein muss, dass diese Gradzahlen ganz und positiv sind (Null eingeschlossen), die sämmtlichen darin enthaltenen Constanten, deren Zahl

$$t_0^{(i)}+t_1^{(i)}+\cdots+t_{n-k}^{(i)}-p+1$$

ist, der Bedingung, dass die Function

$$p^{(i)}\sqrt{N}-q^{(i)}\sqrt{R_1}$$

für $z=z_i$ selbst nebst ihren $t_0^{(i)}-1$ ersten Ableitungen, für $z=z_{k+1}$ nebst ihren $t_1^{(i)}-1$ ersten Ableitungen, u. s. w., endlich für $z=z_n$ nebst ihren $t_{n-k}^{(i)}-1$ ersten Ableitungen verschwindet, somit

$$t_0^{(i)}+t_1^{(i)}+\cdots+t_{n-k}^{(i)}$$

Bedingungen; erfüllen nun diese Constanten die ihre Anzahl übersteigenden Bedingungsgleichungen, so wird

$$(p^{(i)}\sqrt{N}-q^{(i)}\sqrt{R_1})(p^{(i)}\sqrt{N}+q^{(i)}\sqrt{R_1}) = p^{(i)2}N-q^{(i)2}R_1$$

jedenfalls durch

$$(z-z_i)^{t_0^{(i)}}(z-z_{k+1})^{t_1^{(i)}}\cdots(z-z_n)^{t_{n-k}^{(i)}}$$

theilbar sein und somit

$$P^{(i)2}-Q^{(i)2}R(z),$$

weil es vom Grade

$$t_0^{(i)}+t_1^{(i)}+\cdots+t_{n-k}^{(i)}+s$$

ist, von den in $N$ enthaltenen Verzweigungswerthen abgesehen, nur die bezeichneten Lösungen in der angegebenen Vielfachheit besitzen.

Man kann noch in anderer Weise prüfen, ob die Werthe $z_i, z_{k+1}, \cdots z_n$ die alleinigen Lösungen von der angegebenen Vielfachheit von einer Gleichung der aufgestellten Form sein können, wenn von Verzweigungs-

werthen abgesehen wird und zwar kann man sich eines Verfahrens bedienen, dessen Princip Herr Tchebichef bei der Reduction der elliptischen Integrale auseinandergesetzt hat.

Es soll zuerst gezeigt werden, dass man jedenfalls eine Gleichung von der Form

$$p'^2 N - q'^2 R_1 = 0$$

bilden kann, welche durch

$$u = (z - z_i)^{t_0^{(i)}} (z - z_{k+1})^{t_1^{(i)}} \cdots (z - z_n)^{t_{n-k}^{(i)}}$$

theilbar ist, und für welche der Grad des Quotienten $\leq p$ ist. Bildet man nämlich eine ganze Function $S$ des $t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} - 1^{\text{ten}}$ Grades, welche die Bedingung erfüllt, dass

$$\frac{S\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}{u}$$

für jedes endliche $z$ endlich ist, wozu offenbar die Zahl der Constanten hinreicht, so wird

$$S^2 N - R_1$$

durch $u$ theilbar sein und ebenso wird, wenn

$$q' = L, \quad p' = SL - Ku$$

gesetzt wird, worin $K$ und $L$ noch näher bestimmt werden sollen, auch

$$p'\sqrt{N} - q'\sqrt{R_1} \text{ also auch } p'^2 N - q'^2 R_1,$$

wie durch unmittelbare Ausrechnung ersichtlich ist, durch $u$ theilbar sein. Werde nun zur näheren Fixirung der Grössen $K$ und $L$ der rationale ächte Bruch $\frac{S}{u}$ in einen Kettenbruch verwandelt und in der Reihe der dem Grade nach steigenden Zähler und Nenner der Näherungswerthe des Kettenbruches für $L$ der Nenner $L_n$ desjenigen Näherungswerthes gewählt, für welchen der Grad desselben kleiner ist als der Grad der Function

$$\sqrt{u\sqrt{\frac{N}{R_1}}},$$

während der Grad des Nenners des darauf folgenden Näherungswerthes schon grösser sein soll als eben diese Zahl, die der Annahme nach nicht ganz sein kann, und sei endlich $K$ der Zähler $K_n$ eben dieses Näherungswerthes, so ist sofort zu sehen, dass der Grad der Function

$$\frac{p'\sqrt{N} - q'\sqrt{R_1}}{\sqrt{u}} = \frac{(SL_n - K_n u)\sqrt{N} - L_n\sqrt{R_1}}{\sqrt{u}}$$

$$= \sqrt{R}\left(\frac{S - \sqrt{\frac{R_1}{N}}}{u} - \frac{K_n}{L_n}\right) L_n \sqrt{u\sqrt{\frac{N}{R_1}}},$$

wenn unter dem Grade einer Function der Exponent der Anfangspotenz in der Entwicklung derselben nach fallenden Potenzen der Variabeln verstanden wird, kleiner als der Grad der Function $\sqrt[p]{R}$ ist, da nach einem bekannten Satze

$$\frac{S}{u} - \frac{K_n}{L_n} = \frac{(-1)^n}{L_n(L_{n+1} + L_n x_{n+1})}$$

ist, worin $x_{n+1}$ eine ächt gebrochene rationale Function bedeutet und der Grad vom

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}}\, L_n \sqrt{u\sqrt{\frac{N}{R_1}}} = L_n \cdot \frac{1}{\sqrt{u\sqrt{\frac{N}{R_1}}}}$$

jedenfalls negativ ist. Ferner folgt aber auch, dass der Grad der Function

$$\frac{p'\sqrt{N} + q'\sqrt{R_1}}{\sqrt{u}},$$

da er wegen des unpaaren Grades von $R$ derselbe sein muss, ebenfalls kleiner als der von $\sqrt[p]{R}$ ist, und es wird somit der Grad der rationalen Function

$$\frac{p'^2 N - q'^2 R_1}{u},$$

welche eine ganze ist, kleiner als der Grad von $\sqrt{R}$ also höchstens $p$ sein. Es wird aber leicht eingesehen werden, dass dieser Grad Null sein muss, wenn vorausgesetzt wird, dass es eine Function von der Form giebt

$$p^{(i)2} N - q^{(i)2} R_1,$$

welche bis auf eine multiplicatorische Constante der Function $u$ gleich ist. Denn da die Ausdrücke

$$\frac{p'\sqrt{N} - q'\sqrt{R_1}}{p'\sqrt{N} + q'\sqrt{R_1}} \text{ und } \frac{p^{(i)}\sqrt{N} - q^{(i)}\sqrt{R_1}}{p^{(i)}\sqrt{N} + q^{(i)}\sqrt{R_1}}$$

mit entsprechenden Zeichen der Irrationalitäten genommen für alle Lösungen von $u = 0$ in derselben Weise Null und unendlich werden, so wird ihr Quotient

$$\frac{p'\sqrt{N} - q'\sqrt{R_1}}{p'\sqrt{N} + q'\sqrt{R_1}} \cdot \frac{p^{(i)}\sqrt{N} + q^{(i)}\sqrt{R_1}}{p^{(i)}\sqrt{N} - q^{(i)}\sqrt{R_1}} = \frac{\pi + k\sqrt{R}}{\pi - k\sqrt{R}}$$

nur noch für alle die Lösungen des Polynoms

$$\frac{p'^2 N - q'^2 R_1}{u}$$

Null und unendlich sein können, und daher

$$\pi^2 - k^2 R$$

von einem Grade sein müssen, der kleiner als $p$ ist, wenn die Verzweigungspunkte abgesondert sind, was offenbar unmöglich ist. Es folgt daraus, dass das oben gefundene Polynom

$$(\alpha) \qquad p'^2 N - q'^2 R_1$$

von einer Constanten abgesehen mit $u$ zusammenfällt, und dass man somit, wenn nach der oben angegebenen Methode die Grössen $p'$ und $q'$ durch $K_n$ und $L_n$ ausgedrückt gebildet werden, das Polynom $(\alpha)$ vom

$$t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)}$$

ten Grade sein muss, wenn der ursprünglich gestellten Bedingung überhaupt soll Genüge geleistet werden.

Lassen sich nun für alle oben aufgestellten $z$-Verbindungen Gleichungen von der Form

$$P^{(1)^2} - Q^{(1)^2} R(z) = 0, \quad P^{(2)^2} - Q^{(2)^2} R(z) = 0, \quad \cdots P^{(k)^2} - Q^{(k)^2} R(z) = 0$$

finden, welche ausser den resp. Werthen

$$\begin{array}{l} z_1, z_{k+1}, \cdots z_n, \\ z_2, z_{k+1}, \cdots z_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_k, z_{k+1}, \cdots z_n \end{array}$$

mit der entsprechenden Vielfachheit

$$\begin{array}{l} t_0^{(1)}, t_1^{(1)}, \cdots t_{n-k}^{(1)} \\ t_0^{(2)}, t_1^{(2)}, \cdots t_{n-k}^{(2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ t_0^{(k)}, t_1^{(k)}, \cdots t_{n-k}^{(k)} \end{array}$$

nur noch Verzweigungswerthe zu Lösungen haben, so bilde man die Summe

$$(33) \quad \frac{1}{t_0^{(1)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} \log\left(\frac{P^{(1)} - Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}{P^{(1)} + Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}\right) + \frac{1}{t_0^{(2)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} \log\left(\frac{P^{(2)} - Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}{P^{(2)} + Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}\right)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{t_0^{(k)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}} \log\left(\frac{P^{(k)} - Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}{P^{(k)} + Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}\right) = L(z),$$

dann wird $L(z)$ das Aggregat der im reducirbaren hyperelliptischen Integrale vorkommenden logarithmischen Glieder darstellen. Setzt man sodann

$$\frac{dL(z)}{dz} = \sum_1^k \left\{ \frac{1}{t_0^{(i)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_i)^{-1}} \frac{2R(z)\left[Q^{(i)}\frac{dP^{(i)}}{dz} - P^{(i)}\frac{dQ^{(i)}}{dz}\right] - P^{(i)}Q^{(i)}\frac{dR(z)}{dz}}{P^{(i)^2} - Q^{(i)^2}R(z)} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(z)}} \right\}$$
$$= \frac{\varphi(z)}{\sqrt{R(z)}},$$

so müssen ferner mit Zugrundelegung der am Anfange der Arbeit angeführten Bezeichnungen noch die Bedingungen befriedigt sein

$$\sum_1^n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}^{\cdot}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}^{\cdot}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0$$

für die Werthe $r = 0, 1, 2, \cdots p-1$, und

$$\sum_1^n \left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}^{\cdot}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}^{\cdot}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0$$

für die Werthe $r=p, p+1, \cdots 2p-1$; sind alle diese Bedingungen erfüllt, so ist der Werth des algebraischen Theiles jenes hyperelliptischen Integrales

$$\left\{\sum_1^n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}^{\cdot}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}^{\cdot}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\}\sqrt{R(z)},$$

welcher mit $L(z)$ vereinigt die algebraisch-logarithmische Darstellung des gegebenen Integrales liefert.

Dresden.

# Zwei Sätze über Grenzwerthe von Functionen zweier Veränderlichen.

Von Paul du Bois-Reymond in Tübingen.

In einer schon vor längerer Zeit von mir veröffentlichten Untersuchung über Grenzwerthe von Functionen zweier Veränderlichen*) habe ich u. A. gewisse allgemeine Beziehungen zwischen gleichzeitigen und aufeinanderfolgenden Grenzübergängen geometrisch zu entwickeln gesucht. Anschaulich macht eine derartige geometrische Betrachtung die Dinge, kann aber ihrer Natur nach nie so vollständig und unbedingt befriedigen, wie rein in Zahlen gedachte Sätze und Beweise. Es lohnt der Mühe, die Beziehungen, welche ich meine, auf solche Art genau zu begründen, weil sie eine häufig anwendbare Schlussform darstellen. Und wenn man auch meistens es schliesslich umgehen kann, ausdrücklich sich auf sie zu berufen, so ist dies doch in der Regel mühsam, und namentlich ist, wenn jene Beziehungen einmal ausser Zweifel gesetzt sind, kein vernünftiger Grund mehr dafür vorhanden, sich ihrer nicht zu bedienen.

## 1.

## Begriffsfestsetzungen und Grundsatz.

Wenn ein Gesetz vorliegt, auf Grund dessen nachweislich zu jedem Paar Zahlen $x$ und $y$ ein oder mehrere oder unzählige oder zwischen durch das Gesetz gegebenen Grenzen unbestimmte Werthe von $u$ gehören, so sei dies der Sinn des Ausdrucks: $u$ ist eine Function von $x$ und $y$, also $u = f(x, y)$.

Der einzelne Functionalwerth für ein Zahlenpaar $x$, $y$ umfasst alle Werthe, welche man erhält, wenn man in $f(x \pm \varepsilon, y \pm \varepsilon_1)$ die $\varepsilon$ und $\varepsilon_1$ nach einander oder gemäss einer beliebigen zwischen ihnen anzunehmenden Beziehung gleichzeitig Null werden lässt.

*) Borch. Journ. Bd. 70: „Bemerkungen über die verschiedenen Werthe, welche eine Function zweier reellen Variabeln erhält, wenn man diese Variabeln entweder nach einander oder gewissen Bedingungen gemäss gleichzeitig verschwinden lässt." Die in diesem Aufsatz bewiesenen Sätze finden sich im § 8. der Abhandlung, theils implicite, theils ausdrücklich ausgesprochen.

Im Folgenden werden wir aber, unseren Zwecken gemäss, den einzelnen Functionalwerth so bestimmen, dass wir darunter den Werth verstehen mit dem numerisch grössten Betrage, dessen $f(x \pm \varepsilon, y \pm \varepsilon_1)$ fähig ist, und wenn dies zwei gleiche positive und negative Werthe sind, nach Belieben einen von ihnen. Die für die so eingeschränkten Functionen gültigen Sätze werden für die obigen uneingeschränkten *a fortiori* gelten.

Weiter wird unter einer Function einer Veränderlichen, $f(y)$, eine Function verstanden, die aus der Function zweier Veränderlichen durch Festlegung des Werthes von $x$ entspringt.

Wenn für einen hinreichend kleinen, von Null verschiedenen Werth von $y$ die abhängige Grösse $f(y)$ kleiner als eine beliebig gegebene noch so kleine Grösse $\varepsilon$ wird, und bei weiterer Verkleinerung von $y$ sich nachweislich nicht wieder über $\varepsilon$ erhebt, so schreiben wir: $\lim_{y=0} f(y) = 0$.

*Grundsatz. Wenn eine Function $f(y)$ die Bedingung $\lim_{y=0} f(y) = 0$ erfüllt, so giebt es stets einen Werth $y_1$, der Folgendes leistet:*

1. $0 < y_1 \leq \varepsilon$, wo $\varepsilon$ eine beliebig kleine gegebene positive Grösse,
2. $[f(y_1)]^2 \leq \xi$, wo $\xi$ irgend eine gegebene positive Grösse,
3. $[f(y)]^2 \leq [f(y_1)]^2$ im Intervall $0 \leq y \leq y_1$*).

## 2.

### I. Satz.

*Es erfülle $f(x, y)$ als Function von $y$ für jeden Werth von $x$ $(0 < x \leq X)$ die Bedingung $\lim_{y=0} f(x, y) = 0$, so dass auch:*

$$\lim_{x=0} [\lim_{y=0} f(x, y)] = 0$$

*ist (eben weil die Klammer [ ] Null ist), alsdann giebt es stets eine mit $x$ ohne Maxima verschwindende Function $y = \varphi(x)$ der Art, dass 1) $f(x, \varphi(x))$ bei hinreichender Verkleinerung von $x$ unter jede Grenze sinkt, und dass 2) dasselbe von $f(x, \varphi_1(x))$ gilt, vorausgesetzt, dass von irgend einem Werthe von $x$ an $\varphi_1(x) < \varphi(x)$ ist und bleibt.*

---

*) Die Relationen $0 < y_1 \leq \varepsilon$, $f(y_1)^2 \leq \xi$ gehören zur Definition von $\lim_{y=0} f(y) = 0$. Zum Grundsatz des Textes tritt eben noch $[f(y)]^2 \leq [f(y_1)]^2$ hinzu. Diese Relation setzt voraus, dass unter $f(y_1)$ der ganze Werthvorrath von $f(y)$ für $y = y_1$ verstanden wird, oder doch der kleinste und der grösste Werth dieses Werthvorraths, also jedenfalls alle Werthe, die man erhält, wenn man $f(y_1)$ für einen numerischen Werth $y_1$ berechnet, oder wenn man $\lim_{\varepsilon=0} f(y_1 \pm \varepsilon)$ bestimmt. Würde man unter $f(y_1)$ nur das Resultat der Berechnung von $f(y_1)$ für den numerischen Werth $y_1$ verstehen, so wäre der Grundsatz unter Umständen nicht richtig, z. B. schon im Falle ganz einfacher für $f(y)$ genommener Sinusreihen nicht.

*Beweis.* Wir bezeichnen mit $y_1 = \chi(x)$ eine im Intervall $0 < x \leq X$, wie folgt, zu beschreibende Function. Es sei

1. $0 < y_1 \leq x$,
2. $[f(x, y_1)]^2 \leq x$,
3. $[f(x, y)]^2 \leq [f(x, y_1)]^2$ im Intervall $0 \leq y \leq y_1$,

welche Forderungen nach dem „Grundsatz" des vorigen Artikels erfüllbar sind.

Diese Function $y_1$ von $x$ bezeichnen wir also mit $\chi(x)$. Alsdann ist $\chi(x)$ für keinen Werth von $x$ $(0 < x \leq X)$ Null, und nimmt mit $x$ unter jede Grenze ab. Ausserdem ist stets $f(x, \chi(x)) \leq x$.

Nun sei $\varphi(x)$ eine Function, die gleich $\chi(x)$ ist überall, wo $\chi(x)$ nicht grösser ist als für irgend einen näher an $X$ gelegenen Werth von $x$, in den Strecken aber, in welchen diese Definition $\varphi(x)$ unbestimmt lässt, sei $\varphi(x)$ constant und gleich den diese Strecken begrenzenden Werthen von $\chi(x)$.

Somit ist $\varphi(x)$ eine Function, wie sie im Satz als vorhanden behauptet wurde. Denn $f(x, \varphi(x)) \leq x$ nimmt mit $x$ unter jede Grenze ab. Ist $\varphi_1(x)$ von einem Werthe von $x$ an $\leq \varphi(x)$, so wird nach der Definition von $\chi(x)$, weil $\varphi(x) \leq \chi(x)$, auch $f(x, \varphi_1(x)) \leq x$ sein. Q. e. d.

3.

## II. Satz.

*Wenn für eine mit $x$ verschwindende Function $y = \lambda(x)$, sowie für alle Functionen $\lambda_1(x) < \lambda(x)$ man* $\lim f(x, \lambda(x)) = 0$ *hat, so ist auch*

$$\lim_{x=0} [\lim_{y=0} f(x, y)] = 0.$$

*Beweis.* Zu bestimmen ist der Werth:

$$\lim_{x=0} [\lim_{y=0} f(x, y)] = M.$$

Wir setzen $F(x, y) = f(x, y) - \lim_{y=0} f(x, y)$, so dass

$$\lim_{y=0} F(x, y) = 0 \text{ *)},$$

und zwar gelte diese Gleichung für jeden Werth $x$ des Intervalles $0 < x \leq X$. Nach dem vorigen Satz giebt es dann eine Function $\varphi(x)$ der Art, dass

$$\lim_{x=0} F(x, \varphi(x)) = 0$$

und dass dieselbe Gleichung durch jede Function $\varphi_1(x) < \varphi(x)$ erfüllt

*) Diese Gleichung kann auch angesetzt werden, wenn man $\lim_{y=0} f(x, y)$ unbestimmt voraussetzt, doch muss, damit $\lim_{y=0}\{f(x,y) - \lim_{y=0} f(x, y)\}$ Null sei, $y$ bei seinem Verschwinden solche Folge von Werthen annehmend gedacht werden, dass $\lim_{y=0} f(x, y)$ sich irgend einem besonderen der durch die Unbestimmtheit gestatteten (von $x$ abhängigen) Werthe nähert. Da die Betrachtung für jeden solchen besonderen Werth gilt, so gilt sie allgemein.

wird. Dies wird auch der Fall sein bei einer der im zu beweisenden Satz vorgesehenen Functionen $\lambda_1(x)$ und für alle Functionen $\lambda_2(x) < \lambda_1(x)$.

Somit hat man zunächst:

$$\lim_{x=0} [f(x, \lambda_1(x)) - \lim_{y=0} f(x, y)] = 0.$$

Nach der Voraussetzung des Satzes ist aber

$$\lim_{x=0} f(x, \lambda_1(x)) = 0.$$

Nach der des Beweises:

$$\lim_{x=0} [\lim_{y=0} f(x, y)] = M,$$

mithin ist $M = 0$. Q. e. d.

## 4.

## Zusatz.

An diese Sätze schliesst sich folgendes:

*Problem: Wenn aus* $\lim_{x=0} (\lim_{y=0} f(x, y)) = 0$ *folgt, dass es Functionen* $\varphi(x)$ *giebt, für die* $\lim_{x=0} f(x, \varphi(x)) = 0$ *ist, welches ist die grösste Null dieser Functionen, oder das kleinste Unendlich ihrer reciproken Functionen?*

Die allgemeine explicite Darstellung dieser grössten Null ist zur Zeit unmöglich, auch unter der für die Lösung dieser Art Aufgaben günstigsten Einschränkung, dass die Function $f(x, y)$ mit $x$ ohne Maxima Null wird, wenn $y$ als Function von $x$ ohne Maxima verschwindet.

Setzt man

$$f(x, y) = \gamma(x),$$

so wird die Grenze des kleinsten Unendlich von $y^{-1}$, das noch zum Werthe $\lim_{x=0} f(x, y(x)) = 0$ führt, der Grenze zwischen $\lim_{x=0} (\gamma(x))^2 \lesseqgtr 0$ entsprechen. Es wird also, falls $\eta(x)$ der Gleichheit

$$f(x, \eta(x)) \sim 1$$

genügt, jede Function $y \prec \eta$, für die nicht noch $f(x, y) \sim 1$ ist, die Gleichung $\lim_{x=0} f(x, y) = 0$ erfüllen. Es wäre daher zunächst die infinitäre Auflösung nach $\eta$ der Gleichung $f(x, \eta) \sim 1$ die Aufgabe, von deren Lösung die des obigen Problems abhängt*).

Uebrigens ist die hieraus folgende *Methode der Bestimmung von* $\varphi(x)$, *die Gleichung*

$$f(x, \varphi(x)) = \gamma(x)$$

*aufzulösen und darauf* $\gamma(x) \prec 1$ *anzunehmen*, manchmal zu brauchen (s. d. folg. Abhandlung, Art. 6).

Tübingen, Mai 1876.

*) Diese Annalen VIII. Bd., p. 363: Ueber asymptot. Werthe etc. Cap. V.

# Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls.

Von P. du Bois-Reymond in Tübingen.

Wenn man über die Schwierigkeiten des Grenzbegriffes und der Grössenvorstellung sich hinwegsetzt, so wird man in den Grundlagen der Analysis auf keine Unbegreiflichkeiten stossen. Jene Begriffe saugen gleichsam den psychologischen Räthselstoff der ganzen Wissenschaft auf. Denn das Imaginäre und ähnliche analytische Formalismen, die als wesentliche Bestandtheile fertiger Theorien bei erster Bekanntschaft wie Wunder oder übernatürliche Eingebungen erscheinen mögen, sind schliesslich doch nur logisch nothwendige Erzeugnisse der Methoden unserer Wissenschaft, und lassen mit einigem Nachdenken bis an ihren ganz natürlichen Ursprung sich verfolgen. Dagegen der Grenz- und Grössenbegriff (beide sind, wie ich glaube zeigen zu können, nur verschiedene Bezeichnungen einer Vorstellungsart) gehört sicherlich nicht mehr der eigentlichen Grössenlehre, welche diese Begriffe ja schon voraussetzt, sondern der Seelenkunde an. Ich beabsichtige der psychologischen Theorie dieser mathematischen Grundbegriffe demnächst an einem anderen Orte ernstlich näher zu treten. An dieser Stelle will ich nur durch einige Bemerkungen über die Beziehungen zwischen der geometrischen Grössenvorstellung und dem Zahlengedanken den vorliegenden Aufsatz einleiten, dessen Gegenstand die Untersuchung einiger äusserst merkwürdiger Folgerungen ist, welche aus der Vergleichung der geometrischen Vorstellung ins Unendliche aufsteigender Curven mit der Analysis der durch sie abgebildeten Functionen sich ergeben.

Wo eine feste Grösse, auf die unsere Gedankenverbindungen uns führen, durch keine Zahl, d. i. Rationalzahl ausgedrückt werden kann, stellt man sie als Grenze von Rationalzahlen dar, nennt sie Irrationalzahl, bezeichnet sie irgendwie und behandelt sie in der Buchstabenrechnung ganz wie eine Rationalzahl, so dass die Analysis zwischen den Zahlen dieselbe gleichartige Beschaffenheit voraussetzt, wie sie der Vorstellung nach zwischen den Längen besteht. Der geometrischen Vorstellung liegt es in der That ferne, auf einer Strecke z. B. gleich Eins einen qualitativen Unterschied zu machen zwischen mit Lineal und Zirkel construirbaren irrationalen Längen und den rationalen Bruchtheilen der Längeneinheit. Im Ganzen verbindet man unwillkürlich mit der Zahlenfolge etwa eine ähnliche Idee, wie mit der Sternvertheilung auf einem grössten Kreise am Himmel. Es werden einige hellere Sterne darunter sein, welche besonders in die Augen fallen, wie man bei den Zahlen zuerst an rationale Verhältnisse mit den kleinsten Zählern und Nennern

denkt. Bei genauerem Zusehen erblickt man immer dichtere Sternmassen, und endlich das teleskopische Sehen erkennt in jedem kleinsten Bezirk des für das gemeine Sehen gleichförmig dunkelen Himmelsgrundes neue ungezählte Lichtpunkte, zwischen denen aber immer von Neuem gleichförmiges Dunkel sich dehnt, wie sehr wir auch unsere Instrumente vervollkommnen mögen. Dieses immer noch übrigbleibende gleichsam asymptotisch gleichförmige Nichts bevölkert dann unsere Phantasie, oder Speculation, mit Materie, deren Ausstrahlung unserer Wahrnehmung eben nicht mehr zugänglich gemacht werden kann. In der Idee mögen wir eben an kein Ende glauben, keinen in Wahrheit öden Fleck am Himmel zugeben. So rücken bei genauerer Ueberlegung die rationalen Zahlen zwar immer dichter an einander, lassen aber in der Vorstellung doch stets Lücken zwischen sich, welche dann die mathematische Speculation mit den Irrationalen ausfüllt. Es entwickelt sich auf diese Weise die allgemein verbreitete Vorstellung von der *numerischen Continuität*. Denn die gewöhnliche mathematische Anschauungsweise räumt beiden, der geometrischen und der numerischen Grössenfolge gleiches Recht ein, denkt sich beide von gleicher Dichtigkeit, lässt sie einander völlig entsprechen, wie Bild und Abbild. Zur Deckung können sie aber gebracht werden nur mit Hülfe des Grenzbegriffs durch Aufstellung der Irrationalen. Und dies ist der Ursprung des Gedankens von der Identität des Grenz- und Grössenbegriffs.

Hiernach können wir in der Einschaltung der Irrationalzahlen zwischen die Rationalen nur eine *nachträgliche Anpassung* des verstandesmässigen Zahlenbegriffs an den angeborenen oder in den Windeln erworbenen geometrischen Grössenbegriff erblicken, und würden uns bei dieser Anpassungstheorie beruhigen dürfen, wenn nicht bei der Vergleichung der numerischen und geometrischen Grössenfolge noch andere und zwar sehr bedeutende Schwierigkeiten zu Tage träten, deren Untersuchung eben schliesslich auf die psychologische Zergliederung des Grenz- und Grössenbegriffs hinführt, und mit der, wie oben bemerkt, ich mich an einem anderen Orte beschäftigen will.

Bei den nachfolgenden Betrachtungen will ich lediglich die gewöhnliche Anschauung von der continuirlichen geometrischen Grössenfolge und den Rationalen und Irrationalen zu Grunde legen.

Der erste Gegenstand dieses Aufsatzes ist die Bemerkung, dass die der geometrischen Vorstellung nach völlig continuirliche Schaar immer rascher ansteigenden Curven ein von den uns geläufigen Raumcontinuitäten gänzlich verschiedenes Verhalten zeigt, wenn es sich darum handelt, einem ihrer Individuen sich möglichst zu nähern. Zum Zweiten wird eine räthselhafte Unterscheidung der Analysis des Unendlichen untersucht, nämlich die ideale Grenze zwischen Convergenz und Divergenz. Ich habe von einer dieser Grenze entsprechenden, doch

nicht genauer erklärten Function $\tau(\alpha)$ in meinen Untersuchungen bereits öfteren Gebrauch gemacht, und wünsche, dass es mir in der zweiten Hälfte dieses Aufsatzes gelungen sei, mit befriedigender Schärfe zu erläutern, was ich mir unter der Function $\tau(\alpha)$ denke.

## I.

## Ueber die Annäherung an ein gegebenes Unendlich.

### 1.

Aehnlich wie bei den Elementarbegriffen der gemeinen Analysis stossen wir bei den Grundprincipien des Infinitärcalcüls sogleich auf paradox scheinende Folgerungen, und zwar höchst eigenthümlicher und denkwürdiger Natur, welche auch hier aus dem Bestreben entspringen, den neuen Grössenbegriff und den neuen Zahlenbegriff genau festzustellen und zur Deckung zu bringen. Jedoch ganz wie bei der gewöhnlichen Analysis, so wird auch im Infinitärcalcül die weitere Entwickelung der Methoden, namentlich so weit sie heute praktisch sind, durch dergleichen metaphysische Schwierigkeiten nicht beeinträchtigt. Uebrigens ist es nicht unmöglich, dass gerade durch tiefere Untersuchung der Grundlagen des Infinitärcalcüls diejenigen der gewöhnlichen Analysis mehr Licht empfangen werden.

### 2.

Aus der geometrischen Vorstellung folgt, dass die Geschwindigkeit des Ansteigens der Functionen, oder, wie ich es kürzer nenne, ihr *Unendlich*, eine sogenannte Continuität bildet. D. h. denken wir uns zwei verschieden rasch ansteigende Functionen, so sind alle Uebergänge von der einen zur andern räumlich denkbar und in der Vorstellung vorhanden. Nirgend ist zwischen zwei ins Unendliche ansteigenden Curven oder in der Umgebung einer solchen Curve vorstellbar eine Lücke, die nicht von Curven ausgefüllt werden könnte, sondern jede Curve wird von andern Curven, die ihr beliebig nahe verlaufen, bis ins Unendliche begleitet.

Zur Vervollständigung dieser kurzen Schilderung unserer auf die zu betrachtenden Verhältnisse bezüglichen Grössenvorstellung gehörte noch, dass wir über die Anzahl der Unendlich zwischen zwei Curven, im Vergleich mit der einfach unendlichen Punktschaar eines Linienstücks, uns klar werden.

Dass jene Anzahl der Unendlich keine einfach unendliche ist, leuchtet sofort ein. Ich glaube aber, man kann, auch rein geometrisch, unschwer einsehen, dass sie nicht zweifach, dreifach u. s. w., sondern *unbegrenztfach unendlich* ist. Denn man kann z. B. durch die zwei ins Unendliche ansteigenden Curven eine unbegrenzte Anzahl ange-

messen weit von einander entfernter der $y$ Axe paralleler Geraden legen, und indem man jeden Punkt jeder einzelnen mit je einem Punkte der übrigen durch Linien successive verbindet, erhält man eine unbegrenztfach unendliche Curvenschaar, deren Individuen, wenn die parallelen Geraden hinreichend von einander entfernt sind, nur wachsen.

Dies sind Forderungen der angeborenen Grössenvorstellung; prüfen wir jetzt, wie dem gegenüber die Folgerungen des analytischen Verstandes sich verhalten.

3.

So wie im gewöhnlichen Grössengebiete wir Grössen numerisch genau nur durch Rationalzahlen ausdrücken können, da die anderen Zahlen nicht wirkliche Zahlen, sondern nur Grenzen solcher sind: so können wir die Unendlich nur durch wohldefinirte Functionen ausdrücken, von denen uns heut zu Tage nur die zur Familie der Logarithmen, Potenzen, Exponentialfunctionen gehörigen zu Gebote stehen.

Diese Unendlich bilden aber schon eine unbegrenztfach unendliche Anzahl von Individuen. Denn z. B. die Function

$$l x^{m_1} l_2 x^{m_2} \cdots$$

kann allein schon nach der beliebig grossen Parameterzahl $m_1, m_2, \cdots$ variiren.

Aber sehen wir zunächst von der Darstellbarkeit eines irgendwie definirten Unendlich durch eine analytische Function ab und untersuchen wir die Annäherung an ein gegebenes Unendlich.

4.

Nachdem ich in einer älteren Abhandlung zuerst gezeigt, dass es so geringe Geschwindigkeiten des Anwachsens giebt, welche noch hinter den beliebig oft wiederholten Logarithmen zurückbleiben*), dass es also kleinere Unendlich giebt, als das irgend einer Function der Reihe

$$l_p(x),\ p = 1, 2, 3, \cdots,$$

habe ich bei einer anderen Gelegenheit**) diese Bemerkung zu dem Satze verallgemeinert, *dass es überhaupt keine Folge von Functionen*

$$\varphi_p(x),\ p = 1, 2, \cdots$$

*geben kann, der Art, dass jedes noch so kleine denkbare Unendlich zwischen zwei Unendlich dieser Folge fallen oder mit einem von ihnen übereinstimmen muss.*

Dieser Satz ist einer anderen, vielleicht noch auffallenderen, auf alle Fälle lehrreichen Fassung fähig.

---

*) Borch. Journ. Bd. 76, p. 88.

**) Diese Annalen VIII. Bd., p. 365 Anm.

## 5.

Im gewöhnlichen Grössengebiet gilt von der Annäherung an eine gegebene Zahl, dass sie unbegrenzt ist, d. h. wir können uns einer Zahl, z. B. $\frac{1}{2}$, mit anderen Zahlenfolgen der verschiedenartigsten Beschaffenheit

$$z_1, z_2, \cdots$$

in der Weise nähern, dass jede der Zahl $\frac{1}{2}$ noch so nahe Zahl $Z$ zwischen zwei Zahlen der Reihe $z_p$ fällt, oder mit deren einer übereinstimmt. Wir wollen das dem Entsprechende in der infinitären Grössenfolge aufsuchen.

Betrachten wir zunächst ein Beispiel. Es sei $x$ die Function, deren Unendlich man mit einer Reihe von Functionen sich nähern will. Versuchen wir es mit dieser Folge:

$$x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{2}{3}}, \cdots x^{\frac{p}{p+1}}, \cdots \text{ in indefinitum,}$$

so nähern die Exponenten sich der Eins, aber es ist leicht zu zeigen, dass es Functionen giebt, deren Unendlich zwischen die Unendlich der Functionen dieser Reihe und jenes von $x$ fallen. Z. B. dies

$$x^{\frac{llx}{llx+1}}$$

ist eine solche Function, da man durch Division, und indem man $e^{ulx}$ statt $x^u$ schreibt, leicht die Ungleichheit:

$$x^{\frac{p}{p+1}} \prec x^{\frac{llx}{llx+1}} \prec x$$

bestätigen kann. Was wir an diesem Beispiel sehen, wollen wir als allgemeinen Satz aussprechen und beweisen. Der Satz lautet:

*Man kann sich einem gegebenen Unendlich $\lambda(x)$ mit keiner Functionenfolge*

$$\varphi_p(x), \; p = 1, 2, \cdots$$

*in solcher Weise nähern, dass man nicht stets Functionen $\psi(x)$ angeben könnte, welche für beliebig grosse Werthe von $p$ der Ungleichheit*

$$\lambda(x) \gtrsim \psi(x) \gtrsim \varphi_p(x)$$

*genügen.*

Denn angenommen, wir könnten uns z. B. mit der Functionenfolge

$$\varphi_1(x) \prec \varphi_2(x) \prec \cdots \prec \lambda(x)$$

dem Unendlich von $\lambda(x)$ unbegrenzt nähern, so würden die Unendlich der Folge:

$$\frac{\lambda(x)}{\varphi_1(x)} \succ \frac{\lambda(x)}{\varphi_2(x)} \succ \cdots$$

unter jede Grenze sinken, oder, setzt man $\frac{\lambda(x)}{\varphi_p(x)} = u$, $x = \varrho_p(u)$, so würden die Unendlich der Folge:

$$\varrho_1(u),\ \varrho_2(u),\ \cdots$$

über jede Grenze steigen, beides Folgerungen, die nach dem Obigen unmöglich sind, wodurch der Satz bewiesen oder vielmehr auf den früheren (Art. 4) zurückgeführt ist, von dem er in der That nur eine neue Form ist.

6.

Ein von unseren bisherigen Vorstellungen so sehr abweichendes Verhalten verdient aber von mehreren Seiten beleuchtet zu werden, weshalb ich vorstehenden Lehrsatz selbstständig ableiten will, und zwar auf Grund gewisser ganz allgemeiner Functionalsätze*), welche ihm einige unwesentliche oder richtiger nur scheinbare Beschränkungen auferlegen. Dieser selbstständige Beweis wird ausserdem den Vortheil haben, uns zu lehren, *wie man für eine gegebene Functionenfolge*

$$\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \cdots \prec \lambda$$

*sogleich eine Function $\psi$ angeben kann, welche die Bedingung*

$$\lambda \succ \psi \succ \varphi_p,\ p = 1, 2, \cdots,$$

*erfüllt.*

Die eben gemeinten Beschränkungen sind:

1. Es wird angenommen, dass die Functionenfolge $\varphi_p(x)$, $p = 1, 2, \cdots$, mit der man sich dem Unendlich von $\lambda(x)$ nähern will, in die Form $\varphi(x, p)$, $p = 1, 2, \cdots$ sich bringen lasse, worin $p$ durch eine stetig sich ändernde Veränderliche ersetzt werden kann, was geometrisch wenigstens und folglich durch darstellende Integrale stets möglich sein wird.
2. Es wird angenommen, dass $\varphi(x, \infty) = \lambda(x)$, was aus äusseren Gründen nicht immer wird geschrieben werden können, falls nämlich die Grösse $\varphi(x, \infty)$ keinen deutlichen Sinn hat, z. B. wenn in $\varphi(x, p)$ der $p$-fache Logarithmus $l_p(x)$ vorkommt.
3. Es sei $\varphi(x, p) \prec \varphi(x, p+a)$, wo $a \geq 1$.

Unter diesen Voraussetzungen schreiben wir:

$$\frac{\varphi(x, y)}{\lambda(x)} = f(x, y).$$

Hiernach ist also

$$\lim_{x=\infty} f(x, y) = 0,$$

mithin auch

$$\lim_{y=\infty} \lim_{x=\infty} f(x, y) = 0.$$

*) Zwei Sätze über Grenzwerthe etc., diese Annalen Bd. XI, p. 145.

Daher giebt es nach dem erwähnten allgemeinen Princip stets mit $x$ hinreichend langsam unendlich werdende Functionen $y = \varrho(x)$, so dass auch noch

$$\lim_{x=\infty} f(x, \varrho(x)) = 0$$

sei, und dies genügt. Denn da sowohl

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x, y)}{\lambda(x)} = 0,$$

als auch

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x, \varrho(x))}{\lambda(x)} = 0$$

ist, während

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x, \varrho(x))} = 0$$

ist (weil schon für $y_1 - y \geq 1$ nach der Voraussetzung $\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x, y_1)} = 0$ ist), so hat man

$$\lambda(x) \succ \varphi(x, \varrho(x)) \succ \varphi(x, y),$$

wie gross $y$ auch sei, und $\varphi(x, \varrho(x))$ ist die gesuchte Function $\psi(x)$.

Um dies an dem obigen Beispiel

$$x^{\overset{p}{p+1}}, \quad p = 1, 2, \cdots$$

einer Functionenfolge, mit der man sich dem Unendlich von $x$ nähert, durchzuführen, so wäre also für $p$ eine Function $\varrho(x)$ von hinreichend kleinem Unendlich zu setzen. Die Regel am Schluss der Note: „Zwei Sätze über Grenzwerthe etc.“, auf diesen Fall angewandt, verlangt die Auflösung nach $\varrho$ von

$$x^{\overset{\varrho}{\varrho+1}} = \frac{x}{\gamma(x)},$$

wo $\gamma(x)$ beliebig langsam unendlich wird. Wir erhalten daher $\varrho = \frac{lx}{l(\gamma(x))} - 1$, d. i.

$$\varrho \prec lx.$$

Setzt man $\varrho = \sigma(x) l(x)$, wo $\sigma(x) \prec 1$, so folgt:

$$\frac{x^{\overset{\varrho}{\varrho+1}}}{x} = e^{\frac{1}{\sigma\left(1+\frac{1}{\sigma lx}\right)}} \prec 1.$$

So dass allerdings $\varrho \prec lx$ das Verlangte leistet, und um so mehr $\varrho(x) = llx$, wie oben angenommen.

## 7.

Unter der Voraussetzung $\varrho(x) \prec lx$ hat man also für jeden Werth von $p$:

$$x^{\overset{p}{p+1}} \prec x^{\frac{\varrho(x)}{\varrho(x)+1}} \prec x.$$

Setzt man weiter:

$$\varphi_p(x) = x^{\frac{lx^{\frac{p}{p+1}}}{lx^{\frac{p}{p+1}+1}}}, \quad p = 1, 2, 3, \cdots,$$

so ist dies eine Functionenfolge, die viel näher an das Unendlich von $x$ führt als $x^{\frac{p}{p+1}}$, $p = 1, 2, \cdots$, und indem man für $p$ hier wiederum eine hinreichend langsam unendlichwerdende Function $\varrho(x)$ einführt, gelangt man wieder über diese Folge hinaus, und so weiter ins Unbegrenzte*). Setzt man

$$\varphi(x, p) = x^{\frac{p}{p+1}},$$

so kann man diese verschiedenen Folgen in den Ausdruck

$$\varphi\Big(x, \varphi\big(\varrho_1, \varphi(\varrho_2, \cdots \varphi(\varrho_{q-1}, p)\big)\Big) = \Phi_{pq}(x)$$

zusammenfassen.

8.

Man könnte so auf den Gedanken kommen, dass, wenn es auch unmöglich sei, mit einer einfachen Folge von Functionen dem Unendlich einer gegebenen Function unbegrenzt sich zu nähern, dies vielleicht geschehen könne mit einer Folge von Folgen, wie diese:

$$\begin{array}{l} \varphi_{11}, \varphi_{12}, \cdots \\ \varphi_{21}, \varphi_{22}, \cdots \\ \cdots\cdots \end{array}$$

von der vorstehendes $\Phi_{pq}$ ein Beispiel ist, und wo ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varphi_{n,1} \succ \varphi_{n-1,p}$, $p = 1, 2, \cdots$ angenommen werden darf. Es lässt sich aber leicht einsehen, dass diese Muthmassung nicht zutrifft. Dass man erstens aus der Doppelfolge keine einfache, die unbegrenzte Annäherung an ein gegebenes Unendlich vermittelnde Folge

$$\varphi_{p_1 q_1}, \varphi_{p_2 q_2}, \cdots$$

herausgreifen kann, ist aus dem Obigen klar. Umgekehrt kann gezeigt werden, dass, wenn die Doppelfolge unbegrenzte Annäherung gestatten würde, man aus ihr stets einfache Folgen herausgreifen könnte, die ebenfalls unbegrenzte Annäherung gestatteten. Dies würde nämlich jede einfache Folge

*) Wie schon mehrfach betont, kommen wir bis jetzt in der Richtung der grössten und kleinsten Unendlich über Exponentialfunctionen und Logarithmen nicht hinaus, wenigstens nicht mit brauchbaren Functionen. Leider sind wir auch nicht im Besitz einer verwendbaren Definition von $l_p(x)$ als $\varphi(x, p)$, um die Regeln des Textes darauf anwenden zu können.

$$\varphi_{p_1 q_1},\ \varphi_{p_2 q_2},\ \cdots$$

thun, wenn nur $q_1 < q_2 < \cdots$, weil man, wenn irgend eine Function ein Unendlich hat, das in den Bereich der Doppelfolge gehört, sobald $\varphi_{pq}$ auf die nächsttiefere Zeile fällt, schon zwischen das Unendlich jener Function und der gegebenen Function gelangt sein wird. Also auch mit Doppelfolgen kann man einem gegebenen Unendlich nicht unbegrenzt sich nähern. Ebenso wenig mit cubischen etc. Folgen.

## 9.

Nun die Thatsache, dass wir uns mit keiner denkbaren Functionenfolge einem gegebenen Unendlich unbegrenzt nähern können, hat gewiss etwas Befremdliches. Denn es wäre, wie Art. 2 bemerkt, unserer Anschauung völlig zuwiderlaufend, eine nothwendige Lücke z. B. um die Gerade $y = x$ anzunehmen. Wir können diese Lücke in Gedanken stets ausfüllen durch Curven, welche die Linie $y = x$ ins Unendliche begleiten.

Indessen liegt hier, wie ich glaube nachweisen zu können, kein wirkliches Paradoxon vor, d. i. kein unversöhnlicher Widerstreit der Ergebnisse verschiedener Denkformen, sondern nur ein der Vorstellung, wenn auch nicht ganz geläufiges, so doch nicht unzugängliches räumliches Verhalten. Die Sache verhält sich so. Betrachten wir wieder unser obiges Beispiel: die Annäherung an das Unendlich $x$ mit den Unendlich $\sqrt[p]{x^{p+1}}$, $p = 1, 2, \cdots$. Das Unendlich der Function

$$\sqrt[lx]{x^{lx+1}}$$

ist, wie wir sahen, näher an dem von $x$ als das einer Function $\sqrt[p]{x^{p+1}}$ für irgend einen numerischen Werth von $p$.

*Aber für jeden Werth von x giebt es ein p der Art, dass*

$$\sqrt[p]{x^{p+1}} > \sqrt[lx]{x^{lx+1}},$$

und da liegt's. *Die Curven* $y = \sqrt[p]{x^{p+1}}$ *schliessen sich allerdings unendlich nahe an die Linie* $y = x$ *an, und im Endlichen kann man keine Linie zwischen die Gerade* $y = x$ *und die Curven* $y = \sqrt[p]{x^{p+1}}$, $p = 1, 2, \ldots$ *legen. Erst im Unendlichen ist* $\sqrt[lx]{x^{lx+1}}$ *grösser als* $\sqrt[p]{x^{p+1}}$ *für irgend einen Werth von p.*

Wir haben es hier also nicht mit etwas Unbegreiflichem zu thun, sondern mit einem Loch in der Analogie zwischen der gewöhnlichen und der infinitären Grössenfolge, in welchem diese ein neues ihr eigenthümliches Verhalten zeigt.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch auf einen anderen Unterschied beider Grössenfolgen hinweisen, der übrigens schliesslich auf den obigen zurückführt. Wenn man eine gewöhnliche Grössenfolge, z. B. zwischen 0 und 1, auf verschiedene Weisen ausdrückt, beispielsweise durch:

$$\frac{1}{2^y}, \ \infty > y > 0; \quad \frac{1}{3^y}, \ \infty > y > 0,$$

so werden durch beide Ausdrücke nach der herrschenden Ansicht die nämlichen numerischen Werthe dargestellt, d. i. der Ausdruck $2^{-y}$ liefert keine Werthe, die nicht auch als im Ausdruck $3^{-y}$ enthalten angesehen zu werden pflegen. Bei der infinitären Grössenfolge ist unter gleichen Umständen eine solche Vorstellungsweise unmöglich. Betrachten wir z. B. die Ausdrücke:

$$x^a, \ (x \log x)^b.$$

Man wird nie haben $x^a \sim (x \log x)^b$, falls $a$ und $b$ von $x$ unabhängig sind, und dennoch werden beide Functionen dasselbe Unendlichkeitsintervall „bestreichen" können. Lassen wir $a$ sowohl wie $b$ von 0 bis 1 gehen, so ist z. B., so lange $a$ und $b < 0, 1$:

$$x^a \prec x^{\frac{1}{4}}, \ (x l x)^b \prec x^{\frac{1}{4}}.$$

Und wenn $a$ und $b > 0, 9$ hat man:

$$x^a \succ x^{\frac{3}{4}}, \ (x l x)^b \succ x^{\frac{3}{4}},$$

so dass von $a = b = 0$ bis $a = b = 1$ beide Functionen durch das nämliche Unendlichkeitsintervall $x^{\frac{1}{4}} \cdots x^{\frac{3}{4}}$ hindurchgegangen sind, ohne gleichwohl je das nämliche Unendlich darstellen zu können.

## II.

### Ueber die Grenze von Convergenz und Divergenz.

### 10.

Die numerischen Grundlagen, wie man es nennen kann, des Infinitärcalcüls, sind, glaube ich, durch die eben vorgeführten Betrachtungen in einem wichtigen Punkt, *wo die Analogie der infinitären und der gewöhnlichen Grössenfolge versagt*, als unseren gewohnten Vorstellungen nicht widersprechend erwiesen. Eng verwandte Ueberlegungen führen aber zu neuen Schlüssen, welche wiederum den Schein des Paradoxen haben, und wo mir ein Begreifen nur *durch die Berufung auf die Analogie der infinitären und der numerischen Grössenfolge* möglich zu sein scheint. Ich meine den merkwürdigen Fall, dass man,

wie sofort gezeigt werden soll, gezwungen ist, das Vorhandensein eines gewissen Unendlich anzunehmen, nicht blos durch unseren geometrischen Sinn, sondern um nicht analytische Ungereimtheiten voraussetzen zu müssen, während man den genauen Beweis führen kann, dass jenes Unendlich nicht existirt, oder richtiger, dass es durch keine Function je darstellbar sein wird.

Dieses niemals darstellbare Unendlich, welches wir gleichwohl als vorhanden ansehen müssen, entspricht der *Grenze zwischen Convergenz und Divergenz der unendlichen Operationen, insbesondere der Integrale und Reihen.* Von den Reihen können wir bei diesen allgemeinen Ueberlegungen absehen. Die Methoden, welche bei den Integralen zu den angedeuteten Ergebnissen führen, sind leicht auf die Reihen zu übertragen.

11.

Betrachten wir das Integral

$$J = \int_0^a \frac{t(\alpha)}{\alpha} d\alpha ,$$

in welchem $t(\alpha)$ sich mit verschwindendem $\alpha$ seinem Grenzwerth $t(0)$ ohne Maxima nähern soll, so ist

$$J = \lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^a \frac{t(\alpha)}{\alpha} d\alpha$$

schon unendlich, wenn $t(\alpha) \sim 1$. Wenn wir also in die Untersuchung eintreten, welche Annahme über $t(\alpha)$ einen endlichen, und welche einen unendlichen Werth des Integrals $J$ ergeben, so wird es genügen $t(\alpha) \prec 1$ anzunehmen, somit werden wir uns unter $t(\alpha)$ eine von $t(a)$ bis $t(0)$ nirgend zunehmende Function vorstellen. Dann ist also der Limes

$$J = \lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^a \frac{t(\alpha)}{\alpha} d\alpha$$

entweder endlich und bestimmt oder unendlich. Setzen wir für $t(\alpha)$ einmal

$$t_u(\alpha) = \frac{1}{l\frac{1}{\alpha} l_2 \frac{1}{\alpha} \cdots l_r \frac{1}{\alpha}}$$

das andre Mal

$$t_0(\alpha) = \frac{1}{l\frac{1}{\alpha} l_2 \frac{1}{\alpha} \cdots l_r \frac{1}{\alpha}^{1+\mu}}, \quad \mu > 0,$$

so wird, wie bekanntlich durch unbestimmte Integration leicht festzustellen, im ersteren Falle das Integral $J$ unendlich, im zweiten endlich, wie gross $r$ und wie klein $\mu$ auch sein mögen.

Denken wir uns jetzt $t(\alpha)$ alle Stufen der Geschwindigkeit des Nullwerdens von $t_\infty(\alpha)$ bis $t_0(\alpha)$ durchlaufend, so wird das Integral bis zu einer gewissen Stufe endlich bleiben, dann aber unendlich werden und bleiben. Die Grenzfunction, welche die Functionen $t(\alpha)$, für welche das Integral $J$ endlich ist, trennt von denen, für die es unendlich ist, möge mit $\tau(\alpha)$ bezeichnet werden. Ueber diese Function $\tau(\alpha)$ kann man drei Annahmen machen.

1. $\tau(\alpha)$ trennt die Divergenz und Convergenz in der Weise, dass $J$ für $t(\alpha) \sim \tau(\alpha)$ weder divergent noch convergent ist, dass aber $J$ convergent oder divergent ist, je nachdem $t(\alpha) \gtrless \tau(\alpha)$.

2. $J$ ist für $t(\alpha) \precsim \tau(\alpha)$ endlich und für $t(\alpha) \succ \tau(\alpha)$ unendlich.

3. $J$ ist für $t(\alpha) \succsim \tau(\alpha)$ unendlich und für $t(\alpha) \prec \tau(\alpha)$ endlich.

Die erste Annahme lassen wir hier unberücksichtigt, weil die Mathematiker Grössen, die weder endlich noch unendlich sind, als nicht vorhanden anzusehen pflegen.

## 12.

Um weiter zu zeigen, dass keine Function $\tau(\alpha)$ möglich ist, wie sie die zweite Annahme will, dass es also keine so beschaffene Function $\tau(\alpha)$ giebt, für die

$$\int_0^a \frac{\tau(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = \text{endlich}$$

und

$$\int_0^a \frac{t(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = \text{unendlich für } t(\alpha) \succ \tau(\alpha),$$

schreiben wir $\frac{\tau(\alpha)}{\alpha} = f(\alpha)$ und

$$J(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon f(\alpha)\, d\alpha,$$

wo also $J(\varepsilon) \prec 1$, d. i. $J(0) = 0$.

Wir wollen zeigen, dass, im Falle $J(\varepsilon)$ endlich ist, man stets eine Function $\varphi(\alpha) \succ 1$ so bestimmen kann, dass auch

$$J_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon f(\alpha)\varphi(\alpha)\, d\alpha$$

endlich ist, so dass auch $J_1(\varepsilon) \prec 1$. Dies machen wir so.

Wir setzen zuerst:

$$J_1(\varepsilon) = F(J(\varepsilon)),$$

und haben wegen

$$f(\varepsilon) = J'(\varepsilon),$$
$$f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = F'(J(\varepsilon))\,J'(\varepsilon)$$

einfach:

$$\varphi(\varepsilon) = F'(J(\varepsilon)).$$

Nun wäre also noch die Function $F$ zu bestimmen. Sie hat den Bedingungen

$$F(J(\varepsilon)) \prec 1,$$
$$F'(J(\varepsilon)) \succ 1$$

zu genügen, oder da, $J(\varepsilon) = \alpha$ gesetzt, $\alpha$ mit $\varepsilon$ Null wird, diesen einfacheren Bedingungen:

$$F(\alpha) \prec 1$$
$$F'(\alpha) \succ 1.$$

Aus den zweiten folgt durch Integration $F(\alpha) \succ \alpha$, und so geben beide vereinigt:

$$1 \succ F(\alpha) \succ \alpha,$$

wodureh das Gebiet von $F$, somit das von $\varphi$ völlig bestimmt ist.

## 13.

Die Functionen vom grössten Unendlich, die man bis jetzt aufstellen kann und für die das Integral $J(\varepsilon)$ convergirt, sind der Form:

$$F(\alpha) = \frac{1}{\alpha\, l_1\frac{1}{\alpha}\cdots l_r\frac{1}{\alpha}^{1+\mu}},\ \mu \text{ beliebig klein.}$$

Es fragt sich ob man durch Multiplication dieses $f(\alpha)$ mit einer nach der obigen Vorschrift erhaltenen Function $\varphi(\alpha)$ über diese Form hinaus kann.

Zunächst ist

$$J(\varepsilon) = \frac{1}{\mu}\, l_r\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\mu}.$$

Weiter ist $F(\alpha)$ gemäss:

$$1 \succ F(\alpha) \succ \alpha$$

zu wählen. Da wir aber differenziren müssen, so können wir für $F(\alpha)$ doch nur bekannte Functionen einsetzen. Wählen wir nun unter den bekannten die infinitär möglichst nahe an 1 gelegeren, nämlich diese:

$$\frac{1}{\left(l_R\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu}},$$

$R$ beliebig gross, $\nu$ beliebig klein, so wird

$$F'(\alpha) = \frac{\nu}{\alpha\, l_1\frac{1}{\alpha}\cdots l_R\frac{1}{\alpha}^{1+\nu}}$$

und $\varphi(\alpha) = F'(J(\alpha))$ wird daher:

$$\varphi(\alpha) = \frac{\nu}{J(\alpha)\cdot l_1\frac{1}{J(\alpha)}\cdots l_R\frac{1}{J(\alpha)}^{1+\nu}}.$$

Oder wegen

$$l_p\left(c\,l_q^{\alpha}\right) \sim l_{p+q},\ (\alpha \text{ und } c \text{ bedeuten Constanten}),$$

hat man:

$$\varphi(\alpha) \sim \frac{1}{l_r\frac{1}{\alpha}^{1-\mu} l_{r+1}\frac{1}{\alpha}\cdots l_{r+R}\frac{1}{\alpha}^{1+\nu}}.$$

Somit findet man schliesslich:

$$f(\alpha)\varphi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha}\cdots l_{r+R}\frac{1}{\alpha}^{1+\nu}},$$

ist also ersichtlich um keinen Schritt weiter gekommen, als mit der Function $f(\alpha)$, so dass man immer im nämlichen Functionsgebiet festgebannt bleibt.

14.

Gehen wir jetzt zu der dritten Annahme über, so haben wir zu zeigen, dass, falls

$$J(\varepsilon) = \int_{\alpha}^{a} f(\alpha)\,d\alpha$$

für $\varepsilon = 0$ unendlich wird, also $J(\varepsilon) > 1$ ist, man auch stets Functionen $\varphi(\alpha) < 1$ finden kann, so dass

$$J_1(\varepsilon) = \int_{\alpha}^{a} f(\alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha = F(J(\varepsilon))$$

ebenfalls für $\varepsilon = 0$ unendlich wird, also auch $J_1(\varepsilon) > 1$ ist. Die Analyse ist der obigen sehr ähnlich.

Wir haben zunächst:

$$f(\varepsilon) = -J'(\varepsilon)$$
$$f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = -F'(J(\varepsilon))J'(\varepsilon)$$

mithin

$$\varphi(\varepsilon) = F'(J(\varepsilon)).$$

Die der Function $F$ auferlegten Bedingungen sind daher:

$$F(J(\varepsilon)) > 1$$
$$F'(J(\varepsilon)) < 1,$$

und setzt man $J(\varepsilon) = x$, so hat also $F(x)$ für $x = \infty$ den Ungleichheiten

$$F(x) \succ 1$$
$$F'(x) \prec 1$$

zu genügen.

Durch Integration der zweiten folgt $F(x) \prec x$, und beide zusammen bestimmen vollständig das Unendlichkeitsgebiet von $F$, wie folgt:

$$1 \prec F(x) \prec x .$$

15.

Auch hier ist es von Interesse sich zu überzeugen, dass man mit den noch Divergenz erzeugenden möglichst rasch verschwindenden Functionen $\varphi(\alpha)$ eine Function $\varphi(\alpha) f(\alpha)$ von derselben Form erhält, wie die Function $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha l \frac{1}{\alpha} \cdots l_r \frac{1}{\alpha}}$.

Man hat zunächst:

$$J(\varepsilon) \sim l_{r+1} \frac{1}{\varepsilon} .$$

Nehmen wir für $F(x)$ eine infinitär so nahe als möglich an Eins gelegene Function, so ist es diese:

$$l_R^{\nu}(x) ,$$

$R$ beliebig gross, $\nu$ beliebig klein. Es wird also sein:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{\nu}{J(\varepsilon) l J(\varepsilon) \cdots l_R (J(\varepsilon))^{1-\nu}}$$

$$\sim \frac{1}{l_{r+1} \frac{1}{\varepsilon} \cdots l_{r+R+1} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\nu}} ,$$

so dass:

$$f(\alpha) \varphi(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha l \frac{1}{\alpha} \cdots l^{1-\nu}_{r+R+1}} .$$

Man könnte einen Augenblick meinen, dass man hier sogar auf eine Function $f(\alpha)\varphi(\alpha)$ von grösserem Unendlich als die obige $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha l \frac{1}{\alpha} \cdots l_r \frac{1}{\alpha}}$ gekommen wäre, in der $r$, weil ganz willkürlich, stets so gross, wie oben $r + R + 1$ gedacht werden kann. Allein, wenn das Integral divergirt für $f(\alpha)\varphi(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha l \frac{1}{\alpha} \cdots l^{1-\nu}_{r+R+1}}$, so wird dies a fortiori der Fall sein, wenn darunter steht $\dfrac{1}{\alpha l \frac{1}{\alpha} \cdots l_{r+R} \frac{1}{\alpha}}$, und wegen der Willkürlichkeit von $r + R$ kommt man also doch vollständig auf den alten

Fall zurück. Man findet eben auch auf diesem Wege sich aus dem logarithmischen Bann nicht hinaus.

Ich kann mir übrigens nicht versagen, darauf hinzuweisen, wie allgemein und behaglich diese Fragen sich mit den einfachen Operationen des Infinitärcalcüls erledigen lassen, Fragen, die mit den alten Methoden schon in speciellen Fällen nur mühsam zu bewältigen sind.

## 16.

Man wird also die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz, wenn man von der ersten Annahme absieht, dass es Integrale gebe, die weder endlich noch unendlich sind, durch keine *Function**) darstellen können.

Würde es eine solche Grenzfunction geben, so habe ich erstens schon speciell für diese Grenze zwischen Convergenz und Divergenz bei Reihen gezeigt**), dass wir uns ihr mit den logarithmischen Criterien nicht unbegrenzt nähern können, in dieser Abhandlung sind wir noch viel weiter gelangt, indem wir erkannt haben, dass wir uns weder jener Grenze, noch irgend einem anderen Unendlich überhaupt mit keiner Functionenfolge unbegrenzt nähern können. Jetzt kommt also noch hinzu, dass keine solche Grenzfunction möglich ist.

Gleichwohl wird es Niemanden geben, der, vorausgesetzt, dass er von den hier auseinandergesetzten Dingen noch nichts weiss, aber geübte geometrische Vorstellungen besitzt, nicht alle Zwischenstufen zwischen dem Nullwerden von

$$\frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\cdots l_r\frac{1}{\alpha}} \text{ und } \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\cdots l_r\frac{1}{\alpha}\,1^{1+\mu}}$$

für gedanklich vorhanden und gleichberechtigt hielte. Aber auch die

*) Es ist hier unter Function jede genügend gekennzeichnete Abhängigkeit verstanden. Z. B. können polygonale Linien, wie die in der Anmerkung p. 365, VIII. Bd. dieser Annalen beschriebene, durch darstellende Integrale genau oder annäherungsweise ausgedrückt werden, letzteres nach der Methode der Abhandlung (Abh. der k. Bayer. Akademie der Wissensch. II. Cl., XII. Bd., II. Abth.) „Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz etc. Art. 42 sqq." Bei dieser Gelegenheit möchte ich hinsichtlich der im Texte weiter oben betonten Unmöglichkeit, mit Hülfe der Function $\varphi$ (diese Abh. Art. 13 sqq.) aus dem logarithmischen Banne hinauszukommen, bemerken, dass die Zusammensetzung einer langsamer wie die logarithmischen abnehmenden Functionen durch darstellende Integrale zwar keine Schwierigkeiten hat, aber auch zu nichts nutzt. Höchst merkwürdig wäre dagegen die Darstellung einer langsamer als Logarithmen abnehmenden Function $F(x)$, die ihre Discussion gestattete, und an der namentlich die allgemeine Formel $F(y) \sim F(e^y) \sim F(e^{e^y}) \sim$ etc. (diese Annalen VIII. Bd., p. 393) sich bestätigen liesse.

**) Borch. Journ. Bd. 76, pag. 88 sqq.

genaue Kenntniss der obigen Ergebnisse vorausgesetzt, hätte es, meiner Ueberzeugung nach, nicht den geringsten Sinn anzunehmen, dass es keine Grenze zwischen Convergenz und Divergenz gebe, oder richtiger, eine solche Annahme würde unseren eingewurzelten Vorstellungen zuwider laufen.

Wie also diesen Widerspruch zwischen den Ergebnissen der analytischen Untersuchung und der angeborenen Grössenvorstellung versöhnen?

Ich finde das Heil nur in der Vergleichung mit den Zahlen. *Lediglich mit den Rationalzahlen kann man die unendlichwerdenden Functionen vergleichen,* sie sind die wirklichen infinitären Grössen und nicht Grenzen solcher. Der Logarithmus, die Potenz und überhaupt jedes ins Unbegrenzte verfolgbare Gesetz ist ein *rationales Unendlich*, es sind thatsächlich gegebene Wachsthümer.

Wenn wir nun in der gemeinen Zahlenfolge, trotzdem die Folge der rationalen Zahlen unbegrenzt dicht ist, dennoch, hier durch analytische Betrachtungen, dort durch geometrische Constructionen, dahin geführt werden, Grössen als vorhanden anzusehen, welche durch Zahlen nicht ausdrückbar sind, wie $\sqrt{2}$, oder $\pi$ dergleichen sind, was Wunder, wenn auch in der infinitären Grössenfolge unsere Gedankenverbindungen zu der Annahme einer Art des Wachsthumes uns hinleiten, die man durch analytische Operationen nie wird darstellen können? Die Sache bleibt immerhin sonderbar, aber ist es nicht auch befremdlich, dass keine Zahl die Diagonale eines Quadrates, dessen Seite gleich Eins, ausdrückt?

Kurzum ich meine, *die ideelle Grenze zwischen Convergenz und Divergenz ist ein irrationales Unendlich,* welches sich zu den convergenten und divergenten unendlichen Operationen ganz ähnlich verhält, wie die Länge der Kreisperipherie zu den von aussen und von innen für sich ihr nähernden geschlossenen Linien von numerisch darstellbarer Länge.

Bei diesem Vergleich habe ich mich beruhigt, und habe, um an die Irrationale $\pi$ zu erinnern, die Function von irrationalem Unendlich, welche die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz bildet, mit $\tau$ bezeichnet.

Dieses neue Paradoxon, der durch keine Function je darstellbaren Grenze zwischen Convergenz und Divergenz, ist also nicht so leicht erklärt, wie dass erste, die Annäherung an ein gegebenes Unendlich betreffende, die Thatsache erscheint aber schliesslich nicht wunderbarer, wie die, dass es durch rationale Zahlen nicht ausdrückbare durch unsere Anschauung gleichwohl geforderte Grössen giebt.

17.

Die Einführung der Irrationalen $\tau(\alpha)$ in dem Calcül gewährt grosse Bequemlichkeit und verliert den Schein des Gewagten, wenn bedacht wird, dass man sich unter $\tau(\alpha)$ nicht die Grenze von Convergenz und Divergenz selbst zu denken braucht, sondern ein Unendlich, das ihr näher liegt, als die mit dem heutigen Functionenvorrath darstellbaren. So kann man in den meisten Fällen unter $\tau(\alpha)$ irgend eine Function sich vorstellen, die für jeden endlichen Werth von $r$ und $\mu > 1$ der Ungleichheit

$$\frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\cdots l_r\frac{1}{\alpha}} > \tau(\alpha) > -\frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\cdots l_r\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{\frac{1}{\alpha}^{1+\mu}}$$

genügt.

Die Einführung dieser Function $\tau(\alpha)$ in den Infinitärcalcül ist deshalb nützlich, weil man mit ihr, ohne sie wirklich zu kennen, rechnen kann, und im Stande ist, *sie durch Differentiation aus den infinitären Relationen zu eliminiren und zwar mit Hülfe des Satzes von den Infinitärtypen.*

Um aber hier möglichst wenig vorauszusetzen, werden wir die für diese Elimination erforderliche Gleichheit direct ableiten.

Man hat jedenfalls:

$$l\frac{1}{\alpha}^{-1} < \tau(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}^{-(1+\mu)},$$

also ist

$$\tau(\alpha) = \lambda(\alpha)\cdot l\frac{1}{\alpha}^{-1},$$

wo $\lambda(\alpha)$ ein kleineres Unendlich oder eine grössere Null hat, als eine Potenz von $l\frac{1}{\alpha}$. Nun hat man durch Differentiation:

$$\tau'(\alpha) = \frac{\lambda'(\alpha)}{l\frac{1}{\alpha}} + \frac{\lambda(\alpha)}{\alpha l\frac{1}{\alpha}^2}.$$

Weiter ist:

$$\frac{1}{ll\frac{1}{\alpha}} > \lambda(\alpha) > \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}^{\mu}},$$

oder durch Differentiation:

$$-\frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha} ll\frac{1}{\alpha}} > \lambda'(\alpha) > -\frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha}^{1+\mu}}.$$

Setzen wir:

$$\tau'(\alpha) = \frac{\lambda(\alpha)}{\alpha l\frac{1}{\alpha}^2}\left\{\frac{\lambda'(\alpha)}{\lambda(\alpha)}\cdot\alpha l\frac{1}{\alpha}+1\right\},$$

so ist wegen $\lambda'(\alpha) \prec \frac{1}{\alpha l \frac{1}{\alpha} ll \frac{1}{\alpha}}$ die Klammer $\sim 1$. Man hat also $\tau'(\alpha) \sim \frac{\lambda(\alpha)}{\alpha l \frac{1}{\alpha}}$ und durch Division mit $\tau(\alpha) = \lambda(\alpha) l \frac{1}{\alpha}^{-1}$ findet man:

$$\alpha l \frac{1}{\alpha} \tau'(\alpha) \sim \tau(\alpha),$$

Ist nun noch eine andere Gleichheit, die $\tau(\alpha)$ enthält, gegeben, so kann man sie differenziren, und aus den drei Gleichungen schliesslich die Function $\tau$ gänzlich eliminiren. Dieser Kunstgriff ist mir schon öfters von Nutzen gewesen, ich habe u. A. in der Theorie der Fourier'schen Reihen davon Gebrauch gemacht.

---

Indem ich hiermit diesem Ausflug in ein geheimnissvolles Gebiet unsrer Wissenschaft ein Ziel setze, erlaube ich mir denen gegenüber, welche eine Rechnungsart mit Zahlen ohne Einheit für ein Unding zu halten geneigt sind, zu bemerken, dass man stets mit Elementen, denen eine gewisse Reihenfolge zugeschrieben wird, Rechnungsoperationen vornehmen kann, warum also nicht mit den Unendlich der Functionen? In der Raumlehre erschien schon früh, wenn auch vorübergehend und nirgend recht greifbar, der Gedanke einer vom Längenmass unabhängigen Geometrie, und dieser Gedanke wurde neuerdings nach verschiedenen Richtungen, in gewissem Sinne durch die Schöpfungen von Poncelet, dann von Riemann, Listing, u. A. verwirklicht. Aehnlich scheinen in der Analysis die Nebel des Unendlichen zu einer Rechnungsart ohne Zahlen sich verkörpern zu sollen. Mag nun der Bereich ihrer Anwendbarkeit auf das eigentliche Gebiet der Convergenzprobleme beschränkt bleiben oder nicht: immerhin gewährt diese Rechnung mit dem Unendlichen den eigenthümlichen Reiz, dass wir der Lösung ihrer Aufgaben in den durch das üppige Wuchern der modernen Mathematik dem Blicke täglich mehr entzogenen Grundlagen unserer Wissenschaft nachforschen müssen.

# Versuch einer neuen Entwicklung der Hamilton'schen Methode, genannt „Calculus of Quaternions".

Von

GÖRAN DILLNER,

Adj. Professor in Upsala.

Die Methode Hamilton's lässt sich auf vier Fundamentalgesetze der räumlichen Complexgrössen begründen: 1) das associative Gesetz, 2) das Gesetz der Conjugirten eines Productes, 3) das Gesetz der Rechnung in doppeltem Axensysteme, 4) das distributive Gesetz. Die unter 1), 2) und 4) erwähnten Gesetze hat Hamilton auf den Begriff einer Quaterne begründet, welcher Umstand, weil die Quaterne ein abgeleiteter Begriff ist (= dem Producte zweier räumlichen Complexen), die ganze Entwicklungsweise ziemlich schwierig macht; hier sind diese drei Fundamentalgesetze auf den ursprünglichen Begriff einer räumlichen Complexe zurückgeführt worden, und dadurch wird ihr Beweis wesentlich erleichtert. Die Entwicklung des dritten Gesetzes fehlt sowohl bei Hamilton als den anderen Schriftstellern, welche über seine Methode geschrieben haben, obgleich dieses Gesetz vorzugsweise der Methode den Charakter eines brauchbaren und kräftigen Instruments für geometrische und mechanische Untersuchungen verleiht. — Ausser den zwei Hauptwerken von Hamilton: *Lectures on Quaternions*, Dublin 1853, und *Elements of Quaternions*, London 1866, ist die folgende Litteratur zu erwähnen: 1) *An elementary Treatise on Quaternions* by Tait, 2d ed., Oxford 1873, 2) *Introduction to Quaternions* by Kelland and Tait, London 1873, zwei Arbeiten, in welchen die Anwendung der Methode in ausgezeichneter Weise durchgeführt worden ist; 3) *Essai sur le calcul des quaternions* par Allégret, Paris 1862; 4) *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen* von Hankel, I. Theil, Leipzig 1867; 5) *Théorie élémentaire des quantités complexes* par Hoüel, IVme partie, *Éléments de la théorie des quaternions*, Paris 1874; 6) *Theorie der Quaternionen* von Unverzagt, Wiesbaden 1876.

## Vorbereitende Bemerkungen.

**1.** Es sei $OXYZ$ ein gegebenes rechtwinkliges Axensystem. Nach den positiven Richtungen der Axen $OX$, $OY$, $OZ$ sind von dem Nullpunkte $O$ die respectiven Einheitslängen $i$, $j$, $k$ abgesteckt; für diese Einheitslängen, welche wir nachher *Einheitsaxen* oder mit Hamilton kurz *Axen* nennen werden, wird folgendes Multiplicationsgesetz festgestellt:

$$(1) \qquad \begin{cases} ij = k, & jk = i, & ki = j, \\ ji = -k, & kj = -i, & ik = -j, \end{cases}$$

d. h. *das Product zweier Axen ist gleich der dritten, alle in cyclischer Ordnung genommen, und dieses Product ändert das Vorzeichen, wenn die Ordnung der Factoren geändert wird.*

Dieses Gesetz, obgleich von geometrischem Gesichtspunkte ganz conventionell, findet doch in der Mechanik seine Erklärung: es bedeute nämlich der erste Factor $i$ einen Hebelarm, der zweite $j$ eine in dessen Endpunkt eingreifende Kraft; das Product $ij$ repräsentirt also das *Drehungsmoment* um die Axe $k$. Dieses Moment, als *lineares* betrachtet, soll mit $k$ bezeichnet werden; eine Vertauschung des Hebelarms und der Kraft verwandelt die Drehung in eine entgegengesetzte; also muss das Product $ji$ als lineares Moment mit $-k$ bezeichnet werden. Das Gleiche gilt für die anderen Producte $jk$ und $ki$.

**2.** Um das *associative* Gesetz (durch die Identität $(ab)c = a(bc)$ ausgedrückt) für Producte von drei oder mehreren Axen gültig zu machen, ist es nothwendig und hinreichend

$$(2) \qquad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

zu setzen, wodurch die Axen den gemeinschaftlichen analytischen Ausdruck $\sqrt{-1}$ bekommen. Nach diesem Gesetze haben wir also $i(ij) = (ii)j = -j$ u. s. w.

**3.** Es seien $x$, $y$, $z$ gewöhnliche Coordinaten; dann bezeichnet die Summe $ix + jy + kz$ einen Punkt im Raume, welcher auch durch eine der Richtung und Länge nach bestimmte Gerade $\alpha$ bezeichnet werden kann. Setzen wir somit

$$(3) \qquad \alpha = ix + jy + kz,$$

so wird $\alpha$ eine *räumliche Complexe* (*Triplexe*) oder ein „*Vector*“ genannt. Der mit $\alpha$ bezeichnete Punkt wird der Punkt $\alpha$ oder (wie gewöhnlich) der Punkt $(xyz)$ genannt. Die Zeichen $T\alpha$ und $U\alpha$, „*Tensor*“ und *Einheitsvector* genannt, bedeuten resp. die absolute Grösse von $\alpha$ und den Vector $\alpha$ mit der absoluten Grösse 1. Wir haben also

$$(4) \qquad T\alpha = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und, wenn $l$, $m$, $n$ die Winkel des Vectors mit den resp. Axen $i$, $j$, $k$ bezeichnen:

$$(5) \quad U\alpha = i\cos l + j\cos m + k\cos n = \frac{ix+jy+kz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\alpha}{T\alpha}.$$

4. Wie in der Theorie der ebenen Complexen bedeutet die Vectorsumme $\beta+\gamma$ einen aus den Stücken $\beta$ und $\gamma$ zusammengesetzten Weg, so dass also $\alpha$ in der Gleichung $\alpha=\beta+\gamma$ den Weg bedeutet, welcher gleich der Summe von $\beta$ und $\gamma$ ist, oder auch, weil zwei Vectoren von gleicher Grösse und Richtung als *identisch* anzusehen sind, die Diagonale des Parallelogrammes, das aus $\beta$ und $\gamma$ als Seiten construirt ist. Hieraus folgt, dass eine Summe von Vectoren $\Sigma\alpha=0$ *in geometrischer Hinsicht* ein geschlossenes Polygon, dessen Seiten die Summanden sind, und, in *mechanischer Hinsicht*, das Gleichgewicht der von den Summanden repräsentirten Kräfte bedeutet. In einer solchen Summe ist die Ordnung der Summanden gleichgültig; ferner gelten für sie die Gleichungsaxiome „Gleiches zu Gleichem addirt oder von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches", „Gleiches mit gleichen Zahlen multiplicirt giebt Gleiches"; also ist $\alpha-\beta=\gamma$, $\mu\alpha=\mu\beta+\mu\gamma$, wenn $\mu$ eine reelle Zahl ist. Diese Sätze werden hier in derselben Weise bewiesen wie in der Theorie der ebenen Complexen.

## Multiplication der Vectoren.

5. *Ein Product von Vectoren* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$ *wird als identisch mit dem algebraischen Multiplicationsresultate derselben definirt, wenn die Vectoren nach* (3) *in dem Axensysteme* $(ijk)$ *ausgedrückt worden sind und Rücksicht auf die Gesetze* (1) *und* (2) *genommen wird.*

Unterscheidet man also die Coordinaten der verschiedenen Vectoren durch Indices, so hat man, wenn $W$, $X$, $Y$, $Z$ reelle Zahlen bezeichnen:

$$(6) \quad \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = (ix_1+jy_1+kz_1)(ix_2+jy_2+kz_2)\cdots(ix_r+jy_r+kz_r)$$
$$= W+iX+jY+kZ.$$

Unter der Annahme von drei Factoren hat man in dem Multiplicationsresultate *ursprünglich* die dreigliedrigen Axenproducte $iii$, $iij$, $iik$ u. s. w., von denen jedes mit einem reellen Coefficienten multiplicirt ist; bei der Multiplicationsordnung $(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3$ werden diese Axenproducte $(ii)i$, $(ii)j$, $(ii)k$ u. s. w.; bei der Multiplicationsordnung $\alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$ werden dieselben Producte $i(ii)$, $i(ij)$, $i(ik)$ u. s. w. Also gilt für das dreigliedrige Vectorproduct $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ das *associative* Gesetz, weil dieses Gesetz nach Nr. 2. für die Producte der Axen $i$, $j$, $k$ gilt. Dasselbe Raisonnement kann auf ein Product von einer beliebigen Anzahl Vectoren ausgedehnt werden*). Wir können also folgendes

*) Vergl. Allégret, Nr. 7 etc.

allgemeine Gesetz, welches von fundamentaler Bedeutung ist, aussprechen:

*Das associative Gesetz gilt für ein Product von einer beliebigen Anzahl Vectoren.*

**6.** Ein Product von Vectoren, als zerlegbar in vier Theile [vgl. (6)], wird eine „Quaternio" oder kürzer eine *Quaterne* genannt. Wenn also ein Product von Vectoren, je zwei in ihrer Reihenfolge zusammengenommen, als ein Product von Quaternen anzusehen ist, *so gilt auch das associative Gesetz für ein Product von einer beliebigen Anzahl Quaternen.*

**7.** Das erste Glied $W$ der Quaterne (6), welches reell und ganz unabhängig von dem Axensysteme ist, heisst die *Scalare**) oder *der algebraische Theil*, die Summe der übrigen drei Glieder, welche ein *Vector* ist, *der geometrische Theil der Quaterne.* Die vier reellen Zahlen $W$, $X$, $Y$, $Z$ nennen wir *die Coordinaten der Quaterne.*

Wir haben also die folgende Bezeichnung:

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = S\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r + V\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r \text{ **)}, \tag{7}$$

wo

$$\begin{cases} S\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = W, \\ V\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = iX + jY + kZ. \end{cases} \tag{8}$$

Eine wesentliche Eigenschaft eines Vectors ist die folgende:

$$V^2\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = -(X^2+Y^2+Z^2) = -T^2 V\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r, \tag{9}$$

d. h. *das Quadrat eines Vectors ist gleich dem Quadrate seines Tensors, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen.*

Die *Conjugirte* eines Productes, bezeichnet mit $K\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$, wird durch folgende Gleichung definirt:

$$K\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = S\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r - V\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r, \tag{10}$$

d. h. *als die Differenz zwischen der Scalare und dem Vector des Productes.*

*Das Quadrat des Tensors einer Quaterne wird als das Product der Quaterne und ihrer Conjugirten definirt*; also ist nach Nr. 5., (8) und (9):

$$\begin{aligned} T^2\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r &= (S\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r + V\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r)(S\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r - V\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r) \\ &= S^2\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r - V^2\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Wir sehen also, dass *der Tensor einer Quaterne die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate ihrer Coordinaten ist* [vergl. (4)].

**8.** Wie man durch directe Multiplication findet, hat man gleichzeitig:

---

*) Quantitas „scalaris".

**) Wenn die Deutlichkeit es fordert, setze man eine Parenthese nach $S$ und $V$ und analoge Zeichen, um den Umfang solcher Zeichen anzudeuten.

$$(12)\qquad \begin{cases} \alpha_1\alpha_2 = S\alpha_1\alpha_2 + V\alpha_1\alpha_2, \\ (-1)^2\alpha_2\alpha_1 = S\alpha_1\alpha_2 - V\alpha_1\alpha_2. \end{cases}$$

Wir nehmen jetzt an, dass dieses Gesetz für ein Product von $(r-1)$ Vectoren gilt, oder dass wir gleichzeitig haben:

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1} = S\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1} + V\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1},$$
$$(-1)^{r-1}\alpha_{r-1}\cdots\alpha_2\alpha_1 = S\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1} - V\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}.$$

Wir wollen dann beweisen, dass dasselbe Gesetz ebenso für ein Product von $r$ Vectoren gilt.

Wir setzen nach (6):

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1} = \omega + i\xi + j\eta + k\zeta;$$

dann bekommen wir durch Multiplication mit $\alpha_r = ix_r + jy_r + kz_r$ folgendes Resultat:

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}\alpha_r = \omega\alpha_r - (\xi x_r + \eta y_r + \zeta z_r) + \begin{vmatrix} i & \xi & x_r \\ j & \eta & y_r \\ k & \zeta & z_r \end{vmatrix}.$$

Ferner ist nach der Voraussetzung:

$$(-1)^{r-1}\alpha_{r-1}\cdots\alpha_2\alpha_1 = \omega - (i\xi + j\eta + k\zeta);$$

durch Multiplication mit $-\alpha_r$ ergiebt sich das Resultat:

$$(-1)^r\alpha_r\alpha_{r-1}\cdots\alpha_2\alpha_1 = -\alpha_r\omega - (x_r\xi + y_r\eta + z_r\zeta) + \begin{vmatrix} i & x_r & \xi \\ j & y_r & \eta \\ k & z_r & \zeta \end{vmatrix},$$

und somit erhalten wir durch Vergleichung mit dem vorigen Multiplicationsresultate:

$$(13)\quad (-1)^r\alpha_r\cdots\alpha_2\alpha_1 = S\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r - V\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = K\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r.$$

Aber nach (12) ist diese Formel richtig für $r = 2$, also ist sie richtig für $r = 3$, und im Allgemeinen für $r =$ einer beliebigen ganzen pos. Zahl.

Wir können also folgenden allgemeinen Satz, welcher von fundamentaler Bedeutung ist, aussprechen: *die Conjugirte eines Productes von einer beliebigen Anzahl Vectoren ist gleich dem Producte derselben Vectoren, alle mit entgegengesetztem Vorzeichen und in umgekehrter Ordnung genommen.*

Dieses Fundamentalgesetz werden wir *das Gesetz der Conjugirten eines Productes* nennen.

**9.** Wenn die Anzahl der Vectoren in (13) gerade oder $r = 2n$ ist, und die Producte von je zwei Vectoren mit den Quaternen $q_1$, $q_2$, $\cdots$ $q_n$ bezeichnet werden, bekommen wir folgende sehr wichtige Formel:

$$(14)\qquad Kq_1q_2\cdots q_n = Kq_n\cdots Kq_2Kq_1,$$

d. h. *die Conjugirte eines Productes von Quaternen ist gleich dem Producte der Conjugirten der Quaternen in umgekehrter Ordnung genommen.*

**10.** Durch Multiplication der Formeln (7) und (13) bekommen wir nach (9) und (11), mit Hülfe des associativen Gesetzes, folgendes Resultat:

$$T^2\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = T^2\alpha_1\,T^2\alpha_2\cdots T^2\alpha_r, \tag{15}$$

d. h. (nach Ausziehung der Quadratwurzel) *der Tensor eines Productes von Vectoren ist gleich dem Producte der Tensoren derselben Vectoren.*

Durch Multiplication des Quaternenproductes $q_1q_2\cdots q_n$ mit der Conjugirten dieses Productes in (14) bekommen wir nach (11) und Nr. 6.:

$$T^2q_1q_2\cdots q_n = T^2q_1\,T^2q_2\cdots T^2q_n, \tag{16}$$

d. h. (nach Ausziehung der Quadratwurzel) *der Tensor des Productes von Quaternen ist gleich dem Producte der Tensoren derselben Quaternen.*

Nach den Formeln (15) und (16) können wir also ein Product einer beliebigen Anzahl Summen, deren Summanden drei oder vier Quadrate sind, als eine Summe von vier Quadraten ausdrücken, wie wir in den folgenden Beispielen sehen werden.

Ex. 1. In (15) haben wir für $r=2$:

$$(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2+(y_1z_2-z_1y_2)^2+(z_1x_2-x_1z_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2 = (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2).$$

Ex. 2. In (16) bekommen wir für $n=2$, wenn wir $q_1=w_1+ix_1+jy_1+kz_1$ und $q_2=w_2+ix_2+jy_2+kz_2$ setzen, folgende Formel [von Euler gegeben]:

$$\begin{aligned}&(w_1w_2-x_1x_2-y_1y_2-z_1z_2)^2+(w_1x_2+w_2x_1+y_1z_2-z_1y_2)^2\\&+(w_1y_2+w_2y_1+z_1x_2-x_1z_2)^2+(w_1z_2+z_1w_2+x_1y_2-y_1x_2)^2\\&=(w_1^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2)(w_2+x_2^2+y_2^2+z_2^2).\end{aligned}$$

Von diesen Beispielen können wir auf die grosse algebraische Umfassung der Formeln (15) und (16) schliessen.

**11.** Durch Addition und Subtraction der Formeln (7) und (13) bekommen wir:

$$\begin{cases} 2\,S\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r+(-1)^r\alpha_r\cdots\alpha_2\alpha_1, \\ 2\,V\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r-(-1)^r\alpha_r\cdots\alpha_2\alpha_1, \end{cases} \tag{17}$$

eine Formel von grosser Bedeutung in den folgenden Reductionen.

Aus (13) erhalten wir ferner:

$$\begin{cases} S\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = (-1)^rS\alpha_r\cdots\alpha_2\alpha_1, \\ V\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r = (-1)^{r+1}V\alpha_r\cdots\alpha_2\alpha_1, \end{cases} \tag{18}$$

was als ein anderer Ausdruck der Formel (13) anzusehen ist.

**12.** *Der reciproke Werth* $\frac{1}{p}$ *oder* $p^{-1}$ ***einer Quaterne*** $p$ ***wird in*** *algebraischer Weise als die Quantität definirt, welche, multiplicirt mit der Quaterne selbst, eins als Resultat giebt,* d. h. $p \cdot \frac{1}{p} = pp^{-1} = 1$.

Nach dieser Definition bekommt man, weil nach (11) $pKp = T^2p$:

$$\frac{1}{p} = p^{-1} = \frac{Kp}{T^2p}, \tag{19}$$

d. h. *der reciproke Werth einer Quaterne ist gleich ihrer Conjugirten, dividirt durch das Quadrat ihres Tensors.*

Die Bedeutung eines Quotienten $\frac{q}{p}$ von Quaternen wird durch die folgende Gleichung angegeben:

$$\frac{q}{p} = q \cdot \frac{1}{p} = qp^{-1} = \frac{qKp}{T^2p}. \tag{20}$$

Wir sehen also, *dass die Quotienten von Quaternen unmittelbar unter die Gesetze der Multiplication subsumirt werden können.*

Weil der Vector als eine Quaterne, deren Scaläre Null ist, betrachtet werden kann, so gelten auch die Formeln (19) und (20) für die Vectoren $\alpha_1$ und $\alpha_2$ statt der Quaternen $p$ und $q$. Wir haben also, weil nach (10) $K\alpha_1 = -\alpha_1$, folgende Ausdrücke für *den reciproken Werth eines Vectors* $\alpha_1$:

$$\frac{1}{\alpha_1} = \alpha_1^{-1} = \frac{-\alpha_1}{T^2\alpha_1}, \tag{21}$$

und für *den Quotient zweier Vectoren* $\alpha_2$ und $\alpha_1$:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \alpha_2 \cdot \frac{1}{\alpha_1} = \alpha_2\alpha_1^{-1} = \frac{-\alpha_2\alpha_1}{T^2\alpha_1}. \tag{22}$$

**13.** Folgender Satz wird als selbstverständlich ausgesprochen, weil eine Scaläre, als eine rein algebraische Grösse, und ein Vector, als eine bestimmte geometrische Grösse, nicht einander aufheben können:

*Wenn* $q$ *eine Quaterne bezeichnet, so kann die Gleichung* $q = Sq + Vq = 0$ *nicht existiren, ohne dass* $Sq = 0$ *und* $Vq = ix + jy + kz = 0$ *ist, welche letztere Gleichung in die drei folgenden zerfällt:* $x = 0$, $y = 0$ *und* $z = 0$.

Als eine Folge dieses Satzes haben wir den Satz:

*Die Gleichung* $q - q' = 0$ *oder* $q = q'$, *wenn* $q = w + ix + jy + kz$ *und* $q' = w' + ix' + jy' + kz'$, *kann nicht existiren, wenn nicht* $w = w'$, $x = x'$, $y = y'$ *und* $z = z'$.

## Rechnung in doppeltem Axensysteme.

**14.** Ein Product von Vectoren $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r$, in einem gegebenen Axensysteme $(i, j, k)$ ausgeführt, wird mit ${}^{(s)}\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r$ bezeichnet; der Index $s = 0$ wird als dem Axensysteme $(ijk)$ entsprechend angesehen.

Wir haben also das zweigliedrige Product

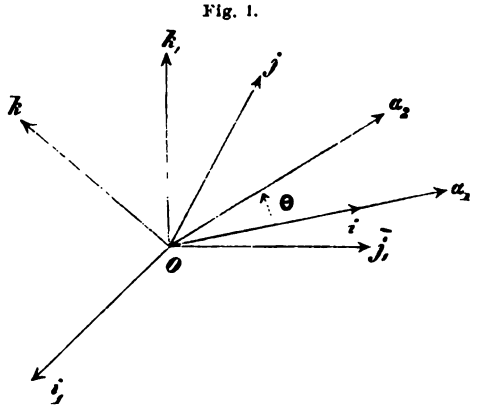
$$(23) \qquad {}^{(1)}\alpha_1\alpha_2 = -(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2) + \begin{vmatrix} i_1 & x_1 & x_2 \\ j_1 & y_1 & y_2 \\ k_1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

und nach (15)

$$(24) \quad T^2\alpha_1\alpha_2 = (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2+(y_1z_2-z_1y_2)^2+(z_1x_2-x_1z_2)^2 + (x_1y_2-y_1x_2)^2 = T^2\alpha_1 T^2\alpha_2.$$

Wählen wir jetzt ein anderes Axensystem $(ijk)$ mit demselben Nullpunkte $O$ [Fig. 1] und so gelegen, dass die Axe $i$ längs dem Vector $\alpha_1$ und das Dreieck $\alpha_1 O\alpha_2$ in der Ebene $(ij)$ liegt; und nennen wir ferner $\theta$ den Winkel $\alpha_1 O\alpha_2$, von $\alpha_1$ nach $\alpha_2$ gerechnet, so bekommen wir folgendes Multiplicationsresultat:

Fig. 1.




$$(25) \quad {}^{(0)}\alpha_1\alpha_2 = iT\alpha_1(iT\alpha_2\cos\theta + jT\alpha_2\sin\theta) = -T\alpha_1 T\alpha_2\cos\theta + kT\alpha_1 T\alpha_2\sin\theta.$$

Wir haben nun zu beweisen, dass die in (23) und (25) aufgestellten Multiplicationsresultate *identisch* sind.

Unmittelbar erkennen wir, dass $T\alpha_1 T\alpha_2\cos\theta = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$, und haben somit nach (24), weil $T^2\alpha_1 T^2\alpha_2 - T^2\alpha_1 T^2\alpha_2\cos^2\theta = T^2\alpha_1 T^2\alpha_2\sin^2\theta$ ist:

$$(26) \quad T^2\alpha_1 T^2\alpha_2\sin^2\theta = (y_1z_2-z_1y_2)^2+(z_1x_2-x_1z_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2.$$

Der Vector $kT\alpha_1 T\alpha_2\sin\theta$, projicirt auf das Axensystem $(i_1j_1k_1)$, giebt, wenn wir seine Coordinaten $X$, $Y$, $Z$ nennen:

$$(27) \qquad kT\alpha_1 T\alpha_2\sin\theta = i_1X+j_1Y+k_1Z$$

und in Folge davon [vergl. (4)]:

$$(28) \qquad T^2\alpha_1 T^2\alpha_2\sin^2\theta = X^2+Y^2+Z^2.$$

Weil die Axe $k$ senkrecht gegen die Vectoren $\alpha_1$ und $\alpha_2$ ist, haben wir die folgenden Gleichungen:

$$x_1X+y_1Y+z_1Z=0,$$
$$x_2X+y_2Y+z_2Z=0,$$

woraus mit Hülfe der Formeln (26) und (28) das folgende System von Gleichungen:

$$(29) \qquad \frac{X}{y_1z_2-z_1y_2} = \frac{Y}{z_1x_2-x_1z_2} = \frac{Z}{x_1y_2-y_1x_2} = \pm 1$$

hervorgeht. Um das Vorzeichen + oder − zu bestimmen, setzen wir $z_1 = z_2 = 0$, und haben somit nach (27) $T\alpha_1 T\alpha_2 \sin\theta = Z$; wir setzen ferner $x_1 = T\alpha_1 \cos\omega$, $y_1 = T\alpha_1 \sin\omega$, $x_2 = T\alpha_2 \cos\omega'$, $y_2 = T\alpha_2 \sin\omega'$, wovon $x_1 y_2 - y_1 x_2 = T\alpha_1 T\alpha_2 \sin(\omega' - \omega)$; und wenn wir beobachten, dass $\omega' - \omega = \theta$, bekommen wir schliesslich $Z = x_1 y_2 - y_1 x_2$ und also + als Vorzeichen.

Die Formeln (27) und (29), mit der oben aufgestellten Formel für die Scalären zusammengenommen, geben also:

$$(30)\quad \begin{cases} S\alpha_1\alpha_2 = -T\alpha_1 T\alpha_2 \cos\theta = -(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2), \\ V\alpha_1\alpha_2 = k\,T\alpha_1 T\alpha_2 \sin\theta = \begin{vmatrix} i_1 & x_1 & x_2 \\ j_1 & y_1 & y_2 \\ k_1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

oder, folgendermassen ausgedrückt:

$$(31)\qquad {}^{(0)}\alpha_1\alpha_2 = {}^{(1)}\alpha_1\alpha_2,$$

d. h. *das Product $\alpha_1\alpha_2$ giebt identische Multiplicationsresultate in dem Axensysteme $(i\,j\,k)$ und dem Axensysteme $(i_1\,j_1\,k_1)$.*

**15.** Weil das Axensystem $(i_1 j_1 k_1)$ in (31) ganz willkürlich ist, können wir statt desselben ein anderes willkürliches Axensystem $(i_2 j_2 k_2)$ mit demselben Nullpunkte einführen, und haben somit die Identität ${}^{(0)}\alpha_1\alpha_2 = {}^{(2)}\alpha_1\alpha_2$ und folglich die Identität

$$(32)\qquad {}^{(1)}\alpha_1\alpha_2 = {}^{(2)}\alpha_1\alpha_2,$$

d. h. *das Product $\alpha_1\alpha_2$ giebt identische Multiplicationsresultate in den ganz willkürlichen Axensystemen $(i_1 j_1 k_1)$ und $(i_2 j_2 k_2)$.*

Bezeichnen wir die Coordinaten der Vectoren $\alpha_1$ und $\alpha_2$ in dem Axensysteme $(i_2 j_2 k_2)$ mit resp. $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ und $\xi_2$, $\eta_2$, $\zeta_2$, so bekommen wir folgende Identitäten zwischen Scalären und Vectoren in den zwei verschiedenen Axensystemen:

$$(33)\quad \begin{cases} S\alpha_1\alpha_2 = -(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_1) = -(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\xi_2), \\ V\alpha_1\alpha_2 = \begin{vmatrix} i_1 & x_1 & x_2 \\ j_1 & y_1 & y_2 \\ k_1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_2 & \xi_1 & \xi_2 \\ j_2 & \eta_1 & \eta_2 \\ k_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Bemerkung. Lassen wir das Axensystem $(i_1 j_1 k_1)$ in Verhältniss zu dem Axensysteme $(i_2 j_2 k_2)$ als einem festen sich bewegen, so werden die Axen $i_1, j_1, k_1$ ihrer Richtungen nach veränderliche Grössen; und somit ist die wichtige Entdeckung Hamilton's bewiesen, *dass die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ im Allgemeinen eine nach der Richtung veränderliche geometrische Grösse repräsentirt.*

**16.** Wir gehen jetzt dazu über, die Sätze „Gleiches zu Gleichem addirt und Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches" so zu erweitern, dass sie auch die Quaternen umfassen.

1) Zu diesem Zwecke nehmen wir die Quaternen $q$ und $q'$ in den willkürlichen Axensystemen $(i_1 j_1 k_1)$ und $(i_2 j_2 k_2)$ ausgedrückt an. Nach (32) ist:

$$^{(1)}q = {}^{(2)}q \text{ und } {}^{(1)}q' = {}^{(2)}q'.$$

und folglich nach (33):

$$\left.\begin{aligned} S^{(1)}q &= S^{(2)}q \\ V^{(1)}q &= V^{(2)}q \end{aligned}\right\} \text{ und } \left\{\begin{aligned} S^{(1)}q' &= S^{(2)}q' \\ V^{(1)}q' &= V^{(2)}q'. \end{aligned}\right.$$

Unmittelbar ergiebt sich $S^{(1)}q + S^{(1)}q' = S^{(2)}q + S^{(2)}q'$; aus der Bedeutung eines Vectors die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, ergiebt sich ferner [vergl. Nr. 4.] $V^{(1)}q + V^{(1)}q' = V^{(2)}q + V^{(2)}q'$; also ist der erste Satz bewiesen, nämlich:

$$^{(1)}q + {}^{(1)}q' = {}^{(2)}q + {}^{(2)}q', \tag{34}$$

d. h. *der Satz „Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches" gilt auch für die Quaternen, wenn sie auf jeder Seite des Zeichens = in verschiedenen Axensystemen ausgedrückt sind.*

2) Ferner haben wir nach (32) $V^{(1)}q\, V^{(1)}q' = V^{(2)}q\, V^{(2)}q'$ und nach (33) und dem vorhergehenden Satze $S^{(1)}q\, S^{(1)}q' + S^{(1)}q\, V^{(1)}q' + S^{(1)}q'\, V^{(1)}q = S^{(2)}q\, S^{(2)}q' + S^{(2)}q\, V^{(2)}q' + S^{(2)}q'\, V^{(2)}q$, woraus nach (34) und der in Nr. 5. gegebenen Definition der Multiplication der Beweis des zweiten Satzes hervorgeht, nämlich:

$$^{(1)}q\,{}^{(1)}q' = {}^{(2)}q\,{}^{(2)}q', \tag{35}$$

d. h. *der Satz „Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches" gilt auch für die Quaternen, wenn sie auf jeder Seite des Zeichens = in verschiedenen Axensystemen ausgedrückt sind.*

Diese Sätze (34) und (35) gelten auch für die Vectoren, weil diese als Quaternen, deren Scalären Null sind, betrachtet werden können.

**17.** Multipliciren wir jetzt die Gleichung (32), links mit den Vectoren $\alpha_3, \cdots \alpha_r$, alle in dem Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$ ausgedrückt, und rechts mit denselben Vectoren, alle in dem Axensysteme $(i_2 j_2 k_2)$ ausgedrückt, so bekommen wir nach (35):

$$^{(1)}\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r = {}^{(2)}\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r, \tag{36}$$

wonach wir folgenden allgemeinen Satz von fundamentaler Bedeutung aussprechen können:

*Das Product $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$ giebt identische Multiplicationsresultate in den ganz willkürlichen Axensystemen $(i_1 j_1 k_1)$ und $(i_2 j_2 k_2)$.*

Derselbe Satz gilt auch, wie wir unmittelbar sehen können, für ein Product einer beliebigen Anzahl von Quaternen [vergl. Nr. 6.].

Da es nun ganz gleichgültig ist, in welchem Axensysteme ein Product von Vectoren oder Quaternen ausgeführt wird, so braucht man im Allgemeinen den Index für das Axensystem nicht anzugeben.

**18.** Es lässt sich im Voraus erkennen, von welcher grossen praktischen Bedeutung in Bezug auf Geometrie und Mechanik dieses Gesetz der Rechnung in doppeltem Axensysteme sein muss; *denn jede gewonnene Kenntniss von den Coordinaten in einem gewissen Axensysteme kann hiernach ohne Weiteres durch einfache Multiplication auf die Coordinaten in einem beliebigen Axensysteme übertragen werden.* Durch dieses Gesetz kann die Hamilton'sche Methode als *eine Geometrie in doppeltem Axensysteme* charakterisirt werden.

**19.** Wir haben jetzt die Formeln aufzustellen, welche die Winkel zwischen den Axen zweier beliebiger Axensysteme $(ijk)$ und $(i_1 j_1 k_1)$ bestimmen. Es seien

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel der Axe $i$ mit den resp. Axen $i_1$, $j_1$, $k_1$;
$\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$ die Winkel der Axe $j$ mit den resp. Axen $i_1$, $j_1$, $k_1$;
$\lambda''$, $\mu''$, $\nu''$ die Winkel der Axe $k$ mit den resp. Axen $i_1$, $j_1$, $k_1$.

Nach (5) haben wir also die Formeln:

$$(37)\qquad \begin{cases} i = i_1 \cos\lambda + j_1 \cos\mu + k_1 \cos\nu \\ j = i_1 \cos\lambda' + j_1 \cos\mu' + k_1 \cos\nu' \\ k = i_1 \cos\lambda'' + j_1 \cos\mu'' + k_1 \cos\nu''. \end{cases}$$

Wir nennen nun die Coordinaten eines Vectors in den Axensystemen $(ijk)$ und $(i_1 j_1 k_1)$ resp. $x$, $y$, $z$ und $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Wir haben somit

$$(38)\qquad ix + jy + kz = i_1\xi + j_1\eta + k_1\zeta$$

und folglich mit Hülfe von (37):

$$(39)\qquad \begin{cases} \xi = x\cos\lambda + y\cos\lambda' + z\cos\lambda'' \\ \eta = x\cos\mu + y\cos\mu' + z\cos\mu'' \\ \zeta = x\cos\nu + y\cos\nu' + z\cos\nu''. \end{cases}$$

Alle nöthigen Relationen zwischen den betreffenden Winkeln ergeben sich, wenn wir die Gleichungen (37) quadriren, dann die erste mit der anderen multipliciren und das Resultat mit der dritten identificiren, u. s. w. in cyclischer Ordnung.

## Das distributive Gesetz.

**20.** Sind die Vectoren $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3 \cdots$ nach Nr. 5. in dem Axensysteme $(ijk)$ ausgedrückt, so bekommen wir das Product:

$$(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_3 = -[(x_1+x_2)x_3 + (y_1+y_2)y_3 + (z_1+z_2)z_3] + \begin{vmatrix} i\,x_1+x_2 & x_3 \\ j\,y_1+y_2 & y_3 \\ k\,z_1+z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Die Producte $\alpha_1\alpha_3$ und $\alpha_2\alpha_3$ auf dieselbe Weise entwickelt und addirt, geben identisch dasselbe Resultat, so dass wir die Identität haben:

$$(40)\qquad (\alpha_1+\alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3.$$

In ganz ähnlicher Weise bekommen wir die Identität:

$$\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2) = \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2. \tag{41}$$

Nach (40) und (41) ergiebt sich also folgendes distributive Gesetz:

$$(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4) = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4. \tag{42}$$

Wie wir unmitttelbar sehen können, lässt sich dieses Gesetz auf zweigliedrige Producte von Summen aus einer beliebigen Anzahl Vectoren in algebraischer Weise ausdehnen.

Als specielle Fälle von (42) wollen wir mit Hülfe von (17) folgende Formeln hervorheben:

$$(\alpha_1 \pm \alpha_2)^2 = \alpha_1^2 \pm 2S\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2, \tag{43}$$

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2) = \alpha_1^2 + 2V\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2. \tag{44}$$

Um diese Formeln zu beleuchten, wollen wir die folgenden Beispiele behandeln, wobei wir zu bemerken haben, dass die Ausdrücke $\alpha_1+\alpha_2$ und $\alpha_1-\alpha_2$ resp. die zwischenliegende und gegenüberliegende Diagonale eines Parellelogrammes mit den bestimmenden Seiten $\alpha_1$ und $\alpha_2$ bedeuten. Setzen wir $\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$, so sind $\alpha_1$, $\alpha_2$ und $\alpha_3$ die drei Seiten eines Dreiecks, dessen gegenüberliegende Winkel wir mit resp. $A_1$, $A_2$ und $A_3$ bezeichnen.

Beispiel 1. Wir haben $\alpha_3^2=\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2) \therefore V\alpha_3\alpha_1 = V\alpha_3\alpha_2$ oder nach (25) $T\alpha_1 \sin A_2 = T\alpha_2 \sin A_1$.

Beispiel 2. Nach (43) haben wir mit Hülfe von (25): $T^2\alpha_3 = T^2\alpha_1 - 2T\alpha_1 T\alpha_2 \cos A_3 + T^2\alpha_2$.

Beispiel 3. Es sei $\alpha_2$ ein fester und $\alpha_1$ ein beweglicher Radius eines Kreises $\therefore T\alpha_1 = T\alpha_2$ und ferner nach (44) mit Hülfe von (25): $S(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2) = 0$, d. h. der Winkel in einem Halbkreise ist ein Rechter. Die Bedeutung der Identität $V(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2) = 2V\alpha_1\alpha_2$ ist selbstverständlich.

Beispiele von so elementärer Natur können in unbegrenzter Menge nach dem schon oben bewiesenen distributiven Gesetze behandelt werden [vergl. Introduction to Quaternions by Kelland and Tait].

**21.** Wir ersetzen die Producte $\alpha_1\alpha_3$ und $\alpha_2\alpha_3$ in (40) durch die Quaternen $w+ix+jy+kz$ und $w'+ix'+jy'+kz'$, und haben somit, wenn $\alpha_4$ ein Vector ist:

$$(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\alpha_4 = (w+w')\alpha_4 - [(x+x')x_4+(y+y')y_4+(z+z')z_4] + \begin{vmatrix} i\,x+x' & x_4 \\ j\,y+y' & y_4 \\ k\,z+z' & z_4 \end{vmatrix}.$$

Ein hiermit identisches Resultat ergiebt sich, wenn wir die Summe $(w+ix+jy+kz)\alpha_4 + (w'+ix'+jy'+kz')\alpha_4$ entwickeln. Damit ist also bewiesen, dass

$$(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\alpha_4 = \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

Durch Wiederholung desselben Beweises ergiebt sich, wenn $\alpha_5$ ein Vector ist:

$$(45) \qquad (\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\alpha_4\alpha_5 = \alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5,$$

u. s. w. für eine beliebige Anzahl Vector-Factoren.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich beweisen, dass:

$$(46) \qquad \alpha_4\alpha_5(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3) = \alpha_4\alpha_5\alpha_1\alpha_3 + \alpha_4\alpha_5\alpha_2\alpha_3$$

u. s. w. für eine beliebige Anzahl Vector-Factoren.

Führen wir jetzt in (45) und (46) statt der Producte $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_4\alpha_5$ die resp. Quaternen $p$, $q$, $r$ ein, so ergeben sich die Formeln

$$(p+q)r = pr + qr,$$
$$r(p+q) = rp + rq,$$

und folglich, wenn $s$ eine neue Quaterne bezeichnet:

$$(47) \qquad (p+q)(r+s) = pr + ps + qr + qs$$

ein Gesetz, welches auf Producte, deren Factoren Summen einer beliebigen Anzahl von Quaternen sind, in ganz algebraischer Weise sich ausdehnen lässt. Wir können also den folgenden allgemeinen Satz, welcher von fundamentaler Natur ist, aussprechen.

*Mit Ausnahme des commutativen Gesetzes* [von der Gleichgültigkeit der Ordnung der Factoren], *gelten alle Gesetze der algebraischen Polynome, welche auf Multiplication begründet sind, ebenso für Vectoren und Quaternen.*

**22.** Erinnert man sich jetzt, dass nach Nr. 12. die Quotienten unter die Gesetze der Producte zu subsumiren sind, so lässt sich der vorhergehende fundamentale Satz auch auf Quotienten von Polynomen unmittelbar übertragen.

**23.** Bezeichnen $p$ und $q$ Quaternen, so haben wir als selbstverständliche Sätze: 1) $S(p+q) = Sp + Sq$; 2) $V(p+q) = Vp + Vq$; 3) $K(p+q) = Kp + Kq$; und entsprechend für mehrgliedrige Polynome.

## Interpretation der Producte von zwei Vectoren.

**24.** Man erinnere sich, dass nach Nr. 14. das Product $\alpha_1\alpha_2$, entwickelt in den zwei Axensystemen $(ijk)$ und $(i_1j_1k_1)$, identische Resultate liefert, welche nach (23) und (25) die folgenden sind:

$$(48)\ \alpha_1\alpha_2 \quad -T\alpha_1 T\alpha_2\cos\theta + kT\alpha_1 T\alpha_2\sin\theta = -(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2) + \begin{vmatrix} i_1 & x_1 & x_2 \\ j_1 & y_1 & y_2 \\ k_1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix},$$

wo die eingehenden Grössen die in Fig. I. angegebene Bedeutung besitzen. Identificiren wir jetzt nach (30) die Vectortheile dieser Formel, und bezeichnen wir mit $l$, $m$, $n$ die Winkel der Axe $k$ mit den resp. Axen $i_1$, $j_1$, $k_1$, so ergiebt sich nach (39) folgendes System von Gleichungen:

$$(49)\qquad \frac{T\alpha_1 T\alpha_2 \sin\theta}{1} = \frac{y_1z_2 - z_1y_2}{\cos l} = \frac{z_1x_2 - x_1z_2}{\cos m} = \frac{x_1y_2 - y_2x_1}{\cos n}.$$

Die vier Zähler dieser Ausdrücke bedeuten geometrisch resp. den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $\alpha_1 O \alpha_2$ und der Projectionen dieses Dreiecks auf die Ebenen $(j_1 k_1)$, $(i_1 k_1)$, $(i_1 j_1)$, sodass durch die Formel (49) der bekannte Satz von den Projectionen eines Dreiecks auf drei zu einander senkrechten Coordinatenebenen ausgesprochen ist.

In Bezug auf die Mechanik, wenn die Vectoren $\alpha_1$ und $\alpha_2$ resp. einen Hebelarm und eine in dessen Endpunkte wirkende Kraft bezeichnen, bedeutet $T\alpha_1 T\alpha_2 \sin\theta$ das *Drehungsmoment um die Axe* $k$, und der Vector $kT\alpha_1 T\alpha_2 \sin\theta$ *das lineare Moment* nach Grösse und Richtung; in ähnlicher Weise bedeuten $y_1z_2 - z_1y_2$, $z_1x_2 - x_1z_2$, $x_1y_2 - y_1x_2$ resp. *die Drehungsmomente um die Axen* $i_1, j_1, k_1$ und die Vectoren $i_1(y_1z_2 - z_1y_2)$, $j_1(z_1x_2 - x_1z_2)$, $k_1(x_1y_2 - y_1x_2)$ *die linearen Momente* nach ihren Grössen und Richtungen. Die Gleichung zwischen den Vectortheilen der Formel (48) ist also ein Ausdruck des bekannten mechanischen Satzes von den Projectionen eines linearen Momentes auf ein rechtwinkliges Axensystem. Die Scaläre $-T\alpha_1 T\alpha_2 \cos\theta$ repräsentirt mit entgegengesetztem Vorzeichen *das Kraftmoment* oder, wenn der Hebelarm durch den Weg ersetzt wird, *die mechanische Arbeit.*

**25.** In der Formel (22) haben wir die Bedeutung eines Quotienten von Vectoren erhalten, und diese Formel lässt sich mit Hülfe von (12) und (30) so schreiben:

$$(50)\qquad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \alpha_2\,\alpha_1^{-1} = -\frac{\alpha_2\alpha_1}{T^2\alpha_1} = \frac{-S\alpha_1\alpha_2 + V\alpha_1\alpha_2}{T^2\alpha_1} = \frac{T\alpha_2}{T\alpha_1}(\cos\theta + k\sin\theta),$$

wo zu bemerken ist, dass nach Nr. 2. die Axe $k$ den analytischen Ausdruck $\sqrt{-1}$ besitzt. Bilden wir jetzt eine Quaterne $q$, ausgedrückt in dem Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$, $= w + i_1 x + j_1 y + k_1 z$ mit folgender Bedeutung der Coordinaten und des Tensors:

$$(51)\qquad \begin{cases} w = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) : T^2\alpha_1 \\ x = (y_1z_2 - z_1y_2) : T^2\alpha_1 \\ y = (z_1x_2 - x_1z_2) : T^2\alpha_1 \\ z = (x_1y_2 - y_1x_2) : T^2\alpha_2 \\ r = T\alpha_2 : T\alpha_1 = Tq, \end{cases}$$

so lässt sich mit Hülfe von (48) die Formel (50) so schreiben:

$$(52)\qquad \alpha_2\,\alpha_1^{-1} = re^{k\theta} = q = w + i_1x + j_1y + k_1z,$$

und die Conjugirte $Kq$ nach (13) in folgender Weise:

$$(53)\qquad \alpha_1^{-1}\alpha_2 = re^{-k\theta} = Kq = w - (i_1x + j_1y + k_1z).$$

Der *Exponentialausdruck**) $re^{k\theta}$ wird die *reducirte Form der Quaterne q* oder auch *die reducirte Quaterne q* genannt. Der Ausdruck $Uq$, definirt durch die Formel $Uq = q : Tq$ und *Einheitsquaterne* genannt [vergl. (5)], hat also die *reducirte Form* $e^{k\theta}$, welche „*Versor*" genannt worden ist; somit haben wir die folgende Formel:

$$(54) \qquad Uq = \frac{q}{Tq} = \frac{w + i_1 x + j_1 y + k_1 z}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} = e^{k\theta} = \cos\theta + k \sin\theta .$$

Zwischen den vier Coordinaten $w$, $x$, $y$, $z$ und den fünf Grössen $r$, $\theta$, $l$, $m$, $n$, von welchen die drei letzten nach (49) die Winkel der Axe $k$ mit den Axen $i_1$, $j_1$, $k_1$ bezeichnen, ergeben sich die Relationen:

$$(55) \qquad \begin{cases} r = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ r\cos\theta = w \\ \dfrac{r\sin\theta}{1} = \dfrac{x}{\cos l} = \dfrac{y}{\cos m} = \dfrac{z}{\cos n} . \end{cases}$$

Die reducirte Form $re^{k\theta}$ enthält also, wie unmittelbar zu sehen ist, vier von einander *unabhängige* Grössen, welche *reducirte Coordinaten* der Quaterne $q$ genannt werden sollen.

Der Beweis des Moiver'schen Lehrsatzes lässt sich auf den Versor in (54) in bekannter Weise durchführen, *unabhängig davon, ob k eine der Richtung nach constante oder veränderliche Grösse repräsentirt.*

**26.** Ausser der Bezeichnung $r = Tq$ werden wir folgende Bezeichnungen benutzen:

$$\theta = \measuredangle q, \quad k = \text{Ax. } q, \quad \text{Dreieck } \alpha_1 0 \alpha_2 = \Delta q$$

und nennen $\theta$ *den Winkel* oder *die „Amplitude"*, $k$ *die „Axe"* und $\Delta q$ *das Dreieck***) der Quaterne $q$.

**27.** Ein Vector $\varrho$, betrachtet als specieller Fall einer Quaterne, deren Scaläre Null ist, erhält nach (54) folgendermassen seine Bedeutung:

$$(56) \qquad U\varrho = \frac{\varrho}{T\varrho} = \frac{i_1 x + j_1 y + k_1 z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = e^{k(\pm\frac{1}{2}\pi)} = \pm k,$$

und aus diesem Gesichtspunkte wird der *reducirte* Einheitsvector *ein quadrantischer Versor****) genannt.

**28.** Folgende Sätze, begründet darauf, dass ein Dreieck $\Delta q$ in seiner Grösse und Lage verschiedene Aenderungen erleiden kann, ohne

*) Statt des Exponentialausdruckes $e^{k\theta}$ braucht Hamilton den Ausdruck $k^{\frac{2\theta}{\pi}}$. Dass diese beiden Ausdrücke gleich sind, ergiebt sich, wenn man ihre Logarithmen nimmt; also

$$k\theta = \frac{2\theta}{\pi} \log k = \frac{2\theta}{\pi} \cdot k\frac{1}{2}\pi .$$

**) Dieses Dreieck, als bestimmt durch die zwei Vectoren $\alpha_1$ und $\alpha_2$ mit demselben Nullpunkte $O$, wird von Hamilton „*Biradial*" genannt.

***) Von Hamilton „Quadrantal Versor" genannt.

dass die Coordinaten der Quaterne $q$ sich ändern, können als selbstverständlich ausgesprochen werden.

1) *Das Dreieck $\Delta q$, als nur der Form nach (durch den Winkel $\theta$ und das Verhältniss der denselben einschliessenden Seiten $T\alpha_2 : T\alpha_1$) bestimmt, kann durch ein ähnliches Dreieck von beliebiger Grösse ersetzt werden.*

2) *Das Dreieck $\Delta q$ kann in seiner Ebene um die Axe $k = \text{Ax. } q$, um einen beliebigen Winkel gedreht werden.*

3) *Das Dreieck $\Delta q$ kann in eine parallele Ebene transportirt werden, wobei die Axe $k = \text{Ax. } q$ ihre Richtung behält* [vergl. Nr. 4.].

Die Gleichung zwischen zwei Quaternen

$$q = q'$$

enthält also die Bestimmungen:

$$\Delta q \simeq \Delta q' \text{ und } \text{Ax. } q \parallel \text{Ax. } q' \text{ *)}.$$

**29.** Um in (52) aus den als gegeben betrachteten vier Coordinaten einer Quaterne $q = w + i_1 x + j_1 y + k_1 z$ die reducirte Form $re^{k\theta}$ zu construiren, hat man zuerst aus der Gleichung $kr \sin\theta = i_1 x + j_1 y + k_1 z$ die Richtung der Axe $k$ zu bestimmen; dann werden in einer gegen diese Axe senkrechten und durch den Nullpunkt der Coordinaten gelegten Ebene die Axen $i$ und $j$ gezogen, von denen die erste $i$ ganz willkürlich gerichtet sein kann; dann wird der Winkel $\theta$ nach (55) bestimmt, in dieser Ebene von $i$ aus abgetragen, wobei der positive Sinn des Winkels von $i$ nach $j$ gerechnet ist; zuletzt werden die Schenkel $T\alpha_1$ und $T\alpha_2$ dieses Winkels, von denen der erste in der Richtung $i$ liegt, in dem Verhältnisse $T\alpha_2 : T\alpha_1 = r = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$ bestimmt. In ganz ähnlicher Weise wird der quadrantische Versor in (56) und somit ein Vector, betrachtet als specieller Fall einer Quaterne, construirt.

**30.** Als einen analytischen Ausdruck des in Nr. 17. gegebenen Fundamentalgesetzes, betreffend die Rechnung im doppelten Axensysteme haben wir die in (52) gegebene Identität zwischen einer Quaterne $q = w + i_1 x + j_1 y + k_1 z$ ausgedrückt in einem beliebigen Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$ und einer ebenen Complexen $re^{k\theta}$ zu betrachten; durch diese wichtige Identität wird die Theorie der ebenen Complexe, so weit sie sich auf die hier entwickelten Gesetze begründen lässt, für die Quaternen unmittelbar gültig; und umgekehrt werden die Gesetze der Quaternen für die ebenen Complexe in verschiedenen Ebenen gelten, und somit das wichtige Problem, die Gesetze der Complexen in verschiedenen Ebenen zu finden, als vollständig gelöst zu betrachten sein.

Haben wir also die Function $f(re^{\sqrt{-1}\theta}) = f(w + \sqrt{-1}\, v)$ einer ebenen Complexe, welche als Summe eines reellen und eines imaginären

*) Das Zeichen $\parallel$ bedeutet hier parallel und gleichgerichtet.

Theiles $\varphi(w,v)+\sqrt{-1}\,\psi(w,v)$ darstellbar ist, so ergiebt sich, wenn man $\sqrt{-1}=k=i_1\cos l+j_1\cos m+k_1\cos n$ und $kv=i_1x+j_1y+k_1z$ setzt, die folgende Identität:

$$(57)\quad f(re^{k\theta})=f(w+kv)=f(w+i_1x+j_1y+k_1z)$$
$$=\varphi(w,v)+\psi(w,v)\{i_1\cos l+j_1\cos m+k_1\cos n\},$$

und folglich, wenn $f(w+i_1x+j_1y+k_1z)=W+i_1X+j_1Y+k_1Z$ gesetzt wird:

$$(58)\quad\begin{cases}W=\varphi(w,v)\\ X=\psi(w,v)\cos l\\ Y=\psi(w,v)\cos m\\ Z=\psi(w,v)\cos n,\end{cases}$$

wo $v=\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *) und $\frac{v}{1}=\frac{x}{\cos l}=\frac{y}{\cos m}=\frac{z}{\cos n}$ [vergl. (55)].

Auf diese Weise haben wir, wenn $q=w+i_1x+j_1y+k_1z$, $\mu=$ einer reellen Zahl und $\varkappa=$ einer ganzen reellen Zahl ist:

$$(59)\quad f(q)=q^\mu=r^\mu e^{k\mu(\theta+2\varkappa\pi)}=r^\mu[\cos\mu(\theta+2\varkappa\pi)+k\sin\mu(\theta+2\varkappa\pi)],$$

und somit, wenn nach dem Obigen $q^\mu=W+i_1X+j_1Y+k_1Z$ gesetzt wird:

$$(60)\quad\begin{cases}W=r^\mu\cos\mu(\theta+2\varkappa\pi)\\ X=r^\mu\sin\mu(\theta+2\varkappa\pi)\cos l\\ Y=r^\mu\sin\mu(\theta+2\varkappa\pi)\cos m\\ Z=r^\mu\sin\mu(\theta+2\varkappa\pi)\cos n,\end{cases}$$

wo $r$, $\theta$, $l$, $m$ und $n$ nach (55) in den vier Coordinaten $w$, $x$, $y$, $z$ auszudrücken sind; damit ist die Potenzfunction einer Quaterne völlig bestimmt. In ganz derselben Weise lässt sich die Exponentialfunction $f(q)=e^q=e^{r(\cos\theta+k\sin\theta)}$, bestimmen und zerlegen

**31.** Eine Summe von Quaternen gleich Null gesezt oder

$$\Sigma q=0$$

giebt nach Nr. 13.

$$\Sigma Sq=0\text{ und }\Sigma Vq=0.$$

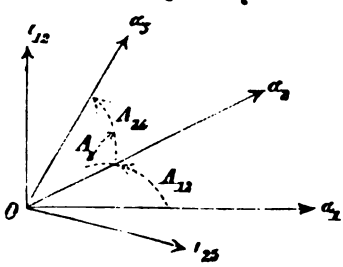
Setzen wir die Glieder der Summe $\Sigma q$ in die reducirte Form $re^{k\theta}$, so repräsentirt die Vectorsumme $\Sigma Vq=0$ ein geschlossenes Polygon, dessen Seiten die Summanden sind [vergl. Nr. 4.]. Aus mechanischem Gesichtspunkte bedeutet die Summe $\Sigma Sq=0$, dass die Summe der von den Scalären $Sq$ repräsentirten mechanischen Arbeiten Null ist, und die Summe $\Sigma Vq=0$, dass die von den Vectoren $Vq$ repräsentirten Drehungsmomente im Gleichgewicht sind, sobald sie als lineare Momente ein geschlossenes Polygon bilden [vergl. Nr. 24.].

*) Diese Wurzel und $\sin\theta$ sind gleichzeitig positive oder negative Grössen [vergl. (55)].

## Interpretation der Producte von drei und mehreren Vectoren.

**32.** Es seien $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ Vectoren mit gemeinschaftlichem Nullpunkte $O$ [Fig. 2], und $A_{12}$, $A_{23}$ die Winkel $\alpha_1 O \alpha_2$, $\alpha_2 O \alpha_3$, nach der Ordnung der Indices gerechnet; es seien ferner $\iota_{12}$, $\iota_{23}$ Einheitsaxen, senkrecht gegen die Ebenen der resp. Winkel $A_{12}$, $A_{23}$, und $A_2$ der Winkel $\iota_{12} O \iota_{23}$, welcher, da er in einer auf $\alpha_2$ senkrechten Ebene liegt, gleich ist dem Winkel zwischen den Ebenen der Winkel $A_{12}$ und $A_{23}$. Dieser Winkel soll positiv gerechnet werden im Sinne einer positiven Drehung um den Vector $\alpha_2$ als Axe. Eine analoge Bezeichnung soll gelten für eine beliebige Anzahl von Vectoren. Dann bekommen wir nach (48), wenn $\alpha_3 = i\xi + j\eta + k\zeta$ und das Axensystem $(ijk)$ so gewählt worden ist, dass $i$ längs $\alpha_1$ und $A_{12}$ in der Ebene $(ij)$ liegt und folglich $\iota_{12} \parallel k$:

Fig. 2.




$$(61)\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \{-T\alpha_1 T\alpha_2 \cos A_{12} + kT\alpha_1 T\alpha_2 \sin A_{12}\}(i\xi + j\eta + k\zeta).$$

Sind dieselben Vectoren in einem beliebigen Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$ ausgedrückt worden, also nach (48):

$$(62)\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \left\{-(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + \begin{vmatrix} i_1 & x_1 & x_2 \\ j_1 & y_1 & y_2 \\ k_1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}\right\}(i_1x_3 + j_1y_3 + k_1z_3),$$

so müssen nach dem Fundamentalsatze (36) die in (61) und (62) erhaltenen Multiplicationsresultate identisch sein und folglich:

$$(63)\quad S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -T\alpha_1 T\alpha_2 \sin A_{12}\zeta = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Aber $T\alpha_1 T\alpha_2 \sin A_{12}\zeta$ repräsentirt, von dem Vorzeichen abgesehen, das Volumen des Parallelepipeds, welches aus den Vectoren $\alpha_1$, $\alpha_2$ und $\alpha_3$ als Kanten constuirt wird; also muss auch die Determinante in (63) numerisch dasselbe Volumen repräsentiren.

**33.** Nach dem in Nr. 21. entwickelten distributiven Gesetze haben wir die Identität $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2) - (\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3)\alpha_2 + \alpha_3(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1)$, welche nach (17) so geschrieben werden kann:

$$(64)\quad V\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1 S\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2 S\alpha_3\alpha_1 + \alpha_3 S\alpha_1\alpha_2.$$

Drücken wir in (64) die Vectoren $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ in den Axensystemen $(ijk)$ und $(i_1 j_1 k_1)$ aus mit den in (61) und (62) gebrauchten Coordinaten,

so ist leicht zu sehen, dass die Vectortheile dieser Formeln mit dem Vectorausdrucke in (64) identisch werden.

Zu bemerken ist nach (64), weil $V\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = V\alpha_1(S\alpha_2\alpha_3 + V\alpha_2\alpha_3)$ $= \alpha_1 S\alpha_2\alpha_3 + V(\alpha_1 V\alpha_2\alpha_3)$, dass

$$V(\alpha_1 V\alpha_2\alpha_3) = \alpha_3 S\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2 S\alpha_3\alpha_1, \tag{65}$$

eine Formel, welche sehr oft gebraucht wird.

**34.** Setzen wir in (64) $T\alpha_1 = T\alpha_2 = T\alpha_3 = 1$, und quadriren diese Gleichung, so ergiebt sich nach den in Nr. 32. gegebenen Bezeichnungen, wenn wir beachten, dass nach (11) $T^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = S^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ $- V^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, folgende wohlbekannte Formel:

$$1 - \cos^2 A_{12} - \cos^2 A_{23} - \cos^2 A_{31} + 2\cos A_{12}\cos A_{23}\cos A_{31}$$
$$- \sin^2 A_{12}\sin^2 A_{23}\sin^2 A_2 - \text{etc.}$$

Andere sphärische Formeln können in analoger Weise in unbegrenzter Menge hergeleitet werden [vgl. An elem. Treat. on Quatern. by Tait, p. 56].

**35.** Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$ Einheitsvectoren mit einem gemeinschaftlichen Nullpunkte $O$ [Fig. 3]; dann bekommen wir nach dem associativen Gesetze und mit Hülfe von (22) die folgende Identität:

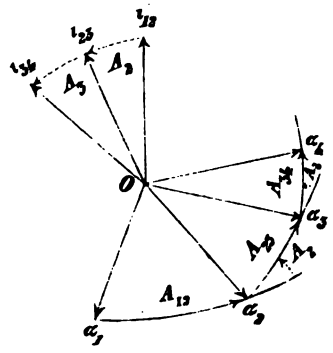
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_r}\,\frac{\alpha_r}{\alpha_{r-1}} \cdots \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\,\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1, \tag{66}$$

Diese Formel können wir auch nach (52) so schreiben, wenn wir die Bezeichnung $(\iota A)_{12}$ etc. als identisch mit $\iota_{12}A_{12}$ benutzen etc.

$$e^{(\iota A)_{r1}} \cdot e^{(\iota A)_{(r-1)r}} \cdots e^{(\iota A)_{23}} \cdot e^{(\iota A)_{12}} = 1, \tag{67}$$

wo also die Winkel $A_{12}, A_{23}, \cdots A_{(r-1)r}, A_{r1}$ der Reihe nach die Seiten eines geschlossenen sphärischen Polygons sind. Zerlegen wir die Factoren [oder Versoren] dieser Formel nach (54), so dass $e^{(\iota A)_{12}} = \cos A_{12} + \iota_{12}\sin A_{12}$ etc. gesetzt wird, und führen dann die Multiplication aus, so ergeben sich nach Nr. 13. zwei Gleichungen, die erste zwischen den Scalärtheilen, die zweite zwischen den Vectortheilen, welche letztere, wenn wir z. B. nach (5) $\iota_{12} = i\cos l_{12} + j\cos m_{12} + k\cos n_{12}$ etc. setzen, in drei verschiedene Gleichungen zerfällt. Die Formel (67) mit ihren möglichen Entwicklungen enthält, wie leicht zu erkennen ist, *die ganze Theorie der sphärischen Polygone.*

Fig. 3.




Zu bemerken ist ferner, dass die Formel (67) *die vollständige Lösung der Aufgabe, die Multiplicationsgesetze der Complexen in verschiedenen Ebenen zu finden, enthält* [vergl. Nr. 30.].

**36.** Als ein specieller Fall der Formel (67) ergiebt sich die Formel für das sphärische Dreieck

(68) $$e^{(\iota A)_{31}} \cdot e^{(\iota A)_{23}} \cdot e^{(\iota A)_{12}} = 1$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit $e^{(\iota A)_{13}}$ *) multiplicirt:

(69) $$e^{(\iota A)_{23}} \cdot e^{(\iota A)_{12}} = e^{(\iota A)_{13}}.$$

Diese Gleichung zerfällt in die folgenden, wenn wir beachten, dass $\iota_{12} \cdot \iota_{23} = -\cos A_2 + \alpha_2 \sin A_2$ und folglich $\iota_{23} \cdot \iota_{12} = -\cos A_2 - \alpha_2 \sin A_2$ [vergl. (48)]:

(70) $$\cos A_{12} \cos A_{23} - \sin A_{12} \sin A_{23} \cos A_2 = \cos A_{13},$$

(71) $$\iota_{12} \sin A_{12} \cos A_{23} + \iota_{23} \sin A_{23} \cos A_{12} - \alpha_2 \sin A_{12} \sin A_{23} \sin A_2 = \iota_{13} \sin A_{13}.$$

Setzen wir wie oben $\iota_{12} = i \cos l_{12} + j \cos m_{12} + k \cos n_{12}$ und für die Einheitsvectoren $\iota_{23}$, $\alpha_2$, $\iota_{13}$ analoge Ausdrücke, so bekommen wir aus der Gleichung (71) drei verschiedene Gleichungen für die Projectionen in dem Axensysteme $(ijk)$. Weil die Gleichung (69) weiter in die Gleichungen $e^{(\iota A)_{23}} = e^{(\iota A)_{21}} \cdot e^{(\iota A)_{13}}$ und $e^{(\iota A)_{12}} = e^{(\iota A)_{32}} \cdot e^{(\iota A)_{13}}$ transformirt werden kann, so ergeben sich zwei neue mit (70) und (71) analoge Formelgruppen, so dass wir zusammen zwölf Formeln für das betreffende sphärische Dreieck erhalten.

Als Ausdruck für das Polar-Dreieck des Dreieckes (68) haben wir die Formel

(72) $$e^{(\alpha A)_1} \cdot e^{(\alpha A)_3} \cdot e^{(\alpha A)_2} = 1.$$

Daraus lassen sich für dieses Dreieck in analoger Weise die Formeln deduciren.

Man ersieht hieraus, welcher Reichthum von Entwicklungen für die Sphärik in dieser Methode enthalten ist.

**37.** Wir wollen jetzt das in Nr. 6. gegebene associative Gesetz durch eine geometrische Deutung beleuchten.

Bezeichnen wir zu diesem Zwecke nach Nr. 35. mit $e^{(\iota A)_{12}}$, $e^{(\iota A)_{23}}$, $e^{(\iota A)_{34}}$ drei Versoren, so ist die Identität

(73) $$e^{(\iota A)_{34}} \left[ e^{(\iota A)_{23}} e^{(\iota A)_{12}} \right] = \left[ e^{(\iota A)_{34}} e^{(\iota A)_{23}} \right] e^{(\iota A)_{12}}$$

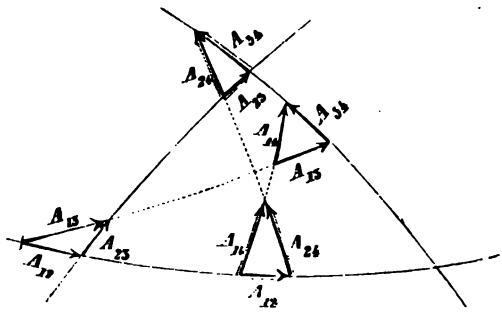
geometrisch zu deuten.

Haben wir also drei Gross-Kreise einer Kugel mit dem Radius eins, auf welchem drei Bogen $A_{12}$, $A_{23}$, $A_{34}$ nach der Zeichnung in Fig. 4 liegen, so kann man nach Nr. 28. diese Bogen längs ihren Kreisen so verschieben, dass je zwei die Seiten eines sphärischen Dreiecks bilden; alsdann haben wir die dritte Seite dieses Dreiecks mit dem übrigen Bogen zu combiniren. Die erste Combination der Versoren sei $e^{(\iota A)_{23}} e^{(\iota A)_{12}}$, welche $e^{(\iota A)_{13}}$ giebt und somit den Bogen $A_{13}$ als die dritte Seite des sphärischen Dreiecks, von dem zwei Seiten $A_{12}$

*) Man bemerke, dass $A_{31} = -A_{13}$ [vergl. Nr. 32.], indem $\iota_{31}$ als identisch mit $\iota_{13}$ anzusehen ist.

und $A_{23}$ sind. Diese dritte Seite wird durch Verschiebung in ihrem Gross-Kreise mit dem übrigen Bogen $A_{31}$ combinirt, und somit haben wir $A_{14}$ als die dritte Seite eines neuen sphärischen Dreiecks, von dem zwei Seiten $A_{13}$ und $A_{34}$ sind; dieses sphärische Dreieck entspricht also dem analytischen Ausdrncke $e^{(i\,A)_{34}} e^{(i\,A)_{13}} = e^{(i\,A)_{14}}$, welcher mit der linken Seite der Formel (73) identisch ist. Ein analoges Verfahren *) giebt zuerst die Construction des Ausdruckes $e^{(i\,A)_{34}} e^{(i\,A)_{23}} = e^{(i\,A)_{24}}$ und ferner des Ausdruckes $e^{(i\,A)_{21}} e^{(i\,A)_{12}} = e^{(i\,A)_{11}}$, der also mit der rechten Seite der Formel (73) identisch ist. Die nach diesen zwei Verfahrungsweisen erhaltenen zwei Bogen, die mit $A_{14}$ bezeichnet sind, müssen also nach dem in (73) benutzten associativen Gesetze identisch sein**), d. h. sie müssen auf demselben Gross-Kreise liegen, gleich gross und in denselben Sinn gerichtet sein. Dieselbe Construction kann auf ein Product von einer beliebigen Anzahl Vectoren ausgedehnt werden.

Fig. 4.



**38.** Um die geometrische Bedeutung des in Nr. 6. gegebenen Gesetzes der Conjugirten eines Productes von Quaternen darzulegen, hat man nur die Gleichung (69) in folgende Form zu bringen:

$$e^{(i\,A)_{21}} e^{(i\,A)_{32}} = e^{(i\,A)_{31}}.$$

Diese Gleichung, deren geometrische Bedeutung nach der Fig. 3 unmittelbar einleuchtet, kann nach (53) so geschrieben werden:

$$K e^{(i\,A)_{12}}\, K e^{(i\,A)_{32}} = K\left\{e^{(i\,A)_{32}} e^{(i\,A)_{12}}\right\};$$

und entsprechend für eine beliebige Anzahl Versoren. Die Werthe der Tensoren sind für dieses Gesetz natürlich ganz gleichgültig.

**39.** Ein Ausdruck von besonderem Intresse soll jetzt untersucht werden. Es sei in der Ebene $(ij)$ eines Axensystemes $(ijk)$ ein Vector $\alpha = T\alpha\,(i\cos A + j\sin A) = T\alpha\,(\cos A + k\sin A)\,i = T\alpha e^{k\,A}\cdot i$; der zu untersuchende Ausdruck ist alsdann $e^{k\,\Theta}\alpha$. Wir bekommen unmittelbar die folgende Gleichung:

---

*) Die nach diesem Verfahren angewandten Bogen sind in der Figur mit doppelten Strichen gezeichnet worden.

**) Der geometrische Beweis dieser Identität dient bei Hamilton und Tait als Beweis des associativen Gesetzes der Quaternen.

(74) $e^{k\theta}\alpha = T\alpha e^{k(\theta+A)} \cdot i = T\alpha[i\cos(\theta+A)+j\sin(\theta+A)]$,

d. h. *ein Vector $\alpha$ wird in seiner Ebene um einen Winkel $\theta$ gedreht, wenn ein Versor als Factor vor ihm tritt, dessen Winkel $\theta$ ist und dessen Axe senkrecht gegen die betreffende Ebene steht.*

In derselben Weise können wir den Ausdruck $\alpha e^{-k\theta}$ untersuchen. Wir setzen nämlich $\alpha = iT\alpha(\cos A - k\sin A)$, und bekommen somit

(75) $\alpha e^{-k\theta} = iT\alpha e^{-k(\theta+A)} = T\alpha[i\cos(A+\theta)+j\sin(A+\theta)]$;

also werden die zwei Ausdrücke in (74) und (75) *identisch*, oder

(76) $e^{k\theta}\alpha = \alpha e^{-k\theta}$.

Setzen wir vor jede Seite dieser Gleichung den Factor $e^{k\theta}$, so ergiebt sich

(77) $e^{k(2\theta)}\alpha = e^{k\theta}\alpha e^{-k\theta}$,

d. h. *der Ausdruck $e^{k\theta}\alpha e^{-k\theta}$ bedeutet einen Vector, mit dem der Vector $\alpha$ identisch sein wird, wenn er um einen Winkel $2\theta$ in seiner Ebene um die Axe $k$ gedreht wird.*

**40.** Es sei ferner in dem Axensysteme $(ijk)$ eine Quaterne $q = w+ix+jy+kz$; das Product $e^{k\theta}qe^{-k\theta}$ wird alsdann $w+e^{k\theta}(ix+jy)e^{-k\theta}+kz$ oder nach (77) $w+e^{k(2\theta)}\{ix+jy\}+kz$, und somit haben wir die Identität:

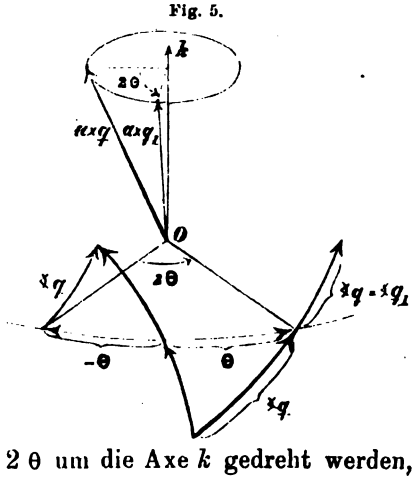
(78) $e^{k\theta}qe^{-k\theta} = w+e^{k(2\theta)}\{ix+jy\}+kz = q_1$,

d. h., *der Ausdruck $e^{k\theta}qe^{-k\theta}$ bedeutet eine Quaterne $q_1$, mit der die Quaterne $q$ identisch sein wird, wenn ihre Axe* Ax. $q$ *um einen Winkel $2\theta$ um die Axe $k$ gedreht wird.*

Die geometrische Deutung dieser Formel ergiebt sich folgendermassen:

Auf einer Kugel mit dem Radius 1 und der Polaraxe $k$ [Fig. 5] zeichne man im Aequator von dem Durchschnitte mit dem Bogen $\measuredangle q$ den Winkel $2\theta$; der Bogen des Ausdruckes $qe^{-k\theta}$ wird dann die dritte Seite eines sphärischen Dreiecks, von dem zwei Seiten $-\theta$ und $\measuredangle q$ sind; diese dritte Seite, in ihrem Gross-Kreise verschoben [Nr. 28.] und mit $\theta$ combinirt, giebt den Bogen des Ausdruckes $q_1 = e^{k\theta}qe^{-k\theta}$ als dritte Seite eines neuen sphärischen Dreiecks, das jenem gleich ist; die Bogen $\measuredangle q$ und $\measuredangle q_1$ sind also gleich, aber die Axe Ax. $q$ muss um den Winkel $2\theta$ um die Axe $k$ gedreht werden, um mit der Axe Ax. $q_1$ identisch zu werden.

Fig. 5.



**41.** Setzen wir $p = re^{k\theta}$, wo also $Tp = r$, $\sphericalangle p = \theta$ und Ax. $p = k$ ist, so können wir, weil nach (59) $p^{-1} = r^{-1}e^{-k\theta}$, den Ausdruck (78) so schreiben:

$$pqp^{-1} = q_1 ; \tag{79}$$

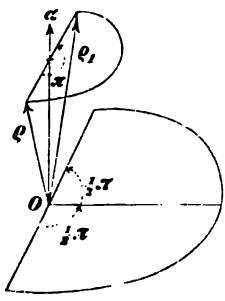
*es bedeutet also in dieser Formel $q_1$ eine Quaterne, mit der die Quaterne $q$ identisch sein wird, wenn ihre Axe* Ax. $q$ *um einen Winkel* $2 \sphericalangle p$ *um die Axe* Ax. $p$ *gedreht wird.*

Als ein specieller Fall von (79) ergiebt sich die Formel

$$\alpha\varrho\alpha^{-1} = \varrho_1 , \tag{80}$$

wo $\alpha$ und $\varrho$ und folglich auch $\varrho_1$ Vectoren sind. Betrachten wir diese Vectoren nach (56) als quadrantische Versoren, *so bedeutet also $\varrho_1$ einen Vector* [Fig. 6], *mit dem der Vector $\varrho$ identisch sein wird, wenn er um den Winkel $\pi$ um den Vector $\alpha$ als Axe gedreht wird.*

Fig. 6.




Wird in der Formel (80) $\sigma = -\varrho$ gesetzt, so können $\sigma$ und $\varrho_1$ als der einfallende und reflectirte Strahl gegen eine Fläche, deren Normale $\alpha$ ist, betrachtet werden. Beachten wir, dass $\alpha$, $\sigma$ und $\varrho_1$ in einem beliebigen Axensysteme ausgedrückt werden können, so ist die Bedeutung der Formel (80) für die Theorie des reflectirten Lichtes augenfällig.

**42.** Mit Benutzung der in (69) gegebenen Bezeichnung der Winkel, ergiebt sich nach (78) die geometricshe Bedeutung der Identität

$$e^{(\iota A)_{23}} e^{(\iota A)_{12}} q e^{-(\iota A)_{12}} e^{-(\iota A)_{23}} = e^{(\iota A)_{12}} q e^{-(\iota A)_{12}} = q_2 \tag{81}$$

in folgender Weise:

*Drehen wir die Axe einer Quaterne* Ax. $q$ *zuerst um einen Winkel* $2A_{12}$ *um die Axe* $\iota_{12}$ *und dann um einen Winkel* $2A_{23}$ *um die Axe* $\iota_{23}$, *so ist die Lage der Axe* Ax. $q$ *nach diesen zwei Drehungen identisch dieselbe, als wenn sie um einen Winkel* $2A_{13}$ *um die Axe* $\iota_{13}$ *gedreht worden wäre, wenn nämlich* $A_{13}$ *die dritte Seite eines sphärischen Dreiecks ist, von dem zwei Seiten* $A_{12}$ *und* $A_{23}$ *sind**).

---

*) Ein Ausdruck von der Form

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

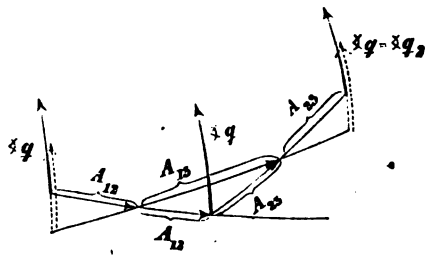
wo $\alpha_1$, $\alpha_2$ und $\alpha_3$ Einheitsvectoren sind, der sich auch schreiben lässt:

$$e^{\frac{1}{2}(\iota A)_{31}} \cdot e^{\frac{1}{2}(\iota A)_{23}} \cdot e^{\frac{1}{2}(\iota A)_{12}},$$

hat eine für die Sphärik merkwürdige Bedeutung [vergl. Tait, An elem. Treat. on Quat. pag. 58].

Die Formel (81) erhält unmittelbar ihre geometrische Erläuterung aus der Fig. 7, wo vor und nach den zwei ersten Drehungen [$2A_{12}$, $2A_{23}$] der Winkel $\measuredangle q$ durch vollgezogene Striche, vor und nach der dritten Drehung [$2A_{13}$] derselbe Winkel durch punktirte Striche bezeichnet ist, entsprechend für mehrere Drehungen.

Fig. 7.



In Analogie mit (79) kann die Formel (81) so geschrieben werden, wenn $p_1$ und $p$ Quaternen bedeuten, deren Versoren resp. $e^{(\iota A)_{12}}$ und $e^{(\iota A)_{13}}$ sind:

(82) $$p_1 p q p^{-1} p_1^{-1} = q_2$$

und entsprechend für eine beliebige Anzahl Factoren.

**43.** Wollen wir einen Vector $\alpha_4$ nach den Richtungen der gegebenen Vectoren $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ zerlegen, so ergiebt sich unmittelbar nach (17) und Nr. 21. die Identität:

(83) $$\alpha_4 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1 S\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \alpha_2 S\alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_3 S\alpha_4\alpha_1\alpha_2,$$

wenn wir beachten, dass die Stellung der Scaläre als Factor in einem Producte gleichgültig ist.

Wollen wir aber einen Vector $\alpha_4$ nach den durch die drei Vectoren $V\alpha_1\alpha_2$, $V\alpha_2\alpha_3$, $V\alpha_3\alpha_1$ angegebenen Richtungen [vergl. (25)] zerlegen, so ergiebt sich in derselben Weise oder nach einer von Tait*) angewandten Herleitung die folgende Identität:

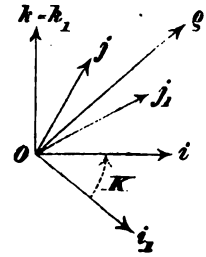
(84) $$\alpha_4 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = V\alpha_1\alpha_2 S\alpha_3\alpha_4 + V\alpha_2\alpha_3 S\alpha_4\alpha_1 + V\alpha_3\alpha_1 S\alpha_2\alpha_4.$$

Analoge Identitäten von vier und mehreren Vectoren lassen sich nach den in (17) und Nr. 21. gegebenen Gesetzen in unbegrenzter Menge entwickeln

## Transformation zu neuen Axensystemen und zu neuen Nullpunkten.

**44.** Wir wollen jetzt einen in dem Axensysteme $(ijk)$ ausgedrückten Vector $\varrho = ix + jy + kz$ zu einem neuen Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$ mit demselben Nullpunkte $O$ und mit der Axe $k = k_1$ transformiren [Fig. 8]. Setzen wir zu diesem Zwecke den Winkel $i_1 Oi = K$, von der neuen Axe $i_1$ nach der alten Axe $i$ gerechnet, so ergiebt sich unmittelbar nach (78), wenn $\varrho_1 = i_1 x_1 + j_1 y_1 + k_1 z_1$ der Werth von $\varrho$ in dem neuen Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$ ist:

Fig. 8.



*) An elem. Treat. on Quat. pag. 45.

(85) $$\varrho_1 = e^{\frac{1}{2}kK}\,\varrho\, e^{-\frac{1}{2}kK},$$

*wo, statt der Drehung* $[= K]$ *des Vectors* $\varrho$ *um die Axe* $k$, *das Axensystem* $(ijk)$ *selbst in die neue Lage* $(i_1 j_1 k_1)$ *um die Axe* $k = k_1$ *um den Winkel* $= K$ *gedreht wird, wenn* $K = \sphericalangle i_1 O i$ *von der neuen Axe* $i_1$ *nach der alten Axe* $i$ *gerechnet wird.*

Weil nach (78)

$$e^{\frac{1}{2}kK}\varrho e^{-\frac{1}{2}kK} = e^{kK}(ix+jy) + kz = (\cos K + k\sin K)(ix+jy)+kz,$$

so bekommen wir, nach Ausführung der Multiplication und Ersetzung der Axen $i, j, k$ in dem Resultate durch $i_1, j_1, k_1$, folgende wohlbekannte Formeln:

(86) $$\begin{cases} x_1 = x\cos K - y\sin K, \\ y_1 = x\sin K + y\cos K, \\ z_1 = z. \end{cases}$$

**45.** Setzen wir beiden Seiten der Gleichung (85) die Versoren $e^{-\frac{1}{2}kK}$ und $e^{\frac{1}{2}kK}$ resp. vor und nach, so ergiebt sich die Gleichung:

(87) $$\varrho = e^{-\frac{1}{2}kK}\varrho_1 e^{\frac{1}{2}kK},$$

wodurch also $\varrho_1$, in dem Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$ ausgedrückt, zu dem neuen Axensysteme $(ijk)$ transformirt worden ist.

**46.** Haben wir in (85) den Vector $\varrho_1$ zu einem neuen Axensysteme $(i_2 j_2 k_2)$ zu transformiren, und setzen wir die Axe $i_2 = i_1$ und $\sphericalangle j_2 O j_1 = I_1$, so ergiebt sich, wenn $\varrho_2 = i_2 x_2 + j_2 y_2 + k_2 z_2$ den Werth von $\varrho_1$ nach dieser Transformation bezeichnet, die folgende Formel:

(88) $$\varrho_2 = e^{\frac{1}{2}(iI)_1}\, e^{\frac{1}{2}kK}\,\varrho\, e^{-\frac{1}{2}kK}\, e^{-\frac{1}{2}(iI)_1},$$

wo $(iI)_1$ statt $i_1 I_1$ geschrieben worden ist [vergl. Nr. 35.].

In derselben Weise lassen sich Transformationen zu neuen Axensystemen in einer beliebigen Anzahl ausführen, wobei immer zu bemerken ist, dass, wenn um eine der Axen $i_s, j_s, k_s$ z. B. $i_s$ gedreht wird, der Drehungswinkel von $j_{s+1}$ zu $j_s$ u. s. w. in cyclischer Folge gerechnet wird. Eine Transformation von besonderem Interesse ist die folgende, wenn $\varrho_3 = i_3 x_3 + j_3 y_3 + k_3 z_3$ gesetzt wird:

(89) $$\varrho_3 = e^{\frac{1}{2}(kK)_2}\, e^{\frac{1}{2}(iI)_1}\, e^{\frac{1}{2}kK}\,\varrho\, e^{-\frac{1}{2}kK}\, e^{-\frac{1}{2}(iI)_1}\, e^{-\frac{1}{2}(kK)_2},$$

welche, ausgeführt, die wohlbekannten Euler'schen Coordinaten-Transformationsformeln ergiebt.

Zu den Formeln (88) und (89) haben wir zu bemerken, dass die in Nr. 42. behandelte Reduction der Versoren auch in ihnen angewandt werden kann.

47. Ein Vector $\varrho$ wird zu einem neuen Nullpunkte transformirt durch die Gleichung:

$$P = \alpha + \varrho, \tag{90}$$

wo die Vectoren $P$ und $\alpha$ von dem neuen Nullpunkte und $\varrho$ von dem Punkte $\alpha$ als Nullpunkt zu rechnen sind. Sind die drei Vectoren $P$, $\alpha$ und $\varrho$ in demselben*) Axensysteme $(i\,j\,k)$ durch die resp. Coordinaten $X\,Y\,Z$, $a\,b\,c$ und $x\,y\,z$ ausgedrückt, so ergiebt sich das Formelsystem:

$$\left\{\begin{array}{l} X = a + x, \\ Y = b + y, \\ Z = c + z. \end{array}\right. \tag{91}$$

Diese zwei Transformationen: 1) zu neuen Axensystemen und 2) zu neuen Nullpunkten, können in verschiedener Weise combinirt und durch die Anwendung des distributiven Gesetzes vollständig ausgeführt werden; hiermit ist die allgemeine Lösung des Problems der Coordinatentransformationen in der Cartesianischen Geometrie erledigt.

48. Als eine bemerkenswerthe Anwendung der hier entwickelten Formeln ergeben sich die astronomischen Coordinatentransformationen. Setzen wir z. B. in (88) $\varrho = i \sin A \cos h + j \cos A \cos h + k \sin h$, $\varrho_2 = i_2 \cos \alpha \cos \delta + j_2 \sin \alpha \cos \delta + k_2 \sin \delta$, $k =$ der Axe gegen den Westpunkt, $K = -(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$, $i_1 =$ der Polaxe, $I_1 = \theta - \frac{1}{2}\pi$ [$A$, $h$ $\alpha$, $\delta$, $\varphi$ und $\theta$ bezeichnen resp. das Azimuth, die Höhe, die Rectascension, die Declination, die Polhöhe und die Sternzeit], so bekommen wir, ohne das sphärische Dreieck zu brauchen, die bekannten Relationen zwischen den erwähnten Grössen; u. s. w.

Upsala, November 1876.

---

*) Wir haben hier zu bemerken, dass Axensysteme mit gleichgerichteten Axen als identisch anzusehen sind [vergl. Nr. 4.].

# On the theory of Partial Differential Equations.

By A. Cayley.

In what follows, any letter not otherwise explained denotes a function of certain variables $(x, y, p, q)$, or $(x, y, z, p, q, r)$, &c. as will be stated in each particular case.

An equation $a = \text{const.}$ denotes that the function $a$ of the variables is in fact a constant (viz. by such equation we establish a relation between the variables), and when this is so, we use the same letter $a$ to denote the constant value of the function in question: I find this a very convenient notation.

Thus if the variables are $x, y, z, p, q, r$ and if $p, q, r$ are the differential coefficients in regard to $x, y, z$ respectively of a function $V$ of $x, y, z$, then $\mathsf{H}$ (as a letter not otherwise explained) denotes a function of $x, y, z, p, q, r$, and considering it as a given function,

$$\mathsf{H} = \text{const.}$$

will be a partial differential equation containing the constant $\mathsf{H}$. For instance if $\mathsf{H}$ denote the function $pqr - xyz$, $\mathsf{H} = \text{const.}$ is the partial differential equation, $pqr - xyz = \mathsf{H}$ (a given constant).

The integration of the partial differential equation, $\mathsf{H} = \text{const.}$, depends upon that of the linear partial differential equation

$$(\mathsf{H}, \Theta) = 0,$$

where as usual $(\mathsf{H}, \Theta)$ signifies

$$\frac{\partial(\mathsf{H}, \Theta)}{\partial(p, x)} + \frac{\partial(\mathsf{H}, \Theta)}{\partial(q, y)} + \frac{\partial(\mathsf{H}, \Theta)}{\partial(r, z)},$$

and it can be effected if we know two conjugate solutions $a, b$ of the equation $(\mathsf{H}, \Theta) = 0$, viz. $a, b$ as solutions are such that $(\mathsf{H}, a) = 0$, $(\mathsf{H}, b) = 0$, and (as conjugate solutions) are also such that $(a, b) = 0$; in this case if from the equations

$$\mathsf{H} = \text{const.}, \quad a = \text{const.}, \quad b = \text{const.}$$

we determine $p$, $q$, $r$ as functions of $x$, $y$, $z$, the resulting value of $pdx + qdy + rdz$ is an exact differential, and we have

$$V = \lambda + \int (pdx + qdy + rdz),$$

a solution containing three arbitrary constants $\lambda$, $a$, $b$, and therefore a complete solution of the proposed partial differential equation $\mathsf{H} = \text{const.}$

But (as is known) there is a different process of integration, for which the conjugate solutions are not required, and which has reference to a system of initial values $x_0$, $y_0$, $z_0$, $p_0$, $q_0$, $r_0$: viz. if the independent solutions of $(\mathsf{H}, \Theta) = 0$, are $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, and if $a_0$, $b_0$, $c_0$, $d_0$, $e_0$ denote respectively the same functions of the initial variables that $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ are of $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$, then if from the equations

$$a = a_0, \quad b = b_0, \quad c = c_0, \quad d = d_0, \quad e = e_0, \quad \mathsf{H} = \text{const.}$$

we express $p$, $q$, $r$ as functions of $x$, $y$, $z$ and of $x_0$, $y_0$, $z_0$, $\mathsf{H}$, these last being regarded as constants, we have $pdx + qdy + rdz$ an exact differential, and $V = \lambda + \int (pdx + qdy + rdz)$, a solution containing the constants $\lambda$, $x_0$, $y_0$, $z_0$ (that is one supernumerary constant), and as such a complete solution.

It is interesting to prove directly that $pdx + qdy + rdz$ is an exact differential.

I consider first the more simple case where the variables are $p$, $q$, $x$, $y$. Here $p$, $q$ are to be found from the equations

$$a = a_0, \quad b = b_0, \quad c = c_0, \quad \mathsf{H} = \text{const.}$$

and it is to be shown that $pdx + qdy$ is an exact differential.

Considering $p$, $q$, $p_0$, $q_0$ as functions of the independent variables $x$, $y$, then differentiating in regard to $x$, and eliminating $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp_0}{dx}$, $\frac{dq_0}{dx}$, we have

$$\begin{vmatrix} \frac{da}{dx} + \frac{da}{dq}\frac{dq}{dx}, & \frac{da}{dp}, & \frac{da_0}{dp_0}, & \frac{da_0}{dq_0} \\ \frac{db}{dx} + \frac{db}{dq}\frac{dq}{dx}, & \frac{db}{dp}, & \frac{db_0}{dp_0}, & \frac{db_0}{dq_0} \\ \frac{dc}{dx} + \frac{dc}{dq}\frac{dq}{dx}, & \frac{dc}{dp}, & \frac{dc_0}{dp_0}, & \frac{dc_0}{dq_0} \\ \frac{d\mathsf{H}}{dx} + \frac{d\mathsf{H}}{dq}\frac{dq}{dx}, & & & \end{vmatrix} = 0,$$

or introducing a well known notation for functional determinants, and expanding the determinant, this is

$$\frac{\partial(a_0, b_0)}{\partial(p_0, q_0)} \left\{ \frac{\partial(\mathsf{H}, c)}{\partial(p, x)} + \frac{\partial(\mathsf{H}, c)}{\partial(p, q)}\frac{dq}{dx} \right\} + \&c. = 0.$$

But in the same way

$$\frac{\partial(a_0, b_0)}{\partial(p_0, q_0)}\left\{\frac{\partial(\mathsf{H}, c)}{\partial(q, y)} + \frac{\partial(\mathsf{H}, c)}{\partial(q, p)}\frac{dp}{dy}\right\} + \&c. = 0;$$

or adding these, attending to the value of $(\mathsf{H}, c)$, and observing that $\frac{\partial(\mathsf{H}, c)}{\partial(q, p)} = -\frac{\partial(\mathsf{H}, c)}{\partial(p, q)}$ we have

$$\frac{\partial(a_0, b_0)}{\partial(p_0, q_0)}\left\{(\mathsf{H}, c) + \frac{\partial(\mathsf{H}, c)}{\partial(p, q)}\left(\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy}\right)\right\} + \&c. = 0,$$

the terms denoted by the &c. being the like terms with $b, c, a$ and $c, a, b$ in place of $a, b, c$. We have $(\mathsf{H}, a) = 0$, $(\mathsf{H}, b) = 0$, $(\mathsf{H}, c) = 0$, and the equation in fact is

$$\left\{\sum \frac{\partial(a_0, b_0)}{\partial(p, q)}\frac{\partial(\mathsf{H}, c)}{\partial(p, q)}\right\}\left(\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

viz. we have $\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy} = 0$, the condition for the exact differential.

Coming now to the case where the variables are $x, y, z, p, q, r$, and in the six equations treating $p, q, r, p_0, q_0, r_0$ as functions of the independent variables $x, y, z$, — then differentiating in regard to $x$ and proceeding as before, we find for $\frac{dr}{dx}$ the equation

$$\frac{\partial(c_0, d_0, e_0)}{\partial(p_0, q_0, r_0)}\left\{\frac{dr}{dx}\frac{\partial(a, b, \mathsf{H})}{\partial(r, p, q)} + \frac{\partial(a, b, \mathsf{H})}{\partial(x, p, q)}\right\} + \&c. = 0,$$

and we have in the same way for $\frac{dp}{dz}$ the equation

$$\frac{\partial(c_0, d_0, e_0)}{\partial(p_0, q_0, r_0)}\left\{\frac{dp}{dz}\frac{\partial(a, b, \mathsf{H})}{\partial(p, r, q)} + \frac{\partial(a, b, \mathsf{H})}{\partial(z, r, q)}\right\} + \&c. = 0,$$

or, adding the two equations,

$$\frac{\partial(c_0, d_0, e_0)}{\partial(p_0, q_0, r_0)}\left\{\left(\frac{dr}{dx} - \frac{dp}{dz}\right)\frac{\partial(a, b, \mathsf{H})}{\partial(r, p, q)} + \frac{\partial(a, b, \mathsf{H})}{\partial(x, p, q)} + \frac{\partial(a, b, \mathsf{H})}{\partial(z, r, q)}\right\} + \&c. = 0,$$

where the &c.'s indicate the like terms corresponding to the different partitions of the letters $a, b, c, d, e$.

The equation may be simplified; we have identically

$$-\frac{da}{dq}(b, \mathsf{H}) - \frac{db}{dq}(\mathsf{H}, a) - \frac{d\mathsf{H}}{dq}(a, b) = \frac{\partial(a, b, \mathsf{H})}{\partial(x, p, q)} + \frac{\partial(a, b, \mathsf{H})}{\partial(z, r, q)},$$

or since $(\mathsf{H}, a) = 0$, $(b, \mathsf{H}) = 0$, the left hand side is simply $-\frac{d\mathsf{H}}{dq}(a, b)$, and the equation becomes

$$\frac{\partial(c_0, d_0, e_0)}{\partial(p_0, q_0, r_0)}\left\{\left(\frac{dr}{dx} - \frac{dp}{dz}\right)\frac{\partial(a, b, \mathsf{H})}{\partial(r, p, q)} - \frac{d\mathsf{H}}{dq}(a, b)\right\} + \&c. = 0.$$

This ought to give $\frac{dr}{dx} - \frac{dp}{dz} = 0$, and it will do so if only

$$\sum \left\{ \frac{\partial (c_0, d_0, e_0)}{\partial (p_0, q_0, r_0)} (a, b) \right\} = 0;$$

this is then the equation which has to be proved. By the Poisson-Jacobi theorem $(a, b)$ is a function of $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ and if we write

$$(a_0, b_0) = \frac{\partial (a_0, b_0)}{\partial (p_0, x_0)} + \frac{\partial (a_0, b_0)}{\partial (q_0, y_0)} + \frac{\partial (a_0, b_0)}{\partial (r_0, z_0)}$$

then $(a_0, b_0)$ is the same function of $a_0$, $b_0$, $c_0$, $d_0$, $e_0$; but these are $= a, b, c, d, e$ respectively, and we thence have $(a, b) = (a_0, b_0)$, and the theorem to be proved is

$$\sum \left\{ \frac{\partial (c_0, d_0, e_0)}{\partial (p_0, q_0, r_0)} (a_0, b_0) \right\} = 0 .$$

But substituting for $(a_0, b_0)$ its value, the function on the left hand is (it is easy to see) the sum of the three functional determinants

$$\frac{\partial (a_0, b_0, c_0, d_0, e_0)}{\partial (p_0, q_0, r_0, p_0, x_0)} + \frac{\partial (a_0, b_0, c_0, d_0, e_0)}{\partial (p_0, q_0, r_0, q_0, y_0)} + \frac{\partial (a_0, b_0, c_0, d_0, e_0)}{\partial (p_0, q_0, r_0, r_0, z_0)} ;$$

each of which vanishes as containing the same letter twice in the denominator, that is as having two identical columns; and the theorem in question is thus proved. And in the same way $\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dz} - \frac{dr}{dy}$ are each $= 0$, or we have $pdx + qdy + rdz$ an exact differential.

The proof would fail if the factors multiplying $\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy}$ &c. or any one of these factors were $= 0$; I have not particularly examined this, but the meaning would be, that here the equations in question $a = a_0$ &c., $\mathsf{H} =$ const. are such as not to give rise to expressions for $p$, $q$, $r$ as functions of $x$, $y$, $z$, $x_0$, $y_0$, $z_0$, $\mathsf{H}$, as assumed in the theorem; whenever such expressions are obtainable, then we have $pdx + qdy + rdz$, an exact differential.

The proof in the case of a greater number of variables, say in the next case where the variables are $x$, $y$, $z$, $w$, $p$, $q$, $r$, $s$ would present more difficulty — but I have not proceeded further in the question.

It is worth while to put the two processes into connexion with each other: taking in each case the variables to be $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$, and the partial differential equation to be $\mathsf{H} =$ const.;

In the one case, $a$, $b$ being conjugate solutions of $(\mathsf{H}, \Theta) = 0$
from the equations $\mathsf{H} =$ const., $a =$ const., $b =$ const.,
we find $p$, $q$, $r$ functions of $x$, $y$, $z$, $\mathsf{H}$, $a$, $b$,
and then $pdx + qdy + rdz$ an exact differential.

In the other case, $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ being the solutions of $(\mathsf{H}, \Theta) = 0$,
from the equations $\mathsf{H} = \text{const.}$, $a = a_0$, $b = b_0$, $c = c_0$,
$d = d_0$, $e = e_0$,
we find $p$, $q$, $r$ functions of $x_0$, $y_0$, $z_0$, $\mathsf{H}$,
and then $pdx + pdy + rdz$ is an exact differential.

It may be added that if from the last mentioned equations we determine also $p_0$, $q_0$, $r_0$ as functions of $x$, $y$, $z$, $x_0$, $y_0$, $z_0$ then considering only $\mathsf{H}$ as a constant, we ought to have $pdx + qdy + rdz - p_0dx_0 - q_0dy_0 - r_0dz_0$ an exact differential; I have not examined the direct proof.

Cambridge 28$^{h}$ Nov. 1876.

# Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen.

Von

A. V. Bäcklund in Lund.

## I.

Wenn, wie aus den neueren Arbeiten von Herrn Lie evident ist, die Theorie einer gewissen Classe von Flächentransformationen, nämlich die Theorie der endlich-deutigen derselben, der sogenannten Berührungstransformationen, die ganze Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nach sich zieht, indem diese beiden Theorien sich vollständig decken, so lässt sich erwarten, dass in gleicher Weise die *mehrdeutigen* Flächentransformationen über andere geometrische Configurationen als die durch partielle Differentialgleichungen 1. O. dargestellten Unterricht geben werden. Schon in meinem früheren Aufsatze „Ueber Flächentransformationen" im IX. Bande dieser Annalen, ist, bei einer kurzen Besprechung der einfachsten Classe mehrdeutiger Flächentransformationen des Raumes von drei Dimensionen*), auf partielle Differentialgleichungen 2. O. hingewiesen, deren vollständige Lösung auf die Aufsuchung einer zweifachen Schaar von partiellen Differentialgleichungen 1. O. hinauskommt, Gleichungen 2. O., die als Transformationen von Gleichungen 1. O. entstehen.

Es ist gegenwärtig meine Absicht, erstens die Theorie der mehrdeutigen Flächentransformationen etwas ausführlicher, als es in jenem Aufsatze geschehen ist, darzulegen, sodann die Natur derjenigen partiellen Differentialgleichungen, zu denen in erster Linie die Flächentransformationen Anlass geben, zu beschreiben, und endlich die aus diesen Betrachtungen herfliessende Methode zur Erledigung der intermediären ersten Integrale einer gegebenen partiellen Differentialglei-

*) Diese Transformations-Classe wird auch von Herrn Paul du Bois-Reymond in dessen Arbeit „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen." Leipzig 1864, S. 173 erwähnt.

chung, — sofern die Gleichung solche Integrale hat, — auseinanderzusetzen*).

Hierbei muss ich bemerken, dass das Problem der Herstellung der ersten Integrale schon durch eine von Herrn Darboux in den Comptes rendus T. LXX ausgeführte Untersuchung, die sogar partielle Differentialgleichungen allgemeinerer Art als die hier zu Rede kommenden umfasst, als erledigt angesehen werden muss.

## § 1.

### Allgemeines über die mehrdeutigen Flächentransformationen.

1. Durch irgendwelche $n+1$ Gleichungen:

$$(A)\quad \begin{cases} X_1 = F_1\,(z x_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n\ p_{k_1} \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_m} \cdots), \\ X_2 = F_2\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = F_n\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ Z = F\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad), \end{cases}$$

($p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ gleich dem $m^{\text{ten}}$ partiellen Differentialquotienten von $z$ nach $x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_m}$, wo $k_1 k_2 \cdots k_m$ irgendwelche der Zahlen $1\,2 \cdots n$ bedeuten) ist, wie ich in einem früheren Aufsatze**) gezeigt habe, eine Flächentransformation des Raumes $R_{n+1}\,(z x_1 \cdots x_n)$ vollständig bestimmt, indem die übrigen Gleichungen dieser Transformation aus jenen durch die Bedingung, dass das Gleichungssystem

$$dz - \Sigma p_i dx_i = 0, \quad dp_k - \Sigma p_{ki} dx_i = 0, \cdots\cdots$$

in das ähnliche System:

$$dZ - \Sigma P_i dX_i = 0, \quad dP_k - \Sigma P_{ki} dX_i = 0, \cdots\cdots$$

transformirt werden soll, herzuleiten sind. — Ich habe auch hervorgehoben, gebe übrigens unten einen neuen Beweis dieses Satzes, dass nur in dem Falle, wo die Gleichungen (A) von der Form sind:

$$\begin{cases} X_1 = F_1\,(z x_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = F_n\,(\qquad\qquad\qquad), \\ Z = F\,(\qquad\qquad\qquad), \end{cases}$$

*) In zwei kleineren Aufsätzen: Ueber eine gewisse Gattung partieller Differential-Gleichungen zweiter Ordnung (Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Sitzung vom 6. März 1876); Résumé einer Untersuchung betreffend partielle Gleichungen beliebiger Ordnung mit einer beliebigen Zahl Veränderlichen (Jahresschrift der Universität Lund, T. XII, 13. März 1876) bin ich schon auf die Behandlung derartiger partieller Differential-Gleichungen eingegangen.

**) In diesen Annalen Bd. IX, pag. 297.

und wenn, bei Befriedigung der obengenannten Bedingung, für $P_1 \cdots P_n$ Functionswerthe kommen:

$$\begin{aligned} P_1 &= \Phi_1 (z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n), \\ P_2 &= \Phi_2 (\quad\quad\quad\quad\quad\quad), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n &= \Phi_n (\quad\quad\quad\quad\quad\quad), \text{ —} \end{aligned}$$

dass also nur, wenn eine Lie'sche Berührungstransformation vorliegt, die Flächentransformation eindeutig (endlich-deutig), anderenfalls mehrdeutig (unendlich-deutig) ist. Von den mehrdeutigen Flächentransformationen wird hier die Rede sein. Es soll das Nächstfolgende, wenn es auch in erster Linie blos die einfachsten derselben behandelt, dazu dienen, die wesentlichsten Eigenschaften aller solcher Transformationen erblicken zu lassen.

2. Seien die Gleichungen (A) von der Form:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= F_1 (z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n), \\ X_2 &= F_2 (\quad\quad\quad\quad\quad\quad), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z &= F (\quad\quad\quad\quad\quad\quad), \end{aligned} \right.$$

wo die Functionen $F$, $F_i$ willkürlich, aber nicht zu je zweien involutorisch sind. Durch letztere Beschränkung sind die eindeutigen Flächentransformationen ausgeschlossen.

Indem man diese Gleichungen differentiirt und in die Differentiale der Functionen $F_i$, $F$ setzt:

$$dz = \Sigma p_i dx_i, \quad dp_k = \Sigma p_{ki} dx_i$$

bekommt man aus der Gleichung

$$dZ - \Sigma P_i dX_i = 0 \text{ oder } dF - \Sigma P_i dF_i = 0,$$

die unabhängig von den Werthen der $dx_i$ bestehen muss, $n$ Gleichungen zur Bestimmung von $P_1 \cdots P_n$. In dieser Weise findet man folgende Reihe von Gleichungen, die der Transformation (1) zugehören:

$$(2) \qquad P_i = \frac{\Phi_i (z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n \cdots p_{k1} \cdots p_{nn})}{\Phi (\quad\quad\quad\quad\quad\quad)}, \quad (i = 1\ 2 \cdots n),$$

wo die Gleichung 2. 0. $\Phi = 0$ das intermediäre Integral:

eine arbiträre Function von $(F_1 F_2 \cdots F_n) = 0$,

die Gleichung $\Phi_i = 0$ das intermediäre Integral:

eine arbiträre Function von $(F F_1 \cdots F_{i-1} F_{i+1} \cdots F_n) = 0$

besitzt. Weiterhin erkennt man, dass alle Gleichungen (2), wenn $P_i$ als Constanten betrachtet werden, ein intermediäres Integral gemeinsam haben, nämlich:

$$F - \Sigma P_i F_i = \text{Const.},$$

dass also je zwei derselben $n-1$ gemeinsame intermediäre Integrale besitzen, und sodann schliesslich, dass eine jede

$$P_i = \frac{\Phi_i}{\Phi}$$

ein vollständiges intermediäres Integral der Form besitzt:
eine arbiträre Function von $(F - P_i F_i,\ F_1 \cdots F_{i-1} F_{i+1} \cdots F_n) = 0$.

3. Wie durch die Transformation (1) die Flächenelemente des Gebietes $(ZX)$ umgeformt werden, ist hiernach leicht zu erkennen. Während ein Flächenelement $(zxp)$ des Gebietes $(zx)$ in einen Punkt $(ZX)$ oder besser in alle an diesen Punkt sich anschliessenden Elemente $(ZXP)$ übergeht, verwandelt sich das Flächenelement $(ZXP)$ zunächst in $\infty^n$ an die $\infty^n$ Punkte einer Fläche*) sich anschliessende, dieser Fläche aber nicht als Flächenelemente zugehörende Elemente $(zxp)$. Es scheidet aber weiter, nach den Gleichungen (2), das dem Elemente $(ZXP)$ zugehörige Werthesystem von $P_1 \cdots P_n$ auf einem jeden der $\infty^n$ entsprechenden Elemente $(zxp)$ eine Schaar von Werthen von $p_{kl}$ aus, die durch Gleichungen folgender Form:

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu_1 + m_1 p_{11} + m_2 p_{12} + \cdots m_n p_{1n} = 0, \\ \mu_2 + m_1 p_{21} + m_2 p_{22} + \cdots m_n p_{2n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_n + m_1 p_{n1} + m_2 p_{n2} + \cdots m_n p_{nn} = 0, \end{array}\right. \qquad (p_{kl} = p_{lk}),$$

dargestellt ist. So dass alle einem beliebigen $(zxp)$ zugehörigen $p_{kl}$ eine lineare $n$-fach-unendliche Reihe derartiger, den besonderen Werthen von $P_1 \cdots P_n$ entsprechenden Schaaren (3) bilden.

4. Eine Ebene $Z - P_1 X_1 - \cdots P_n X_n = \text{Const.}$**) wird in eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$F - P_1 F_1 - \cdots P_n F_n = \text{Const.};$$

eine beliebige Fläche des Gebietes $(ZX): f(ZX_1 \cdots X_n) = 0$ ebenfalls in eine partielle Differentialgleichung 1. O.:

$$f(FF_1 \cdots F_n) = 0$$

verwandelt; und ebenso wie die Fläche als Umhüllungsgebilde von Ebenen $Z - \Sigma P_i X_i = C$ zu betrachten ist, muss die entsprechende partielle Differentialgleichung 1. O. als Umhüllungsgebilde von partiellen Differentialgleichungen $F - \Sigma P_i F_i = C$ aufgefasst werden. Denn es gilt allgemein der Satz, dass, wenn zwei Flächen des Gebietes

*) Vorausgesetzt, dass bei Elimination von $p$ aus den Gleichungen (1) nur *eine* Gleichung in $Z$, $X$, $z$, $x$ resultirt. Wie das Obige zu modificiren ist, wenn statt einer, zwei, drei ... Gleichungen resultiren, ist wohl ohne Weiteres klar.

**) Die $P_i$ als Constanten betrachtet.

$(ZX)$ sich berühren, so berühren sich auch die entsprechenden partiellen Differentialgleichungen des Gebietes $(zx)$, d. h. die einem gemeinsamen Elemente $(zxp)$ beider Gleichungen unendlich benachbarten Elemente der einen Gleichung sind auch Elemente der anderen Gleichung.

Es entspricht auch dem den beiden Flächen in deren Berührungspunkte gemeinsamen Elemente $(ZXP)$, auf einem jeden der dem Punkte $(ZX)$ entsprechenden $(zxp)$, eine gewisse Schaar (3) von $p_{kl}$, und diese Schaar gehört gleichzeitig den beiden fraglichen Gleichungen 1. O. zu.

5. Einer partiellen Differentialgleichung 1. O.

$$\Phi(ZX_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n) = 0$$

entspricht im Gebiete $(zx)$ eine partielle Differentialgleichung 2. O. — Von dieser Gleichung bemerken wir zunächst, dass die Integralflächen derselben, da sie aus den Integralen von $\Phi = 0$ durch die Transformation hervorgehen, selbst als Integrale von partiellen Gleichungen 1. O.: $f(FF_1 \cdots F_n) = 0$ erscheinen müssen. Letztere Gleichungen werden somit intermediäre Integrale der partiellen Gleichung 2. O. Es giebt, entsprechend den Integralflächen von $\Phi = 0$, unendlich viele solche intermediäre Integrale; durch eine Schaar von $\infty^n$ derselben werden die übrigen als Umhüllungsgebilde erzeugt werden können.

Den linearen partiellen Differentialgleichungen 1. O. in $(ZX)$ entsprechen partielle Differentialgleichungen 2. O. in $(zx)$ mit einem Integrale der Form:

$$\text{eine arbiträre Function von } (u_1 u_2 \cdots u_n) = 0,$$

wo $u_1, u_2, \cdots u_n$ Functionen von $z, x, p$ sind. —

Die in dieser Weise zu gewinnenden Gleichungen 2. O. sind, wohlbemerkt, keineswegs die allgemeinsten Gleichungen 2. O. mit der grösstmöglichen Zahl intermediärer Integrale. Sie bilden unter ihnen eine specielle Gattung, indem die $n-1$-fache Reihe von Schaaren (3), in welche die $p_{kl}$ sich vertheilen, die durch irgend eine dieser Gleichungen einem jeden $(zxp)$ zugeordnet werden, nothwendig in der am Ende der 3. Nummer bestimmten $n$-fachen Reihe enthalten sein muss. — Ein jedes intermediäre Integral ist ja auch von der Form:

$$f(FF_1 \cdots F_n) = 0.$$

Zwei Gleichungen 1. O. in $(ZX)$, die in Involution liegen, entsprechen zwei Gleichungen 2. O. in $(zx)$, die $\infty^{n-1}$ intermediäre Integrale gemeinsam besitzen. Diese Integrale entsprechen den gemeinsamen Integralen der Gleichungen 1. O. in $(ZX)$.

6. Um auch das Verhalten der Figuren in $(zx)$ gegenüber dieser Transformation etwas zu kennzeichnen, mag kurz erwähnt werden, wie man das im Gebiete $(ZX)$ befindliche Bild einer in $zx$ gegebenen partiellen Differentialgleichung 1. O. herzuleiten habe.

Zu diesem Zwecke brauchen wir noch die der Flächentransformation (1) zugehörenden Ausdrücke für $P_{kl}$. Diese Ausdrücke ergeben sich durch Differentiation in Bezug auf $x_1 x_2 \cdots x_n$ von

$$P_i - P_{i1} X_1 - P_{i2} X_2 - \cdots P_{in} X_n = \text{Const.}, \quad (i = 1, 2 \cdots n),$$

wo die $P_{ik}$ als Constanten zu betrachten sind.

Die Darstellung der Figur, in welche die partielle Differentialgleichung

$$f(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = 0$$

durch die Transformation (1) übergeht, geschieht nun durch Elimination von $z$, $x$, $p$ aus (1) und einer Reihe von Gleichungen, unter denen $f(zxp) = 0$ die erste ist, während die zweite die Form hat:

$$[fZ] - \Sigma P_i [f X_i] = 0,$$

genau die Form einer Involutionsbedingung zwischen $f = 0$ und $Z - \Sigma P_i X_i = C$, sofern in der letzteren Gleichung die $P_i$ als blosse Constanten betrachtet werden. — Drückt man weiter aus, dass die Gleichung

$$[fZ] - \Sigma_i P_i [f X_i] - \Sigma_i \Sigma_k [f X_i] P_{ik} X_k = C,$$

wo $P_i$, $P_{ik}$ ebenso wie die im *dritten* Terme vorkommenden $[f X_i]$ als blosse Constanten stehen, — mit $f = 0$ und mit $Z - \Sigma P_i X_i = C$ in Involution liegt, so hat man zwei weitere Gleichungen der fraglichen Reihe. Durch eine ähnliche Behandlung dieser letzteren Gleichungen findet man neue. — Dieser Process ist identisch mit einer Elimination der kleinen Buchstaben $z$, $x$, $p_k$, $p_{kl} \cdots$ aus den Gleichungen der Flächentransformation, aus $f(zxp) = 0$ und aus den Derivirten von $f = 0$ in Bezug auf $x_1 \cdots x_n$.

Eine Gleichung 1. O. des Gebietes $(zx)$ wird also im Allgemeinen in eine Figur in $(ZX)$ übergeführt, die durch ein System partieller Differentialgleichungen höherer Ordnung analytisch definirt ist. Im Falle $n = 2$ wird dieses System aus zwei partiellen Differentialgleichungen 2. O. bestehen. —

7. Es ist oben gezeigt worden, dass es in $(zx)$ eine ausgezeichnete Classe von Gleichungen 2. O. giebt, deren vollständige Lösungen durch partielle Differentialgleichungen 1. O. vermittelt werden. Diese Gleichungen sind durch Anwendung der Flächentransformation (1) aus den partiellen Gleichungen 1. O. des $(ZX)$ entstanden. Betrachten wir jetzt eine partielle Differentialgleichung 2. O. in $(ZX)$:

$$\Phi(Z X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n P_{11} \cdots P_{ik} \cdots P_{nn}) = 0;$$

derselben entspricht durch die Substitutionen (1), (2) u. s. w. eine partielle Differentialgleichung 3. O. in $(zx)$, die intermediäre *zweite* Integrale: $f(F F_1 \cdots F_n) = 0$ besitzt, entsprechend den Integralflächen von $\Phi = 0$. Wenn insbesondere $\Phi = 0$ ein intermediäres Integral

hat, so hat die entsprechende Gleichung 3. O. ein *erstes* Integral. Und als Bilder derjenigen Gleichungen 2. O. des $(ZX)$, die $\infty^n$ erste Integrale besitzen, bekommen wir also eine Classe von Gleichungen 3. O., die intermediäre, sowohl erste als zweite, Integrale zur grösstmöglichen Zahl besitzen, Gleichungen, deren Integralflächen stets in einem zweiten und hernach in einem ersten Integrale enthalten sind. — Es ist natürlich nur eine specielle Gattung derartiger Gleichungen, die in dieser Weise gewonnen wird, da ja schon die ersten Integrale derselben einer sehr speciellen Gattung von Gleichungen 2. O. mit $\infty^n$ intermediären Integralen zugehören.

Indem wir in dieser Weise fortgehen, können wir allgemein den Satz aussprechen: *Einer beliebigen partiellen Differentialgleichung in* $(ZX)$ *entspricht eine partielle Differentialgleichung nächsthöherer Ordnung in* $(zx)$, *die partielle Differentialgleichungen erster Ordnung als intermediäre Integrale besitzt. Insbesondere wird man zu einer Gattung partieller Differentialgleichungen geführt, die intermediäre erste, zweite, dritte* $\cdots$ *Integrale zur grösstmöglichen Zahl besitzen, und deren vollständige Lösungen daher durch Erledigung von Systemen partieller Gleichungen 1. O. erzielt werden können**). —

Die einer Gleichung 2. O. des $(ZX)$ entsprechende Gleichung 3. O. könnte intermediäre erste Integrale besitzen, wenn auch die Gleichung 2. O. solche nicht hätte. Alsdann aber würden die nach dem Vorangehenden stets vorhandenen zweiten Integrale der Gleichung 3. O. keine intermediäre der ersten Integrale sein. Beispielsweise erinnere ich an die früher von mir in der 17. Nummer der obencitirten Abhandlung gegebene Erweiterung einer Theorie von Legendre betreffend die Gleichungen in $R_3$: $F(p_{11}p_{12}p_{22}) = 0$, wo eine Gleichung 3. O. der erwähnten Art als Transformation einer Gleichung 2. O. in $(ZX)$ auftritt, und wo die zweiten Integrale der Gleichung 3. O. keineswegs Integrale der ersten Integrale derselben ausmachen.

Gleichungen 2. O. in $(ZX)$, die gemeinsame Integralflächen besitzen, entsprechen Gleichungen 3. O. in $(zx)$ mit ebensovielen gemeinsamen zweiten Integralen.

8. Eine Gleichung 2. O., die einer Gleichung

$$f(ZX_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n) = 0$$

entspricht, würde andere erste Integrale als die von der Form:

$$\varphi(FF_1 \cdots F_n) = 0,$$

besitzen können. Da aber alle Integralflächen der Gleichung 2. O. in

---

*) Die intermediären ersten Integrale einer Gleichung — unten wird es bewiesen — sind nämlich stets durch ein System partieller Differentialgleichungen 1. O. zu bestimmen.

diesen letzteren intermediären Integralen enthalten sein sollen, so müssen diese mit den neuen intermediären Integralen, falls solche existiren, Integralflächen zur grösstmöglichen Zahl gemein haben. Denn nehmen wir beliebig eine solche Mannigfaltigkeit von $\infty^{n-1}$ Elementen $(zxp)$, deren jedes mit allen unendlich benachbarten vereinigt liegt, und die sämmtlich einem der neuen intermediären Integrale angehören. Diese $M_{n-1}$ gehört gleichzeitig einem gewissen der früheren intermediären Integrale an. Die durch dieselbe $M_{n-1}$ gelegte Integral-$M_n$ jenes neuen intermediären Integrals muss dann, weil dieselbe doch in einem der früheren intermediären enthalten sein soll, gerade dem letztgenannten dieser intermediären Integrale als Integral-$M_n$ zugehören. Alle $M_{n-1}$, die einem der neuen und einem der früheren intermediären Integrale gemeinsam sind, bestimmen in dieser Weise gemeinsame Integral-$M_n$, — was auf das oben Behauptete hinauskommt.

Insbesondere könnte es geschehen, dass sich die Integralflächen der Gleichung 2. O. so zu Integralen zweier verschiedener Gruppen von Gleichungen 1. O. vertheilen liessen, dass jede Gruppe für sich sämmtliche Integralflächen gäbe. Dann wäre die Gleichung 2. O. nothwendig eine solche, die zwei erste Integralschaaren von der Form:

$$\text{eine arbitr. Function von } (u_1 u_2 \cdots u_n) = 0,$$
$$\text{eine arbitr. Function von } (v_1 v_2 \cdots v_n) = 0$$

gestattete; — hierbei $[u_i v_k] = 0$, $(i, k = 1, 2 \cdots n)$.

## § 2.

### Einige besondere Gattungen von Flächentransformationen.

9. Wenn das Gebiet $(ZX)$ der Transformation (1) durch eine Berührungstransformation in ein anderes Gebiet umgeformt wird, so ist das Entsprechen zwischen diesem neuen Gebiete $(ZX)$ und dem früheren $(zx)$ durch Gleichungen der Form ausgedrückt:

$$(4)\quad \begin{cases} Z = F(zx_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n p_{11} \cdots p_{ik} \cdots p_{nn}), \\ X_i = F_i(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad), \\ P_i = \Phi_i(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad), \\ P_{ik} = \Phi_{ik}(zx_1 \cdots x_n \cdots p_i \cdots p_{ik} \cdots p_{ikl} \cdots p_{nnn}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen eine Flächentransformation dar, die denjenigen Transformationen (A) angehört, deren $n+1$ erste Gleichungen: $Z = F$, $X_i = F_i$ Gleichungen 2. O. in $(zx)$ sind. Aber die genannte Transformation bildet eine specielle Gattung der letzteren, insofern dieselbe für die Grössen $P_i$ Ausdrücke giebt, in welche die $p_{ikl}$ nicht eingehen. Sie sind jedoch keineswegs die einzigen Transformationen dieser

Art, keineswegs die allgemeinsten jener Eigenschaft. Die Transformation (4) ist nämlich dadurch charakterisirt, dass die Gleichungen 2. O.: $F = C$, $F_i = C$ der in der 5. Nummer angegebenen speciellen Gattung von Gleichungen mit intermediären Integralen angehören, und dass weiterhin je zwei derselben, nach dem Satze am Schlusse der 5. Nummer, $\infty^{n-1}$ gemeinsame intermediäre Integrale besitzen. Die Erörterungen der nächstfolgenden Nummern werden beweisen, dass irgendwelche $n+1$ Gleichungen 2. O.: $F = Z$, $F_i = X_i$, von denen je zwei Gleichungen $\infty^{n-1}$ intermediäre Integrale gemeinsam haben, eine Flächentransformation begründen, die ebenfalls die $P_i$ unabhängig von den $p_{ikl}$ macht. Weil die dabei benutzten Gleichungen 2. O. die allgemeinsten sind, die $\infty^n$ intermediäre Integrale zulassen, so werden diese Transformationen allgemeiner als die Transformationen (4).

10. Es gilt allgemein folgender Satz: *Eine jede Flächentransformation:*

$$(5)\qquad \begin{cases} Z = F\ (z x_1 \cdots x_n \cdots p_i \cdots p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_m}), \\ X_1 = F_1\ (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ \cdots\cdots\cdots\

$z$, $p_i$, $p_{k_1 k_2}$ $\cdots$ als Functionen von $x_1$, $\cdots$ $x_n$ betrachtet, und $\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i$ etc.

Wenn aber hierdurch für $P_1 \cdots P_n$ Werthe unabhängig von den $(m+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $z$ sich ergeben sollen, so müssen für diese Werthe von $P_i$ die Glieder der Gleichungen (a), die die besprochenen $(m+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $z$ enthalten, wegfallen, also:

$$\text{(b)} \quad \frac{\partial Z}{\partial p_{k_1 k_2 \ldots k_m}} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_{k_1 k_2 \ldots k_m}} - \cdots P_n \frac{\partial X_n}{\partial p_{k_1 k_2 \ldots k_m}} = 0,$$

unter $\frac{\partial}{\partial p}$ einen partiellen Differentialquotienten verstanden.

Die Zahl dieser Gleichungen ist gleich der Zahl der $m^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $z$; sie zeigen, dass $Z$ die Grössen $p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ nur in einer Combination enthalten kann, die einer Function von $X_1 X_2 \cdots X_n$ gleichkommt, darum:

$$\text{(7)} \quad Z = f(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}} X_1 X_2 \cdots X_n)^*)$$

und weiterhin:

$$\text{(c)} \qquad P_i = \frac{\partial Z}{\partial X_i} \cdot -$$

Wenn zur Abkürzung mit $\frac{d' V}{d x_i}$ bezeichnet wird:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} + \sum_k p_{ik} \frac{\partial V}{\partial p_k} + \cdots \sum_k p_{i k_1 k_2 \ldots k_{m-1}} \frac{\partial V}{\partial p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}}}$$

(wo $V$ eine Function von $z x_i p_i \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ bezeichnet), so nehmen, wegen (b), die Gleichungen (a) die Form an:

$$\frac{d' Z}{d x_i} - P_1 \frac{d' X_1}{d x_i} - \cdots P_n \frac{d' X_n}{d x_i} = 0,$$

oder schliesslich, wenn für $Z$ der Ausdruck (7), für $P_i$ der Ausdruck (c) eingeführt wird:

$$\text{(d)} \qquad \frac{df}{dx_i} = 0, \quad (i = 1, 2 \cdots n),$$

sofern bei dieser vollständigen Differentiation die Grössen $X_i$ als Constanten behandelt werden.

---

*) Die Functionen $X_i$ können in Bezug auf $p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ von einander abhängen. In diesem Falle resultiren mehrere Gleichungen (7) (siehe unten Nr. 13.) oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine Gleichung der Form: $Z = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots$, und das bald anzugebende Integral der Gleichungen $F = c$, $F_i = c_i$ wäre dann durch das Gleichungssystem: $f = c$, $f_1(c_i) = 0$, $f_2(c_i) = 0, \cdots$ ausgedrückt.

Weil nun die Gleichungen (d) für alle diejenigen Werthe von $p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$, die den Gleichungen:

$$Z = F,$$
$$X_i = F_i$$

genügen, gültig bleiben, *so muss die Gleichung* (7)*):

(e) $$c = f(z x_i p_i \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}} c_1 c_2 \cdots c_n)$$

*ein gemeinsames Integral der Gleichungen*

$$Z = c, \quad X_1 = c_1, \quad X_2 = c_2, \quad \cdots \quad X_n = c_n$$

*sein.*

Wenn aber diese $n + 1$ Gleichungen ein gemeinsames erstes Integral (e) besitzen, so haben je $n$ Gleichungen derselben $\infty^1$ gemeinsame erste Integrale, je $n - 1$ derselben $\infty^2$ derartige gemeinsame und endlich irgend eine, z. B. $Z = c$ oder $F = c$ ein erstes Integral mit $n$ willkürlichen Constanten $c_1, c_2, \cdots c_n$. — W. z. b.

11. Dieser Satz lässt sich umkehren folgenderweise: *Durch irgendwelche* $n + 1$ *Gleichungen*:

$$Z = F(z x_i p_i \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_m}),$$
$$X_i = F_i(\quad),$$

*die, wenn* $Z$, $X_i$ *als Constanten betrachtet werden, ein gemeinsames erstes Integral* (7) *besitzen, ist eine Flächentransformation der oben genannten Art begründet.*

Sollen nämlich die Gleichungen $Z = F$, $X_i = F_i$ ein erstes Integral gemein haben, so müssen zunächst aus denselben die Differentialquotienten $p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ eliminirt werden können, so dass eine Gleichung**)

(7) $$Z = f(z x_i p_i \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}} X_1 X_2 \cdots X_n)$$

resultirt. Alsdann aber werden Grössen $P_1 \cdots P_n$ stets so zu bestimmen sein, nämlich $P_i = -\frac{\partial f}{\partial X_i}$, dass den Gleichungen (b) Genüge geleistet wird. Weiterhin müssen, soll die Gleichung (7) ein gemeinsames *Integral* von $Z = F$, $X_i = F_i$ darstellen, die Gleichungen (d), d. i.

$$\frac{df}{dx_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots n),$$

gerade diejenigen Werthe von $p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ geben, die für $Z = F$, $X_i = F_i$ gemeinsam sind. Also werden nun auch durch jene Werthe für $P_i$

*) Oder, wenn mehrere Gleichungen (7) resultiren, das System dieser Gleichungen. (Vgl. die vorangehende Note.)

**) Oder gelegentlich mehrere Gleichungen. Für den Fall mehrerer Gleichungen verweise ich auf die 13. Nummer.

die Gleichungen (a) befriedigt. D. h. durch die Gleichungen $Z = F$, $X_i = F_i$ ist eine Flächentransformation bestimmt, deren Gleichungen für $P_i$ heissen: $P_i = -\frac{\partial f}{\partial X_i}$, Gleichungen, die $p_{k_1 k_2 \dots k_{m+1}}$ nicht enthalten.

12. Die Transformation (5), (6) kann ebenso vollständig wie durch jene Gleichungen (5) durch die einzige Gleichung (7), die ich unter der Form schreibe:

$$f(zx_i \cdots p_{k_1 k_2 \dots k_{m-1}} X_1 X_2 \cdots X_n Z) = 0 \tag{8}$$

dargestellt werden. — Aus dieser Gleichung leitet man nämlich durch vollständige Differentiation in Bezug auf $x_i$ und $X_i$ die $2n$ Gleichungen her:

$$\frac{df}{dx_i} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial X_i} + P_i \frac{\partial f}{\partial Z} = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots n), \tag{9}$$

die in Verein mit der Gleichung (8) die Werthe von $ZX_iP_i$ in der früheren Form ergeben.

13. *Aber auch ein Gleichungssystem*:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 (zx_i p_i \cdots p_{k_1 k_2 \dots k_{m-1}} Z X_1 \cdots X_n) = 0, \\ f_2 ( \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_k ( \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ) = 0, \end{array} \right. \tag{10}$$

$$(k < n + 2)^*)$$

*giebt zu einer Flächentransformation ähnlicher Art Anlass.* Die Gleichungen derselben werden durch Elimination von $ZX\lambda$ aus (10) und den folgenden Gleichungen abgeleitet:

$$\sum_{m=1}^{m=k} \lambda_m \frac{df_m}{dx_i} = 0, \quad \sum_{m=1}^{m=k} \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial X_i} + P_i \sum_{m=1}^{m=k} \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial Z} = 0. \tag{11}$$

$$(i = 1, 2, \cdots n).$$

Die zu dieser Transformation gehörigen Gleichungen (5) besitzen insbesondere die Eigenschaft, dass das Resultat der Elimination von den Grössen $p_{k_1 k_2 \dots k_m}$ aus denselben nicht aus einer Gleichung, sondern aus $k$ Gleichungen besteht.

Dass wirklich diejenige Transformation, die in der angeführten Weise durch die Gleichungen (10) bestimmt wird, eine Flächentransformation ist, erkennt man einfach daraus, dass die Differentiale der Gleichungen (10), wenn die Substitutionen von

*) Für $k = n + 1$ kommen wir zu einer allgemeinen Transformation (A), deren $n + 1$ erste Gleichungen partielle Gleichungen $m - 1$. O. in $(zx)$ sind.

$\Sigma p_i dx_i$ statt $dz$, $\Sigma_i p_{ki} dx_i$ statt $dp_k$ u. s. w.

vorgenommen werden, wegen der Gleichungen (11), geben:

$$\Sigma P_i dX_i = dZ.$$

Hieraus schliessen wir weiter, *dass die Gleichungen* (10) *ganz beliebig zu nehmen sind.*

14. Durch die Transformationen (8), (10) werden die beiden Gebiete $(ZX)$, $(zx)$ in wesentlich derselben Weise auf einander bezogen; nur im Einzelnen ist in dieser Hinsicht ein Unterschied zwischen beiden Transformationen erkennbar.

Eine Transformation, die durch eine Gleichung (8) besimmt ist, führt jeden Punkt $(ZX)$ in eine partielle Differentialgleichung $m - 1$. Ordnung in $(zx)$ über, und also wird der Punkt $(ZX)$ in die Gesammtheit aller Integrale dieser Gleichung verwandelt. Eine Transformation dagegen, die durch $k$ Gleichungen (10) ausgedrückt wird, und die folglich einen jeden Punkt $(ZX)$ in ein System von $k$ partiellen Gleichungen $m - 1$. Ordnung in $(zx)$ verwandelt, transformirt den Punkt im Allgemeinen nicht in Flächen.

Einer Mannigfaltigkeit in $(ZX)$, die durch $r$ Gleichungen zwischen $Z$, $X_i$ dargestellt ist, wird, vermittelst einer Transformation (8), in eine partielle Differentialgleichung $m - 1$. Ordnung in $(zx)$ übergeführt, nämlich in das Umhüllungsgebilde der den Punkten der Mannigfaltigkeit entsprechenden Gleichungen (8). — Derselben Mannigfaltigkeit entspricht, bei einer Transformation (10), wenn $r + k \leq n + 2$, eine partielle Differentialgleichung $m - 1$. Ordnung, wenn $r + k > n + 2$, ein System derartiger partieller Gleichungen. *Beide Transformationen führen folglich die Flächen, Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen, immer in partielle Differentialgleichungen* $m - 1$. *Ordnung des Gebietes* $(zx)$ *über, und eine jede partielle Differentialgleichung 1. O. des* $(ZX)$ *wird daher stets in eine partielle Differentialgleichung m. Ordnung des* $(zx)$ *verwandelt; und zwar werden dies solche Gleichungen m. Ordnung, die erste Integrale zur grösstmöglichen Zahl besitzen, deren sämmtliche Integrale also Integrale von ersten Integralen ausmachen.*

Einer partiellen Differentialgleichung 2. O. in $(ZX)$ entspricht eine partielle Differentialgleichung $m + 1$. Ordnung in $(zx)$, die intermediäre *zweite* Integrale, entsprechend den Integralflächen der Gleichung 2. O., besitzt. Wenn insbesondere die Gleichung 2. O. erste Integrale zur grösstmöglichen Zahl hat, so hat die Gleichung $m + 1$. O. ebenfalls *erste* Integrale, von denen die erwähnten zweiten intermediäre Integrale ausmachen. U. s. w. Vgl. Nr. 7.

15. *Offenbar werden zwei partielle Differentialgleichungen 1. O. in* $(ZX)$, *die Integralflächen zur grösstmöglichen Zahl gemein haben, die also in Involution liegen, in zwei partielle Differentialgleichungen m. Ord-*

*nung in $(zx)$ übergeführt, die erste Integrale zur grösstmöglichen Zahl gemein haben; und umgekehrt, wenn dies mit zwei Gleichungen m. O. in $(zx)$, die zwei Gleichungen 1. O. in $(ZX)$ entsprechen, der Fall ist, so müssen letztere Gleichungen in Involution liegen.*

Hieraus folgt, dass je zwei der Gleichungen $m$. Ordnung der Transformation (5): $X_i = c_i$*), $P_k = c_k$ $\infty^{n-1}$ gemeinsame erste Integrale besitzen, falls $i$ und $k$ verschieden sind. — Dasselbe trifft für je zwei Gleichungen: $P_i = c_i$, $P_k = c_k$ ein; früher haben wir gesehen, dass dies auch von je zwei der Gleichungen $Z = c$, $X_i = c_i$, $X_k = c_k$ gilt.

16. Wenn das Gebiet $(ZX)$ der Transformation (5) durch eine Flächentransformation:

$$Z' = f(ZX_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n),$$
$$X_i' = f_i(\quad)$$

in ein anderes Gebiet $(Z'X')$ übergeführt wird, kommen die Figuren dieses neuen Gebietes und die des früheren $(zx)$ in dieselbe Beziehung zu einander, als wenn man durch die einzige Flächentransformation

$$Z' = f(FF_1 \cdots F_n \Phi_1 \cdots \Phi_n),$$
$$X_i' = f_i(\quad)$$

vom einen zum anderen Gebiete hervorgegangen wäre.

Wenn insbesondere die so gewonnene Transformation eine Transformation (5), (6) wäre, so würden, nach dem eben Erörterten, je zwei der Gleichungen $f = c$, $f_i = c_i$, $f_k = c_k$ $\infty^{n-1}$ erste Integrale gemein haben, und daher, nach dem Satze der nächstvorangehenden Nummer, je zwei der Gleichungen in $(ZX)$: $f(ZX_iP_i) = c$, $f_i(ZX_iP_i) = c_i$, $f_k(ZX_iP_i) = c_k$ zu einander involutorisch sein. Mit anderen Worten, es müsste dann die Transformation von $(ZX)$ in $(Z'X')$ eine Lie'sche Berührungstransformation sein**).

17. Als eine Consequenz dieses Satzes werde ich beweisen, *dass es keine Flächentransformation* (5), (6) *giebt, bei welcher für die Grössen $P_{k_1k_2}$ wie für die Grössen $P_i$ Ausdrücke sich ergeben können, die von den $m + 1^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $z$ frei sind.*

Denn wäre es möglich, dass vermöge einer Flächentransformation (5), (6) sich ergeben könnte:

$$P_{k_1k_2} = \Phi_{k_1k_2}(zx_i \cdots p_i \cdots p_{k_1k_2} \cdots p_{k_1k_1 \ldots k_m}),$$

so würde man durch Transformation des Gebietes $(ZX)$ vermittelst einer Flächentransformation:

---

*) D. h. $F_i(zx_ip_i \cdots p_{k_1k_2 \ldots k_m}) = c_i$ u. s. w.

**) Die Anwendung einer Flächentransformation (5), (6) auf eine andere derselben Natur giebt eine neue derartige Flächentransformation (5), (6).

$$Z' = P_1, \quad X_i' = X_i, \quad P_i' = P_{1i}, \quad (i = 1, 2, \cdots n),$$

eine Transformation erhalten:

$$\begin{aligned} Z' &= \Phi_1 (z x_i \cdots p_i \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_m}), \\ X_i' &= F_i ( \qquad\qquad ), \\ P_i' &= \Phi_{1i} ( \qquad\qquad ), \end{aligned}$$

was erstens eine Flächentransformation wäre, und alsdann nothwendig eine Flächentransformation (5), (6), denn es gehen nicht höhere Differentialquotienten von $z$ in $P_i'$ als in $Z'$, $X_i'$ ein. Aber die angewandte Transformation von $(ZX)$ in $(Z'X')$ ist keine Berührungstransformation; also ist es unmöglich, dass die erhaltene Transformation von $(zx)$ in $(Z'X')$ eine Flächentransformation (5), (6) sein kann, d. h. es ist unmöglich, dass $P_i'$ oder dass $P_{1i}$ eine Function blos von $z$, $x$, $\cdots p_i$, $\cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ sein kann. W. z. b.

18. Es giebt somit, die Lie'schen Berührungstransformationen ausgenommen, keine Flächentransformation, die die Werthesysteme $(z x_i p_i p_{k_1 k_2})$; $(Z X_i P_i P_{k_1 k_2})$ in einander überführt, auch keine, die die Werthesysteme $(z x_i p_i p_{k_1 k_2} p_{k_1 k_2 k_3})$, $(Z X_i P_i P_{k_1 k_2} P_{k_1 k_2 k_3})$ in einander verwandelt, u. s. w. — Aber eine jede eindeutige (endlich-deutige) Flächentransformation muss unendlich kleine Flächenstücke wiederum in unendlich kleine Flächenstücke übertragen. *So dass die Lie'schen Berührungstransformationen die einzigen eindeutigen (endlich-deutigen) Flächentransformationen zweier Gebiete* $(ZX)$, $(zx)$ *eines Raumes* $R_{n+1}$ *sind,* die einzigen, die eine jede Fläche des einen Gebietes in nur eine Fläche (oder in einige Flächen) des anderen Gebietes überführen, — ein Satz, den ich früher durch mehr rein geometrische Betrachtungen entwickelt habe.

## § 3.

## Anwendung des Vorangehenden auf den Raum von drei Dimensionen.

19. Ist im Raume $R_3$ eine Flächentransformation vorhanden, die keine Berührungstransformation ist:

$$(12) \qquad \begin{cases} Z = F (zxypq), \\ X = F_1 ( \quad ), \\ Y = F_2 ( \quad ), \end{cases}$$

so wissen wir aus dem anfangs Erörterten, dass dieselbe aus den Gleichungen 1. O. des Gebietes $(ZXY)$ Gleichungen 2. O. in $(zxy)$ macht, die eine specielle Gattung von Gleichungen 2. O. mit $\infty^2$ intermediären Integralen bilden. — Es kann diese specielle Gattung von Gleichungen folgendermassen anschaulich charakterisirt werden.

Die zu der Transformation (12) zugehörigen Werthe von $P$, $Q$ findet man, nach der im ersten § gegebenen Vorschrift, durch vollständige Differentiation hinsichtlich $x$, $y$ der Gleichung:

$$F - PF_1 - QF_2 = \text{Const.}$$

Fasst man die dabei auftretenden zweiten Differentialquotienten von $z$: $r$, $s$, $t$, als Coordinaten der Punkte eines Raumes $R_3'$ auf, so sieht man, dass durch die erwähnte Rechnung jedem Flächenelemente $(zxypq)$ eine von $P$, $Q$ abhängende Gerade des $R_3'$ zugeordnet wird, nämlich die durch die folgenden Gleichungen dargestellte Gerade:

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z} - P\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+p\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) - Q\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+p\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial p} - P\frac{\partial F_1}{\partial p} - Q\frac{\partial F_2}{\partial p}\right)r \\ \qquad\qquad +\left(\frac{\partial F}{\partial q} - P\frac{\partial F_1}{\partial q} - Q\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)s = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z} - P\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}+q\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) - Q\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}+q\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial p} - P\frac{\partial F_1}{\partial p} - Q\frac{\partial F_2}{\partial p}\right)s \\ \qquad\qquad +\left(\frac{\partial F}{\partial q} - P\frac{\partial F_1}{\partial q} - Q\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)t = 0. \end{cases}$$

Alle derartigen $\infty^2$, den verschiedenen Werthen von $P$, $Q$ entsprechenden Geraden bilden folglich eine Congruenz eines Complexes von geraden Linien:

$$r = ms + \mu, \quad s = mt + \nu,$$

dessen Geraden einen unendlich entfernten Kegelschnitt treffen, so dass der durch einen beliebigen Punkt bestimmte Complexkegel algebraisch folgendermassen sich ausdrückt:

$$(14)\qquad (r - r_0)(t - t_0) - (s - s_0)^2 = 0.$$

Und weil die Gleichungen (13) vom ersten Grade in $P$, $Q$ sind, muss die fragliche Congruenz durch eine in den Complex-Liniencoordinaten $m$, $\mu$, $\nu$ lineare Gleichung ausgedrückt sein, was geometrisch darauf hinauskommt*), *dass die Congruenz der Geraden* (13) *den Inbegriff aller derjenigen Geraden des vorher genannten Complexes ausmacht, die eine gewisse durch die Functionen* $F$, $F_1$, $F_2$ *bestimmte Complexlinie treffen.*

Diese Complexlinie ist übrigens dadurch ausgezeichnet, dass einem jeden ihrer $\infty^1$ Punkte $(rst)$ nicht ein Werthsystem $(PQ)$, sondern $\infty^1$ Werthsysteme entsprechen.

Betrachten wir hiernach die Gleichung $\Phi(ZXYPQ) = 0$. Derselben entspricht im Gebiete $(zxy)$ eine Figur, die aus allen denjenigen

---

*) Die Bedingung des Schneidens zweier Complexlinien $(m\,\mu\,\nu)$ $(m'\,\mu'\,\nu')$ ist nämlich

$$\mu - \mu' + m\nu' - \nu m' = 0.$$

Werthsystemen $(zxypqrst)$ zusammengesetzt ist, die den Elementen $(ZXYPQ)$ der Gleichung $\Phi = 0$ entsprechen. Es resultirt also eine Gleichung 2. O. in $(zxy)$, die jedem $(zxypq)$ einfach unendlich viele solche Schaaren von $(rst)$ zuordnet, die in $R_3'$ als Geraden der eben besprochenen Congruenz zu interpretiren sind.

Von allen diesen durch die Transformation (12) aus den partiellen Gleichungen 1. O. in $(ZXY)$ entspringenden Gleichungen 2. O. in $(zxy)$ gilt demnach als gemeinsame charakteristische Eigenschaft, *dass eine jede derselben einem jeden* $(zxypq)$ *einfach unendlich viele Schaaren von je* $\infty^1$ $(rst)$ *zuordnet, die, wenn* $r$, $s$, $t$ *als Punktcoordinaten eines* $R_3'$ *gedeutet werden, Linienflächen einer bestimmten Congruenz bilden, — nämlich Linienflächen der Congruenz derjenigen Geraden, die einen festen unendlich entfernten Kegelschnitt und zugleich eine denselben Kegelschnitt treffende Gerade schneiden.*

Wenn insbesondere es möglich ist, eine Function $\varphi(zxypq)$ zu finden, die mit $F$, $F_1$, $F_2$ involutorisch ist, mit anderen Worten, wenn die Gleichungen:

$$[F\varphi] = 0, \quad [F_1\varphi] = 0, \quad [F_2\varphi] = 0$$

eine gemeinsame Lösung $\varphi = \varphi(zxypq)$ besitzen, dann giebt es für alle Gleichungen 2. O. ein gemeinsames erstes Integral $\varphi(zxypq) = c$, indem nun die zu den letzteren Gleichungen zugehörigen $(rst)$ gerade die Punkte der eben besprochenen festen Geraden werden.

20. Durch eine Flächentransformation:

$$f(zxypqXYZ) = 0, \tag{15}$$

die andererseits ausgedrückt ist durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} Z = F\ (zxypqrst), \\ X = F_1(\quad\quad), \\ Y = F_2(\quad\quad), \\ P = \Phi_1(\quad\quad), \\ Q = \Phi_2(\quad\quad), \end{array}\right. \tag{15'}$$

wird ebenfalls jede partielle Differentialgleichung 1. O. in $(ZXY)$ in eine partielle Differentialgleichung 2. O. in $(zxy)$ mit $\infty^2$ intermediären Integralen verwandelt; aber diese Gleichungen sind, wie wir bald erkennen werden, gewissermassen die allgemeinsten ihrer Art.

Erstens bemerken wir, dass die auftretenden intermediären Integrale jener Gleichungen, da sie den Flächen oder Curven des $(ZXY)$ entsprechen sollen, nothwendig Umhüllungsgebilde zweifach oder einfach unendlich vieler der Gleichungen 1. O. (15) sein müssen. Aber ein Umhüllungsgebilde irgend welcher $\infty^2$ oder $\infty^1$ Gleichungen wird in einem beliebigen seiner Elemente $(zxypq)$ von einer dasselbe Element

enthaltenden, umhüllten Gleichung: $f(zxypq) = 0$ berührt, d. h. es müssen, wenn $\varphi(zxypq) = 0$ die Gleichung des Umhüllungsgebildes ist,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

proportional beziehungsweise

$$\frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z}$$

sein, und daher die dem Elemente $(zxypq)$ durch $\varphi = 0$ und durch $f = 0$ zugeordneten charakteristischen Richtungen und Büschel von $\infty^1$ $(rst)$ mit einander zusammenfallen. So dass durch die in Frage kommenden intermediären Integrale keine anderen Büschel von $(rst)$ den Elementen $(zxypq)$ beigelegt werden als diejenigen, die schon durch die $\infty^3$ Gleichungen 1. O. (15) zu Stande gekommen sind. Nun giebt es von diesen Gleichungen nur $\infty^2$, die ein beliebig genommenes Element $(zxypq)$ enthalten, und die von denselben herrührenden $\infty^2$ Büschel von $(rst)$ bilden sich in $R_3'$ (siehe die vorangehende Nummer) als $\infty^2$ Geraden des Complexes (14) ab. Ein jedes der genannten intermediären Integrale ordnet daher einem jeden seiner Flächenelemente $(zxypq)$ einen Büschel von $(rst)$ zu, der in $R_3'$ eine Gerade einer bestimmten Congruenz des Complexes (14) wird.

*Eine jede partielle Differential-Gleichung 2. O., die aus einer partiellen Differential-Gleichung 1. O. des $(ZXY)$ vermittelst der Transformation* (15) *hervorgegangen ist,* und die folglich intermediäre Integrale der erwähnten Art zur grösstmöglichen Zahl besitzt, die desswegen einem jeden Elemente $(zxypq)$ $\infty^1$ den Integralen zugehörige Büschel von $(rst)$ zuordnet, *wird hiernach, wenn $z, x, y, p, q$ als Constanten, $r, s, t$, wie früher, als Punktcoordinaten eines $R_3'$ aufgefasst werden, eine Linienfläche der eben erwähnten festen Congruenz darstellen.*

Es ist diese Congruenz die allgemeinste Congruenz des Complexes (14), die durch $\infty^3$ Gleichungen 1. O. begründet wird. Umgekehrt wird, wie ich unten (Nr. 28., 29.) zeigen werde, einer beliebigen Congruenz des Complexes (14) nicht eine, sondern eine ganze Classe von Transformationen (8) oder (10) entsprechen*); *durch eine Classe Transformationen des 2. § bekommt man dann aus Gleichungen 1. O. alle Gleichungen 2. O. mit der grösstmöglichen Zahl intermediärer Integrale, die im Raume $R_3'$ Linienflächen einer und derselben beliebig gewählten Congruenz des Complexes* (14) *repräsentiren.*

Die Gleichungen 2. O. einer Congruenz, die durch eine und dieselbe Transformation (15) aus den Gleichungen 1. O. hervorgehen, sind

*) Insbesondere der in vorangehender Nummer erwähnten speciellern Congruenz Transformationen (12) und aus dieser durch Berührungstransformationen herzuleitende (4).

dadurch vor den anderen derselben Congruenz zugehörenden Gleichungen ausgezeichnet, dass deren Integrale Umhüllungsgebilde von Gleichungen derselben dreifachen Schaar (15) sind.

21. Diese Gleichungen 2. O. finden ihre Lösung durch die Erledigung der entsprechenden partiellen Differential-Gleichungen 1. O., oder, wenn man so will, die Theorie dieser letzteren überträgt sich durch die Flächentransformation (15) in die Theorie jener. Um die fraglichen Gleichungen 2. O. zu lösen, kann man daher diejenigen Gleichungen 2. O. aufstellen, die zu derselben Flächentransformation gehören, wie die vorgelegte Gleichung, und deren jede mit dieser $\infty^1$ intermediäre Integrale gemein hat*). Man bekommt dann ein dem Charakteristikensysteme einer Gleichung 1. O. entsprechendes System von Mannigfaltigkeiten, zusammengesetzt aus $\infty^3$ Flächenelementen $(zxypq)$**). Ebenso wie man aus den Charakteristiken der Gleichung 1. O. die Integrale derselben bildet, setzt man aus den letztgenannten Mannigfaltigkeiten die intermediären Integrale der Gleichung 2. O. zusammen.

Unter den angegebenen Gleichungen 2. O., deren jede mit der vorgelegten Gleichung $\infty^1$ gemeinsame Integrale besitzt, kann man zwei Gleichungen auszeichnen, die ebenfalls mit einander selbst $\infty^1$ intermediäre Integrale gemein haben. Beiläufig bemerke ich, dass, unter $U_1 = c$, $U_2 = c$ diese Gleichungen verstanden, alle anderen Gleichungen der obigen Art von der Form sind

$$\varphi(U_1 U_2 U_3) = 0; \; —$$

wo $U_3 = c$ irgend eine dritte dieser Gleichungen, die von $U_1$, $U_2$ unabhängig ist, bezeichnet. —

Oder man gewinnt durch blosse Elimination von $r$, $s$, $t$ aus der anfänglichen Gleichung und den eben genannten zwei: $U_1 = c$, $U_2 = c'$ eine Gleichung, die blos von $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ abhängt. Diese Gleichung mit den zwei willkürlichen Constanten $c$, $c'$ stellt ein System von $\infty^2$ intermediären Integralen der anfänglichen Gleichung 2. O. dar. Wie mehrmals gesagt, alle anderen intermediären Integrale derselben sind als Umhüllungsgebilde je einfach unendlich vieler dieser $\infty^2$ herzuleiten, — was durch Differentiation und Elimination geschieht.

22. Einer jeden Fläche in $(ZXY)$ entspricht, wie wir schon wissen, eine partielle Differential-Gleichung 1. O in $(zxy)$. In erster Linie aber entspricht, sofern man für die Flächentransformation die Gleichungsform (15′) anwendet, einer jeden Fläche $\varphi(XYZ) = 0$, die man als blosse Punktmannigfaltigkeit betrachtet, eine partielle Diffe-

---

*) Vgl. hierzu § 4.

**) Betreffend die charakteristische Eigenschaft dieser Mannigfaltigkeiten verweise ich auf die Note der Nr. 39.

rentialgleichung 2. O. $\varphi(F_1 F_2 F) = 0$. Den Curven der Fläche entsprechen die intermediären Integrale der Gleichung, aber dieselbe hat nun ein singuläres erstes Integral, indem für jene Gleichungen $\varphi(F_1 F_2 F) = 0$ ein Umhüllungsgebilde aller $\infty^2$ Integrale einer vollständigen Lösung existirt. Dieses Umhüllungsgebilde, welches das singuläre Integral ausmacht, wird gerade diejenige partielle Differentialgleichung 1. O., die der Fläche als zweifacher Mannigfaltigkeit von Elementen $(ZXYPQ)$ entspricht.

23. Den Gleichungen 2. O. in $(ZXY)$ entsprechen Gleichungen 3. O. in $(\varepsilon xy)$, welche intermediäre zweite Integrale besitzen, die Umhüllungsgebilde zweifach bez. einfach unendlich vieler von den Gleichungen (15) sind. — *In dieser Weise bekommt man eine Classe von Gleichungen 3. O., deren jede durch eine partielle Differentialgleichung 2. O. und partielle Differentialgleichungen 1. O. ihre Lösung findet.*

Wenn insbesondere die Gleichung 2. O. des $(ZXY)$ $\infty^2$ erste Integrale hat, wird die entsprechende Gleichung 3. O. des $(\varepsilon xy)$ sowohl erste als zweite intermediäre Integrale zur grösstmöglichen Zahl besitzen. *So dass ein jedes erstes Integral einer solchen Gleichung 3. O. selbst $\infty^2$ erste Integrale hat*; die Erledigung der Gleichung 3. O. wird dann durch Gleichungen 1. O. erreicht.

Dass die ersten Integrale dieser Gleichung 3. O. Linienflächen einer und derselben Congruenz darstellen, ist eine für alle Gleichungen 3. O. mit der grösstmöglichen Zahl intermediärer Integrale gemeinsame Eigenschaft (vergl. unten Nr. 36.).

24. Von der durch zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon xypqXYZ) &= 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\quad) &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

bestimmten Flächentransformation will ich nur Folgendes bemerken.

Einem jeden Punkte $(XYZ)$ entspricht ein Gleichungspaar (16), einer jeden Curve des Gebietes $(ZXY)$, sofern man sie als blosse Punktmannigfaltigkeit betrachtet, eine einfache Schaar von Gleichungspaaren (16), — aber als Mannigfaltigkeit von $\infty^1$ Elementen-Büscheln, eine partielle Differentialgleichung 1. O., die durch Elimination von $X, Y, Z$ aus den Gleichungen (16) und den zwei Gleichungen der Curve erhalten wird; einer jeden Fläche, als Punktmannigfaltigkeit aufgefasst, entspricht eine partielle Differentialgleichung 2. O., welche die den Punkten der Fläche entsprechenden Gleichungspaare (16) zu ersten Integralen hat, die also jedem Flächenelemente $(\varepsilon xypq)$ eine Linienfläche (oder einige Flächen) *zweiten* Grades des Complexes (14) als Orte der zugehörenden Werthe von $r, s, t$ zuordnet; die singuläre Lösung dieser Gleichung 2. O., — eine partielle Differentialgleichung 1. O., die, wie aus den Gleichungen (11) der Nr. 13. ersichtlich, als

eine Art von Brennfläche der Congruenz der $\infty^2$ genannten Gleichungspaare (16) anzusehen ist, — ist die der Fläche als zweifacher Elementenmannigfaltigkeit entsprechende Figur*).

Das Gleichungspaar (16) bestimmt als Ort der zugehörenden Büschel von $(rst)$, gegeben durch die Gleichungen (11), eine gewisse Congruenz des Complexes (14). Alle Gleichungen 2. O. in $(zxy)$, die durch Transformation, vermittelst (16), aus den partiellen Differentialgleichungen 1. O. in $(ZXY)$ entspringen, repräsentiren in $R_3'$ Linienflächen, die dieser Congruenz angehören.

## II.

Die eben besprochenen Flächentransformationen, die zu partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung mit intermediären Integralen geführt haben, geben gleichzeitig das Mittel zur Darstellung dieser intermediären Lösungen durch partielle Differentialgleichungen niederer Ordnung. Dies ist schon in dem Vorangehenden bemerkt worden. Hier will ich aber zeigen, erstens wie man bei einer vorgelegten Gleichung prüfen kann, ob sie intemediäre *erste* Integrale zugiebt, oder nicht; zweitens, wie man, im Falle ihrer Existenz, dieselben immer herzuleiten vermag. Hierbei soll keine zugehörige Flächentransformation als gegeben vorausgesetzt werden; auch existirt keine solche Transformation, die die Gleichung als Resultat der Transformation einer Gleichung niederer Ordnung**) darstellte, falls jene nicht intermediäre erste Integrale *zur grösstmöglichen Anzahl* besitzt. Ich fange mit der Behandlung derjenigen partiellen Differentialgleichungen 2. O. des Raumes mit drei Dimensionen an, die $\infty^2$ erste Integrale gestatten.

### § 4.

### Ueber partielle Differentialgleichungen 2. O. mit intermediären Integralen des Raumes mit drei Dimensionen.

25. Eine partielle Differentialgleichung 2. O., die $\infty^2$ erste Integrale besitzt:

$$f(zxypq\lambda) = \mu, \tag{17}$$

*) Zwei Gleichungen $X = f(zxypqZ)$, $Y = \varphi(\quad)$ lassen der Ebene $Z = c$ eine partielle Differentialgleichung 2. O. der Form entsprechen:

$$Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E = 0,$$

wo $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ Functionen von $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ sind. Diese Gleichung hat zwei erste Integrale $f = c'$, $\varphi = c''$, entsprechend den Linien $X = c'$, $Y = c''$. Einer beliebigen Curve $\psi(XY) = 0$ der Ebene $Z = c$ entspricht das Integral $\psi(f\varphi) = 0$.

**) Die ihre Lösung in die Lösung der angenommenen Gleichung überführte.

wo $\lambda$, $\mu$ arbiträre Constanten bedeuten, ordnet jedem $(zxypq)$ die folgenden $\infty^1$ Büschel von $(rst)$ zu:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial q} s = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} t = 0; \end{aligned} \tag{18}$$

und durch Elimination von $\lambda$ zwischen diesen zwei Gleichungen sollte also die fragliche Gleichung 2. O. resultiren:

$$F(zxypqrst) = 0. \tag{19}$$

Wenn $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ als Constanten, $r$, $s$, $t$ wie früher als Punktcoordinaten eines Raumes $R_3'$ betrachtet werden, repräsentiren die Gleichungen (18) eine Gerade des Complexes (14) und *die Gleichung* (19) *eine Linienfläche dieses Complexes.*

Diese Bedingung für die Gleichung 2. O. $F=0$ kann auch so ausgesprochen werden: Weil jede Gerade des Complexes (14) durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} r &= ms + \mu, \\ s &= mt + \nu, \end{aligned} \tag{20}$$

sich darstellt, muss die Gleichung 2. O. $F = 0$, soll sie $\infty^2$ erste Integrale besitzen, wenn aus derselben vermittelst der Gleichungen (20) die Grössen $r$, $s$ entfernt werden, eine Form bekommen:

$$A(zxypqm\mu\nu) + t \cdot B(zxypqm\mu\nu) = 0$$

und also durch die zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} A(zxypqm\mu\nu) &= 0, \\ B(\qquad\qquad) &= 0, \end{aligned} \tag{21}$$

ebenso vollständig, wie durch die einzige Gleichung (19) sich ausdrücken.

Dies ist aber nur eine erste Bedingung, der die Gleichung $F=0$ mit $\infty^2$ ersten Integralen genügen muss. Zu einer zweiten ebenso nothwendigen Bedingung für diese Gleichung 2. O. wird man durch die Form (21) fast unmittelbar geführt. Schreibt man nämlich in den Gleichungen (21) für $m$, $\mu$, $\nu$ solche Werthe:

$$m = -\frac{\partial f}{\partial q} : \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \mu = -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) : \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \nu = -\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) : \frac{\partial f}{\partial p}, \tag{22}$$

dass die Gleichungen (20) von der Form der Gleichungen (18) werden, *so sollen die Gleichungen* (21) *der durch die Gleichung 2. O. $F = 0$ in Punktcoordinaten dargestellten Linienflächen, als partielle Differentialgleichungen 1. O. für $f$ aufgefasst, $\infty^2$ Lösungen*

$$f = f(zxypq\lambda) - \mu$$

*gemeinsam haben.* —

Damit ist die Gleichung $F = 0$ völlig charakterisirt. Weil das Eintreffen dieser Bedingungen durch rein algebraische Operationen zu beurtheilen ist, so wird man durch blosse Differentiation und Elimination von einer Gleichung 2. O. entscheiden können, ob dieselbe die erwähnte Eigenschaft besitzt oder nicht.

26. *Da eine jede Gleichung 2. O. der angegebenen Eigenschaft äquivalent ist einem Systeme zweier homogener partieller Gleichungen 1. O. mit den Variablen $x, y, z, p, q$ und mit $\infty^2$ gemeinsamen Lösungen, so dass die Lösungen des Systems erste Integrale der Gleichung 2. O. werden, so wird diese nach bekannten Regeln zu erledigen sein.*

Die Lösung kann dann vielleicht am besten, nach den von Lie und von Mayer ausgeführten Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen 1. O.*), folgendermassen vorgenommen werden.

Weil die Gleichungen (21), — für $m, \mu, \nu$ die Werthe (22) substituirt gedacht, — $\infty^2$ gemeinsame Lösungen: $f = f(xyzpq\lambda) - \mu$ besitzen, und solche Lösungen stets der Gleichung:

$$(AB) = 0$$

genügen, können dieselben durch das System der drei Gleichungen:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad (AB) = 0, \tag{23}$$

welche Lösungen zur grösstmöglichen Zahl gemein haben, ersetzt werden**).

Hiernach bediene man sich eines Theorems von Lie, das für den vorliegenden Fall etwa folgendermassen sich stellt. Der Schnitt der Gesammtheit aller Lösungen des Gleichungssystems (23) mit einer beliebigen durch zwei Gleichungen in $x, y, z, p, q$ dargestellten Mannigfaltigkeit im Raume von 5 Dimensionen $(xyzpq)$ macht die Gesammtheit aller Lösungen einer homogenen partiellen Differentialgleichung 1. O. mit drei Variablen aus, die durch rein algebraische Operationen aus den Gleichungen (23) und denjenigen der schneidenden Mannigfaltigkeit aufzustellen ist. Die vollständige Lösung derjenigen partiellen Differentialgleichungen 1. O., welche einer gewissen zweifachen Schaar, einem Büschel, derartiger Mannigfaltigkeiten entsprechen, giebt durch blosse Elimination der die genannte Schaar charakterisirenden arbiträren Constanten die vollständige gemeinsame Lösung der Gleichungen (23) oder (21).

Oder man bestimme diejenigen Gleichungen 1. O., die homogen vom nullten Grade sind und die mit dem Gleichungssysteme (23) $\infty^1$

*) Niedergelegt in den Gött. Nachr. 1872, in diesen Annalen Bd. V, VI, VIII; siehe insbesondere die Arbeit von Lie in diesen Annalen Bd. IX.

**) Lie führt in diesen Annalen Bd. IX, p. 277 die Bestimmung der gemeinsamen Integrale partieller Differentialgleichungen 1. O. auf die Integration eines Involutionssystems zurück.

Lösungen gemein haben, Gleichungen: $U = c$, die in Bezug auf die den drei Gleichungen (23) gemeinsamen Elemente $\left(xyzpq\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cdot\frac{\partial f}{\partial q}\right)$ die Relationen befriedigen:

$$(AU) = 0,^* \quad (BU) = 0, \quad ((AB)U) = 0^*).$$

Es giebt drei solche von einander unabhängige Gleichungen: $U = c$. Es genügt eine herzuleiten, um nachher, nach dem Lie'schen oder Mayer'schen Theoreme, durch Erledigung einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit zwei Variablen, alle Lösungen der Gleichungen (21) zu erhalten.

27. Aus einer Lösung mit zwei willkürlichen Constanten werden alle anderen Lösungen durch Differentiation und Elimination hergeleitet. Wenn insbesondere die zweifach unendlich vielen durch eine vollständige Lösung dargestellten Mannigfaltigkeiten im Raume $(xyzpq)$ ein Umhüllungsgebilde besitzen, so ist dies eine singuläre Lösung. Ein derartiges singuläres Integral der Gleichungen (23) geht durch rein algebraische Operationen aus diesen Gleichungen selbst hervor. *Das singuläre erste Integral der Gleichung 2. O. $F = 0$, die andererweise ausgedrückt ist durch* (21) *oder* (23), *muss folglich, wenn sonst ein singuläres erstes Integral stattfindet, durch Differentiation und Elimination aus dieser Gleichung selbst erhalten werden.*

28. Durch eine Gleichung zwischen den Liniencordinaten $m, \mu, \nu$:

$$A(zxypqm\mu\nu) = 0 \tag{24}$$

ist für ein jedes Werthesystem $(zxypq)$ eine Congruenz des Complexes (14) gegeben, sowie umgekehrt jede Congruenz dieses Complexes durch eine derartige Gleichung sich darstellt. Durch die Substitutionen (22) wird die Gleichung $A = 0$ in eine homogene partielle Differentialgleichung 1. O. mit den Variablen $z, x, y, p, q$ übergeführt. Die Integrale derselben sind diejenigen Gleichungen 1. O. in $(zxy)$ deren zugehörige Büschel von $(rst)$ im Raume $R_3'$ als Gerade der Congruenz sich abbilden.

Eine vollständige Lösung enthält vier arbiträre Constanten. Irgend dreifach unendlich viele der Integrale genügen ausser $A = 0$ einer zweiten Gleichung $\varphi = 0$, die mit jener involutorisch liegt. Es giebt sieben von einander unabhängige Lösungen: $\varphi = C$ der linearen Gleichung:

---

*) Ein Integral dieses Systems ist durch *vier* Gleichungen:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad (AB) = 0, \quad U = c$$

ausgedrückt. — Die Integration geschieht nach dem oben citirten Lie'schen Satze, der für diesen Fall mit einem gleichzeitig von Mayer (Gött. Nachr. 1872; diese Annalen Bd. V) aufgestellten identisch ausfällt. Da es sich nur um die Auffindung *eines* Integrals handelt, wird man der Mayer'schen Methode sich zu bedienen haben. —

(25) $$\nabla(A\varphi) = 0,$$

die *homogen vom nullten Grade* sind, und eine jede dieser Lösungen $\varphi = 0$ hat mit $A = 0$ dreifach unendlich viele Integrale gemeinsam, und dies sind partielle Differentialgleichungen 1. O.: $f(zxypq) = 0$, deren zugehörige Büschel von $(rst)$, als Geraden in $R_3'$ interpretirt, alle Geraden der angegebenen Congruenz (24) erfüllen.

Handelt es sich darum, partielle Differentialgleichungen 2. O. aufzustellen, die $\infty^2$ erste Integrale haben und die Linienflächen der Congruenz (24) repräsentiren, so darf man beliebig eine Lösung nullten Grades von (25) nehmen:

$$\varphi = 0,$$

sodann eine weitere Lösung nullten Grades: $\psi = 0$ derselben Gleichung, die ausserdem die Gleichung befriedigt:

$$(\varphi\psi) = 0.$$

Wenn schliesslich aus $\varphi = 0$, $\psi = 0$, vermittelst (22), die Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x}, \cdots \frac{\partial f}{\partial q}$ eliminirt werden, so resultirt eine neue Gleichung:

$$B(zxypqm\mu\nu) = 0,$$

die in Verbindung mit (24) die einer Gleichung 2. O. der genannten Art zugehörige Linienfläche darstellt, und also die Gleichung 2. O. selbst giebt.

In der That, es haben $A = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ $\infty^2$ Integrale gemein, also ist dies auch mit

$$A = 0, \quad B = 0$$

der Fall, wenn sie als partielle Gleichungen 1. O. aufgefasst werden. Diese Integrale sind gerade erste Integrale derjenigen partiellen Differentialgleichung 2. O., die durch Elimination von $m$, $\mu$, $\nu$ aus jenen Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ und den beiden folgenden:

$$r = ms + \mu, \quad s = mt + \nu$$

resultirt.

*In dieser Weise bekommt man alle Gleichungen 2. O. mit $\infty^2$ intermediären Integralen, deren zugehörige Linienflächen der übrigens beliebig genommenen Congruenz* (24) *des Complexes* (14) *angehören.*

29. Die der Congruenz (24) zugehörenden Gleichungen 2. O. ordnen sich nach ihrer Entstehungsweise in Gruppen, entsprechend den verschiedenen Integralen nullten Grades der Gleichung (25)*). Eine jede der Gleichungen 2. O. der Congruenz gehört dabei immer zwei ver-

*) Es bilden, wohl zu bemerken, die Integrale nullten Grades keine Gruppe in der von Lie eingeführten Bedeutung (diese Annalen Bd. VIII).

schiedenen Gruppen an. So gehört die oben bestimmte Gleichung 2. O. sowohl der durch $\varphi = 0$ als der durch $\psi = 0$ bestimmten Gruppe, neben allen den durch $F(\varphi\psi) = 0$*) bestimmten an. Wie man insbesondere alle Gleichungen einer Gruppe der Congruenz (24), z. B. die der Gruppe

(26) $$A = 0, \quad \varphi = 0, \quad \text{wo } (A\varphi) = 0,$$

zu bilden hat, ist aus dem Vorangehenden einleuchtend. Man bestimme alle Gleichungen nullten Grades: $\psi = C$, die gemeinsame Lösungen des vollständigen Systems

(27) $$(A\psi) = 0, \quad (\varphi\psi) = 0$$

sind, — und einfach durch Elimination werden darnach die fraglichen Gleichungen gewonnen. Nun giebt es fünf von einander unabhängige Lösungen $\psi = C$ nullten Grades, und dies führt durch Elimination von $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cdot \frac{\partial f}{\partial q}$ vermittelst $\varphi = 0$ und der Gleichungen (22) zu fünf von einander unabhängigen Gleichungen in $m, \mu, \nu$:

$$B_1(zxypqm\mu\nu) = C, \; B_2 = C, \; \cdots \; B_5 = C.$$

*Die Gleichungen 2. O. der Gruppe* (26) *sind daher sämmtlich durch ein Gleichungspaar:*

$$A = 0, \quad F(B_1 B_2 \cdots B_5) = 0$$

*bestimmt.*

30. Unter den Integralen $\psi$ werde beliebig eins herausgenommen: $\psi_1 = C$. Es wird dann immer drei andere Integrale $\psi$ geben: $\chi_1 = C$, $\chi_2 = C$, $\chi_3 = C$, die mit $\psi_1 = C$ involutorisch liegen. Sie geben, durch Elimination von $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cdot \frac{\partial f}{\partial q}$ vermittelst $\varphi = 0$ und (22), drei Gleichungen in $m, \mu, \nu$:

$$U_1 = C, \quad U_2 = C, \quad U_3 = C,$$

*deren jede, im Verein mit* $A = 0$, *eine der Gruppe zugehörige Gleichung 2. O. darstellt, die mit der Gleichung 2. O.:* $A = 0$, $B_1 = C$ $\infty^1$ *erste Integrale gemein hat.*

Ich erinnere kurz daran, dass dieses Problem bezüglich der Gleichung (19) schon am Ende der 26. Nummer erledigt worden ist.

31. Nehmen wir von den Integralen $\chi$ beliebig eins heraus: $\chi_1 = C$. Man findet unter den übrigen Integralen $\chi$ ein Integral: $\varpi = C$, das mit $\chi_1 = C$ involutorisch liegt. Dies geht durch die mehrmals gebrauchte Elimination von $\frac{\partial f}{\partial x}$ etc. aus $\varphi = 0$ und (22) in eine Gleichung in $m, \mu, \nu$: $V = C$ über. In Verein mit $A = 0$ bestimmt sie eine Gleichung 2. O. und *die drei Gleichungen 2. O.*

---

*) Wenn $F(\varphi\psi)$ so beschaffen ist, dass, wenn $\varphi$ oder $\psi$ gleich Null gesetzt wird, die Gleichung $F = 0$ $\psi$ bez. $\varphi$ gleich Null giebt.

$$A = 0, \quad B_1 = C; \quad A = 0, \quad U_1 = C; \quad A = 0, \quad V = C$$

*bilden in dem Sinne ein Involutionssystem, dass je zwei derselben* $\infty^1$ *erste Integrale und dass alle drei ein erstes Integral gemeinsam haben.*

32. Aus diesen Entwickelungen folgt eine kanonische Form aller Gleichungen 2. O. der Gruppe (26), entsprechend einer kanonischen Form der Integrale *nullten Grades* von (27). Man nehme beliebig heraus ein Integral; ich bezeichne es kurz mit $X = C$, unter den mit diesem Integrale involutorischen wiederum beliebig eins: $Y = C$ und ein zweites $Z = C$, das nicht nur mit $X = C$ sondern auch mit $Y = C$ involutorisch liegt; es bleibt dann übrig ein Integral $Q = C$, das nur zu $X = C$ in Involutionsbeziehung steht. Das sind vier Integrale, als das fünfte nehmen wir dasjenige von $X$, $Z$ unabhängige dritte Integral: $P = C$, das mit $Y = C$ und auch mit $Q = C$ involutorisch ist.

*Alle Gleichungen 2. O. der Gruppe sind darum von der Form:* $F(ZXYPQ) = 0$, *wo* $X = C$, $Y = C$, $Z = C$, $P = C$, $Q = C$ *Gleichungen 2. O. bedeuten, die zu einander in der am Ende der* 15. *Nummer angegebenen Beziehung stehen.*

Darum wird, wenn $x', y', z', p', q'$ die den $x, y, z, p, q$ entsprechenden Grössen eines Raumes $r'$ bezeichnen, durch die Gleichungen:

$$x' = X, \quad y' = Y, \quad z' = Z, \quad p' = P, \quad q' = Q$$

eine Flächentransformation begründet. — *Alle diejenigen Flächentransformationen, die man in dieser Weise aus einer und derselben Gruppe* (26) *einer gegebenen Congruenz* (24) *bekommen kann, gehen aus einer beliebigen derselben durch Anwendung aller Berührungstransformationen des Raumes* $r'$ *hervor.*

33. Dies würde man auch in folgender anderen Weise aussprechen können: *Eine jede vollständige Lösung mit drei willkürlichen Constanten* $X, Y, Z$ *des Gleichungssystems* (26) *einer Gruppe begründet immer, wenn die Constanten als Coordinaten der Punkte eines Raumes* $R$ *betrachtet werden, eine Flächentransformation der beiden Räume* $R$ *und* $(xyz)$.

*Die Flächentransformationen des* § 2. *fallen also schliesslich für* $n = 2$ *und* $p_{k_1 k_2 \ldots k_m} = r$, $s$ *oder* $t$, *mit denjenigen Transformationen identisch aus, vermöge deren, — wie in der* 14. *Nummer meiner Abhandlung über Flächentransformationen in diesen Annalen Bd. IX. p.* 316, *auseinandergesetzt ist, — das Gleichungssystem* (26) *der Gruppe auf den Raum mit drei Dimensionen zu beziehen ist.*

34. Eine ähnliche Form kann den Gleichungen der verschiedenen Gruppen der Congruenz zuertheilt werden. Sie geht durch die in meinem erwähnten Aufsatze beschriebene Abbildung der partiellen Differentialgleichung 1. O. $A = 0$, die die Congruenz darstellt, auf den Raum $R_4$ hervor; oder in a. W., sie wird aus einer Berührungstransformation des Raumes $R_5$, die $X_5 = A$ als eine ihrer Gleichungen hat, hergeleitet.

Die Integrale *nullten* Grades der Gleichung (25) können so durch folgende sieben Integrale begründet werden:

$$Z = c, \quad X_1 = c, \quad X_2 = c, \quad X_3 = c, \quad P_1 = c, \quad P_2 = c, \quad P_3 = c,$$

die zu einander in den bekannten Beziehungen stehen:

$$(ZX_i) = 0, \quad (X_iX_k) = 0, \quad (P_iP_k) = 0 \text{ etc.},$$

(wo $Z = c \cdots P_3 = c$ partielle Differentialgleichungen 1. O. im Raume $R_5\,(xyzpq)$ vorstellen, *die homogen vom nullten Grade sind*).

Eine beliebige Gruppe ist sodann durch eine Gleichung:

$$\Phi\,(ZX_1X_2X_3P_1P_2P_3) = 0$$

ausgedrückt; irgend zwei Gruppen, die durch involutorische Gleichungen dargestellt sind, z. B. die Gruppen:

$$A = 0, \quad X_1 = 0; \quad A = 0, \quad X_2 = 0$$

besitzen eine partielle Differentialgleichung 2. O. der gegebenen Congruenz gemeinsam.

Beiläufig bemerke ich noch, dass die involutorische Beziehung zweier Gruppen:

$$F\,(ZX_1X_2X_3P_1P_2P_3) = 0,$$
$$\Phi\,(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0$$

durch die Gleichung:

$$[F\Phi]_{XP} = 0$$

auszudrücken ist.

35. Die vollständige Lösung einer Gruppe kann nach Umständen durch *eine* Gleichung:

(a) $$f\,(zxypq\,XYZ) = 0$$

oder durch *zwei* Gleichungen:

(b) $$f\,(zxypq\,XYZ) = 0, \quad \varphi\,(zxypq\,XYZ) = 0$$

oder endlich durch ein System *dreier* Gleichungen:

(c) $$f\,(zxypq\,XYZ) = 0, \quad \varphi\,(zxypq\,XYZ) = 0, \quad \psi\,(zxypq\,XYZ) = 0$$

gegeben sein. Die Möglichkeit des einen oder anderen Falls wird man einfach aus der reducirten Gleichung 1. O. in vier Variablen, auf welche nach dem in der 26. Nummer erwähnten Lie'schen Theoreme die Lösung des Gleichungssystems (26) herauskommt, erschliessen*). Es sind die Fälle (a), (b) im Vorangehenden erörtert worden. Im Falle (c) muss die Congruenz $A = 0$ durch eine in den Complexliniencoordinaten lineare Gleichung sich darstellen lassen können. Eine lineare

*) Indem diese Gleichung eine Lösung der nämlichen Form gestatten soll. — Auf solche durch zwei, drei ··· Gleichungen ausgedrückten Lösungen einer partiellen Gleichung 1. O. ist zuerst von Lie aufmerksam gemacht worden. (Vergl. dessen Note in Gött Nachr. 1872, Nr. 25.)

Gleichung scheidet aber diejenigen Complexlinien aus, die eine und dieselbe feste Complexlinie treffen. Man hat nun auch eine Flächentransformation der 19. Nummer vor sich, die, wie daselbst gezeigt, stets einer solchen Congruenz zugehören muss.

36. Wir sind im vorangehenden Paragraphen vermittelst Flächentransformationen auf Gleichungen 3. O. gekommen, die erste und zweite Integrale zur grösstmöglichen Zahl besitzen. Die ersten Integrale einer solchen Gleichung 3. O. machen eine derartige Schaar von zweifach unendlich vielen Gleichungen 2. O. mit $\infty^2$ ersten Integralen aus, von denen je $\infty^1$ Gleichungen ein Umhüllungsgebilde haben, das ebenfalls eine Gleichung 2. O. mit $\infty^2$ ersten Integralen bedeutet. Von solchen Gleichungsschaaren habe ich schon behauptet, dass die Gleichungen einer jeden derselben einer und derselben Congruenz zugehören müssen, und die Richtigkeit dieser Behauptung werde ich jetzt bestätigen.

Eine zweifach unendliche Schaar von Gleichungen 2. O. mit $\infty^2$ ersten Integralen würde immer einem beliebigen Elemente $(zxypq)$ $\infty^2$ Linienflächen zuordnen, und falls das Umhüllungsgebilde von je $\infty^1$ der Gleichungen eine Gleichung 2. O. derselben Eigenschaft darstellt, sollte eine jede der besprochenen Linienflächen eine jede der $\infty^1$ ihr unendlich benachbarten Flächen nach einer gemeinsamen Erzeugenden (oder einigen gemeinsamen) schneiden. — Fassen wir für den Augenblick die Complexliniencoordinaten $m$, $\mu$, $\nu$ als Punktcoordinaten und demnach die Linienflächen des Complexes (14) als Curven auf. Die den erwähnten $\infty^2$ Linienflächen entsprechenden $\infty^2$ Curven sollen dann in derjenigen Beziehung zu einander stehen, dass eine jede Curve derselben alle ihr $\infty^1$ unendlich benachbarten Curven der zweifachen Schaar schneidet. Was darauf hinauskommt, dass eine jede Curve der Schaar auf der Brennfläche dieser Schaar gänzlich verlaufen muss, — so dass jene $\infty^2$ Curven auf einer und derselben Fläche gelegen sind. — Uebertragen wir dies auf den Linienraum des Complexes (14); wir erkennen dann, dass die oben besprochenen Linienflächen, sollen sie in der genannten Weise mit einander verbunden sein, Linienflächen einer und derselben Congruenz des Complexes (14) ausmachen, *dass also jene zweifach unendlich vielen Gleichungen 2. O. mit $\infty^2$ ersten Integralen zu einer und derselben Congruenz gehören müssen.*

Dies ist für Gleichungsschaaren, wie sie hier in Rede stehen, eine nicht nur nothwendige, sondern auch hinreichende Bedingung. Denn es soll im Allgemeinen irgend eine in der fraglichen zweifachen Schaar enthaltene einfache zu einer Gruppe der Congruenz gehören, und also mögen die Gleichungen der einfachen Schaar durch eine Gleichung:

$$F(ZXYPQa) = 0$$

($a$ einen variablen Parameter bezeichnend) sich darstellen lassen. Aber das Umhüllungsgebilde dieser Gleichungsschaar drückt genau diejenige partielle Differentialgleichung 2. O. aus, die das Umhüllungsgebilde jener Schaar von Gleichungen 2. O. ausmacht. Nun ist das genannte Umhüllungsgebilde durch eine Gleichung $\Phi(ZXYPQ) = 0$ repräsentirt, und besitzt also $\infty^2$ erste Integrale (Nr. 32.).

---

37. Durch eine beliebige Gleichung 2. O. wird jedem $(zxypq)$ eine zweifache Mannigfaltigkeit von $(rst)$ zugeordnet. Also, wenn die frühere Repräsentation von $r$, $s$, $t$ als Punktcoordinaten eines $R_3'$ beibehalten wird, jede Gleichung 2. O. stellt im $R_3'$ — wenn $z$, $x$, $y$, $p$, $q$ als Constanten betrachtet werden — eine Fläche dar. Falls die Gleichung 2. O. $\infty^1$ erste Integrale gestattet, so muss eine jede der den verschiedenen Werthen von $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ entsprechenden Flächen eine Gerade des Complexes (14) enthalten, und wenn diese Gerade durch die Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} f(zxypqm\mu\nu) = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad) = 0, \\ \psi(\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

dargestellt wird, so werden dieselben, — verwandelt durch die Substitutionen (22) in partielle Differentialgleichungen 1. O., — eine gemeinsame Lösung:

$$f = f(zxypq) + C$$

besitzen. Die Gleichung $f = C$ wird die supponirte Schaar der ersten Integrale darstellen.

Durch blosse Elimination von $r$, $s$, $t$ zwischen einer vorgelegten Gleichung 2. O.:

$$\text{(b)} \qquad F(zxypqrst) = 0$$

und den Gleichungen:

$$\text{(c)} \qquad r = ms + \mu, \quad s = mt + \nu$$

entscheidet man, ob die Fläche $F = 0$ eine Complexgerade enthält. Wenn dies eintreffen sollte, so werden bei der Elimination (höchstens) drei Gleichungen (a) auftreten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine Gleichung der Form:

$$f + t\varphi + t^2\psi = 0\ ^*).$$

Durch Differentiation und Elimination erledigt sich hernach die zweite Frage, ob die Gleichungen (a) eine gemeinsame Lösung mit

---

*) Giebt jene Elimination nur zwei Gleichungen, so wird man bekanntlich, indem man sie durch (22) in partielle Differentialgleichungen 1. O. verwandelt, durch blosse Differentiation und Elimination von der Existenz einer gemeinsamen Lösung mit einer arbiträren Constanten zu entscheiden haben.

einer arbiträren Constanten zulassen. Thun sie dies, so hat man durch das früher erwähnte Theorem von Lie die Gleichungen (a) durch eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung in zwei Variablen [und mit drei willkürlichen Parametern] zu ersetzen, — was wiederum durch rein algebraische Operationen geschieht. *Die Lösung dieser Differentialgleichung in zwei Variablen wird, durch eine einfache Elimination der willkürlichen Parameter, in die fragliche Lösung der Gleichungen* (a) *übergeführt, — die gerade eine erste Integralschaar der vorgelegten Gleichung 2. O. darstellt.*

38. Die Gleichung 2. O. (b) besitzt möglicherweise nur ein erstes Integral (oder einige erste Integrale). In diesem Falle würde die Elimination zwischen (b) und (c) höchstens vier Gleichungen*):

$$\begin{aligned} f(zxypqm\mu\nu) &= 0, \\ \varphi(\quad\quad\quad) &= 0, \\ \psi(\quad\quad\quad) &= 0, \\ \chi(\quad\quad\quad) &= 0 \end{aligned}$$

geben, und dann weiter durch Elimination von $m$, $\mu$, $\nu$ aus denselben das erste Integral resultiren. — Geometrisch kommt dies darauf hinaus, dass von den $\infty^5$ Flächen (b) des $R_3'$ nur $\infty^4$ Flächen eine Gerade des Complexes (14) enthalten, und dass die Parameter $(zxypq)$ dieser Flächen zu einer partiellen Differentialgleichung 1. O. sich zusammenfassen, die eine Lösung der Gleichung 2. O. (b) wird.

Den Inhalt dieser und der vorangehenden Nummer sammt der Nr. 26. fassen wir in folgenden Satz zusammen:

*Durch rein algebraische Operationen wird man immer entscheiden können, ob eine vorgelegte Gleichung 2. O. erste Integrale hat, oder nicht. Finden sich $\infty^2$ solche, so werden dieselben* (Nr. 26.) *durch eine homogene partielle Differentialgleichung 1. O. in drei Variablen bestimmt; wenn es nur $\infty^1$ giebt, werden sie durch eine gewöhnliche Differentialgleichung in zwei Variablen hergeleitet; wenn schliesslich erste Integrale nur in endlicher Zahl existiren, gehen dieselben durch rein algebraische Operationen hervor.*

39. Wenn durch die öfter erwähnte Elimination von $r$, $s$, $t$ die Gleichung 2. O. in zwei Gleichungen:

*) Ist die Anzahl der Gleichungen nur drei oder zwei, so wird man, indem man durch (22) dieselben in partielle Differentialgleichungen 1. O. verwandelt, immer durch Differentiation und Elimination entscheiden, ob dieselben eine gemeinsame Lösung gestatten, oder nicht, sowie im Falle der Existenz nur einer Lösung, durch rein algebraische Operationen eine bez. zwei weitere durch dieselbe Lösung zu erfüllende Gleichungen herleiten können, aus denen sodann durch bloße Elimination die Lösung hervorgeht.

$$F(zxypqm\mu\nu) = 0,$$
$$\Phi(\quad\quad\quad) = 0$$

zerfällt, also die Gleichung 2. O., — wenn $r, s, t$ als Punktcoordinaten betrachtet werden, — eine Linienfläche darstellt, und jene zwei Gleichungen, durch (22) in partielle Differentialgleichungen 1. O. übgeführt, keine gemeinsame Lösung gestatten, so dass die Gleichung 2. O. kein erstes Integral besitzt, so kann man immer in folgender Weise eine besondere Integralschaar der Gleichung 2. O. finden.

Zunächst wende ich, statt der früheren Complexliniencoordinaten $m, \mu, \nu$, vier homogene $m, n, \mu, \nu$ an, in denen die Gleichungen der Complexlinien die Form:

$$mr + ns + \mu = 0, \quad ms + nt + \nu = 0$$

erhalten. Die fragliche Gleichung 2. O. drückt sich alsdann durch zwei Gleichungen aus:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} F(zxypqmn\mu\nu) &= 0, \\ \Phi(\quad\quad\quad) &= 0, \end{aligned}$$

die homogen in $m, n, \mu, \nu$ sind.

Nach der gemachten Voraussetzung giebt es kein erstes Integral der Gleichung 2. O., d. i. keine gemeinsame Lösung der Gleichungen (a), wenn dieselben in partielle Gleichungen 1. O. durch die Substitutionen:

$$m = \frac{\partial f}{\partial p}, \quad n = \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \mu = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \nu = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}$$

verwandelt werden. Führt man dagegen für die Complexliniencoordinaten die folgenden Ausdrücke ein:

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} m = \dfrac{\partial f}{\partial p} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial p}, \\ n = \dfrac{\partial f}{\partial q} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial q}, \\ \mu = \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + p\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \\ \nu = \dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + q\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \end{cases}$$

so werden die Gleichungen (a) in zwei Gleichungen zwischen $\lambda$ und den ersten Differentialquotienten von $f$, $\varphi$ übergeführt, so dass eine Elimination von $\lambda$ zu einer Gleichung zwischen $x, y, z, p, q$ und den ersten Differentialquotienten von $f$, $\varphi$ Anlass giebt. Sei

$$\text{(c)} \qquad \Omega\left(zxypq\left[\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right]\cdots\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) = 0$$

diese Gleichung. Wird für $f$ beliebig eine Function $f(zxypq)$ gesetzt, so geht diese Gleichung (c) in eine partielle Differentialgleichung 1. O. für $\varphi$ über, und eine jede Lösung $\varphi = \varphi(zxypq)$ derselben bestimmt

dann in Verein mit der voran genommenen Functionsform $f$ einen ganz bestimmten Werth von $\lambda$ in $x, y, z, p, q$. Diese Ausdrücke für $f, \varphi, \lambda$, eingesetzt in (b), liefern für $m, n, \mu, \nu$ gewisse Werthe in $x, y, z, p, q$, die ihrerseits eine Schaar von Streifen bestimmt:

(d) $dx = \varkappa \cdot m,\ dy = \varkappa \cdot n,\ dz = p\,dx + q\,dy,\ dp = -\varkappa \cdot \mu,\ dq = -\varkappa \cdot \nu$

($\varkappa$ einen Proportionalitätsfactor bezeichnend), welche die durch den folgenden Satz ausgedrückte Eigenschaft besitzen:

*Da im Allgemeinen durch einen Streifen nur eine Integralfläche einer partiellen Differentialgleichung 2. O. hindurchgelegt werden kann, so gehen dagegen durch einen jeden Streifen der genannten Schaar* (d) *unbegrenzt viele Integralflächen derjenigen partiellen Gleichung 2. O., die in homogenen Complexliniencoordinaten $m, n, \mu, \nu$ durch die zwei Gleichungen* (a) *dargestellt ist.*

Es bilden sich nämlich alle die $\infty^1$ Werthe von $r, s, t$, die einem Elemente eines Streifens (d) angehören, und die also die Gleichungen erfüllen:

$$dp = r\,dx + s\,dy,\quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

oder die damit äquivalenten:

$$mr + ns + \mu = 0,\quad ms + nt + \nu = 0,$$

als Punkte einer Erzeugenden der Linienfläche (a) ab, und sie gehören daher der vorgelegten Gleichung 2. O. an. Die durch einen Streifen gelegte Integralfläche wird aber durch diejenigen Werthe von $r, s, t$ und diejenigen Werthe der dritten, vierten · · · Differentialquotienten von $z$ in Bezug auf $x, y$, die gleichzeitig dem Streifen und der Gleichung 2. O. genügen, bestimmt. Im Allgemeinen giebt es, wie eine blosse Abzählung der anzuwendenden Gleichungen lehrt, nur ein solches Werthsystem*) von $r, s, t$, von den dritten Differentialquotienten von $z$ u. s. w., — dann auch nur eine durch den Streifen hindurchgehende Integralfläche. Wenn man unendlich viele Werthsysteme von $r, s, t$ oder von den dritten Differentialquotienten von $z$ bekommt, so hat man unendlich viele, den Streifen enthaltende Integralflächen. Im obigen Falle hat man nun $\infty^1$ Werthsysteme von $r, s, t$, die dem Streifen und der Gleichung 2. O. (a) gleichzeitig angehören. Hieraus fliesst der obige Satz.

Unter den Curven einer Integralfläche einer partiellen Differentialgleichung 2. O. zeichnen sich bekanntlich zwei Schaaren aus (die auch zusammenfallen, sowie imaginär sein können), nach denen die Integralfläche mit unendlich vielen anderen Integralflächen eine Berührung zweiter Ordnung, eine Osculation, eingeht. Ein jedes, der Gleichung 2. O. zugehöriges ($zxypqrst$) bestimmt zwei Richtungen ($dx\ dy\ dz$), die derartigen Osculationscurven angehören, — die sogenannten *charakte-*

*) Oder einige solche Werthsysteme.

*ristischen Richtungen**). *Im Falle einer Gleichung 2. O.* (a), *und nur in diesem Falle, wird die eine dieser Richtungen Streifen zukommen, längs deren unendlich viele Integralflächen eine Berührung der ersten Ordnung mit einander besitzen.*

Eine Gleichung 2. O., die nicht für ein jedes ihrer $(zxypqrst)$ eine Richtung eines Streifens der *letzten* Art giebt, kann auch nicht durch zwei Gleichungen (a) repräsentirt werden. Es müssen nämlich, falls die Gleichung 2. O. einen solchen Berührungsstreifen haben soll, die zu den Elementen $(zxypq)$ des Streifens zugeordneten Büschel von $(rst)$ gänzlich der Gleichung angehören.

Die Schaar der Berührungsstreifen (d) bildet die oben gemeinte Schaar besonderer Integrale der Gleichung 2. O. (a). Sie sind deswegen als Integrale zu bezeichnen, weil in der That ein jeder derselben eine Reihe von zweifach unendlich vielen der Gleichung 2. O. zugehörenden $(zxypqrst)$, deren jedes $(zxypqrst)$ mit allen ihm unendlich benachbarten vereinigt liegt, — nämlich eine Reihe von $\infty^1$ zu je zweien unendlich benachbarten vereinigt liegenden Büscheln von $(zxypqrst)$ ausmacht.

40. Wenn einer der besprochenen Berührungsstreifen (d) ein Streifen einer bestimmten Gleichung

$$f(zxypq) = C_0$$

ist, so muss sein:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) m + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) n - \frac{\partial f}{\partial p}\mu - \frac{\partial f}{\partial q}\nu = 0,$$

oder, wenn die Werthe von $m$, $n$, $\mu$, $\nu$ eingeführt werden: so muss hinsichtlich der Elemente des Streifens die Relation statthaben:

(e) $$[f\varphi] = 0.$$

Diese Gleichung kann nun auch in der Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial p}dp + \frac{\partial \varphi}{\partial q}dq = 0,$$

*) Wie diese Theorie für Gleichungen 2. O. mit $\infty^2$ ersten Integralen sich gestaltet, soll hier kurz angegeben werden. Sei eine solche Gleichung 2. O. vorgelegt. Auf einer beliebigen Integralfläche eines ersten Integrals $f = 0$ giebt es zwei Schaaren von derartigen charakteristischen Streifen, von denen die eine aus Berührungsstreifen mit Integralflächen desselben Integrals $f = 0$, aus Charakteristiken von $f = 0$, besteht, die andere dagegen aus Streifen, deren jeder zugleich einer derartigen dreifachen Elementenmannigfaltigkeit angehört, die (Nr. 21.) die transformirte Figur einer Charakteristik von der, der Gleichung 2. O. entsprechenden Gleichung 1. O., in $(ZXY)$ bildet. Ein jeder dieser Streifen ist ein *Osculations*streifen mit unendlich vielen anderen Integralflächen, die aber in anderen ersten Integralen als $f = 0$ enthalten sind. Sie gehören nämlich denjenigen ersten Integralen an, die das erste Integral $f = 0$ längs einer den Streifen enthaltenden dreifachen Elementenmannigfaltigkeit berühren.

für $dx \cdots dq$ die dem Streifen zugehörigen Werthe (d) gesetzt, — *und also muss der hier betrachtete Streifen zugleich ein Streifen einer Gleichung:*

$$\varphi = C_0$$

*sein.* Hieraus folgt weiterhin, dass, wenn die Gleichung $f = C_0$ mit der Gleichung 2. O. (a) eine Integralfläche gemeinsam hat, dieselbe auch eine Integralfläche einer Gleichung $\varphi = C_0$ ist; dass daher das Problem der Bestimmung der Integralflächen der Gleichung 2. O. (a) äquivalent ist dem Probleme der Bestimmung von Lösungen:

$$f = C, \quad \varphi = C$$

des Gleichungspaares:

(c)(e) $$\Omega = 0, \quad [f\varphi] = 0. \; —$$

Auf ein derartiges Problem lässt sich auch das allgemeinere von der Integration einer beliebigen partiellen Differentialgleichung 2. O. zurückbringen. Durch Elimination von $r$, $s$, $t$ zwischen der Gleichung 2. O. und den vier folgenden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial q}s = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}s + \frac{\partial f}{\partial q}t = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}r + \frac{\partial \varphi}{\partial q}s = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}s + \frac{\partial \varphi}{\partial q}t = 0;$$

ergeben sich nämlich zwei Gleichungen*):

$$V\left(zxypq\left[\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right]\cdots\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) = 0, \quad [f\varphi] = 0.$$

Die gemeinsamen Integralflächen zweier Lösungen $f = C$ $\varphi = C$ werden Integrale der Gleichung 2. O.

## § 5.

### Ueber diejenigen Gleichungen 2. und 3. O. des $R_3$, die ein erstes Integral von der Form: eine arbiträre Function von $(f_1, f_2) = 0$, besitzen.

41. Die partielle Differentialgleichung 2. O., die ein erstes Integral:

$$\varphi(f_1 f_2) = 0$$

($\varphi$ willkürlich, $f_1$, $f_2$ determinirte Functionen von $x, y, z, p, q$) besitzt, ordnet jedem $(zxypq)$ die folgenden $\infty^1$ Büschel von $r$, $s$, $t$ zu:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + p\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda\left[\frac{\partial f_2}{\partial x} + p\frac{\partial f_2}{\partial z}\right] + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p} + \lambda\frac{\partial f_2}{\partial p}\right)r + \left(\frac{\partial f_1}{\partial q} + \lambda\frac{\partial f_2}{\partial q}\right)s = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} + q\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda\left[\frac{\partial f_2}{\partial y} + q\frac{\partial f_2}{\partial z}\right] + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p} + \lambda\frac{\partial f_2}{\partial p}\right)s + \left(\frac{\partial f_1}{\partial q} + \lambda\frac{\partial f_2}{\partial q}\right)t = 0.$$

$$\left(\lambda = \frac{\varphi'(f_2)}{\varphi'(f_1)}\right).$$

*) Dies gilt nur für Gleichungen 2. O. mit *zwei* unabhängigen Variablen.

Also kommt, wenn $r$, $s$, $t$ als Punktcoordinaten des $R_3'$ betrachtet werden, zu jedem $(zxypq)$ eine Linienfläche des Complexes (14), deren Gleichung in den in der vorigen Nummer angewandten homogenen Complexlinniencoordinaten $m$, $n$, $\mu$, $\nu$ durch Elimination von $\varrho$, $\lambda$ aus den folgenden Gleichungen sich darstellt:

$$(28)\quad m=\varrho m_0+\lambda m_1,\ n=\varrho n_0+\lambda n_1,\ \mu=\varrho\mu_0+\lambda\mu_1,\ \nu=\varrho\nu_0+\lambda\nu_1.$$

Die so entstandene Linienfläche ist eine Linienfläche des *zweiten* Grades. Weil sie dem speciellen Complexe (14), dessen sämmtliche Geraden einen unendlich entfernten Kegelschnitt treffen, zugehört, muss der Asymptotenkegel derselben ein Complexkegel sein: $(r-r_0)(t-t_0)-(s-s_0)^2=0$, und folglich deren Gleichung in Punktcoordinaten $r$, $s$, $t$:

$$(29)\qquad Ar+Bs+Ct+D(rt-s^2)+E=0.$$

Dies wird denn auch, — unter $A, B, \cdots E$ beliebige Functionen von $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ verstanden — die allgemeinste Form einer partiellen Differentialgleichung 2. O. der fraglichen Art.

Eine solche Linienfläche hat zwei Schaaren von Erzeugenden, die beide dem Complexe (14) angehören. Umgekehrt wird jede Linienfläche mit zwei Schaaren von erzeugenden Complexgeraden (14) eine Fläche (29) sein. Es ist weiterhin für eine solche Fläche charakteristisch, dass dieselbe durch irgendwelche zwei Erzeugenden derselben Schaar völlig bestimmt ist, und zwar so, dass, wenn $(m_0 \cdots \nu_0)$ $(m_1 \cdots \nu_1)$ die Coordinaten zweier sich nicht schneidenden Erzeugenden bedeuten, die übrigen in derselben Schaar enthaltenen Erzeugenden durch die in (28) angegebenen Werthe der Linniencoordinaten $m$, $n$, $\mu$, $\nu$ ausgedrückt werden. — Wenn darum eine Gleichung 2. O. (29) zwei erste Integrale: $f_1(zxypq)=c$, $f_2(zxypq)=c$, die zwei Erzeugenden *derselben* Schaar entsprechen, zulässt, so müssen alle partiellen Differentialgleichungen 1. O. der Form:

$$(30)\qquad \text{eine arbiträre Function von } (f_1, f_2)=0$$

ebenfalls erste Integrale werden.

42. Die Auseinandersetzungen des vorangehenden Paragraphen lehren, wie man zu prüfen hat, ob es überhaupt erste Integrale einer Gleichung 2. O. giebt, sodann, wie man, im Falle solche existiren, dieselben darstellen kann. Fassen wir hier nur eine Gleichung (29), die ein erstes Integral (30) besitzt, in Betracht. *Die partielle Differentialgleichung 1. O. mit zwei unabhängigen Variablen, auf welche nach der 26. Nummer die Lösung dieser Gleichung 2. O. hinauskommt, wird nun eine lineare Gleichung.*

In erster Hand tritt die Lösung als eine solche auf, die für zwei *lineare* nicht homogene partielle Differentialgleichungen 1. O. mit vier un-

abhängigen Variablen*) gemeinsam ist. Auf zwei derartige Gleichungen 1. O. ist auch die Gleichung 2. O. (29) von Bour (Journal de l'École impériale polytechnique 39. Cahier. T. 22. 1862) und von Boole (Crelle's Journal Bd. 61. 1863) zurückgeführt, — eine Zurückführung, die, wie auch in den angeführten Abhandlungen bemerkt, mit der von Ampère gegebenen Reduction auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen thatsächlich identisch ausfällt.

43. Damit die Gleichung 1. O.

$$\psi(f_1 f_2) = 0$$

ein estes Integral, — sagen wir, um die Willkürlichkeit der Functionsform $\psi$ auch in Worten zu kennzeichnen, — ein *vollständiges* erstes Integral ausmacht, müssen die Integrale:

$$f_1 = c, \quad f_2 = c$$

zweien Erzeugenden *derselben* Schaar entsprechen. Es kann nun, da die Linienfläche zwei Schaaren von Complexgeraden, wo die Geraden der einen Schaar die der anderen schneiden, enthält, erste Integrale geben, die nicht durch $f_1, f_2$ sich ausdrücken lassen. Das sind solche Integrale, deren entsprechende Complexgeraden zu der anderen Schaar von Erzeugenden als der den früheren Integralen entsprechenden Schaar zugehören. Angenommen dass

$$\varphi = C$$

ein derartiges, neues Integral wäre, so würde die demselben entsprechende Complexgerade die von $f_1$ und $f_2$ bestimmten Geraden schneiden. Nun geht die Bedingung des Schneidens zweier Complexgeraden für die entsprechenden Gleichungen 1. O. in die Involutionsbedingung derselben über; es muss also sein:

$$[f_1 \varphi] = 0, \quad [f_2 \varphi] = 0. \tag{31}$$

Hat daher eine Gleichung (29) ein erstes Integral (30), so giebt es ein erstes Integral $\varphi = C$ *anderer Art*, falls die Gleichungen (31) eine gemeinsame Lösung gestatten; es giebt zwei andere erste Integrale und sodann ein vollständiges erstes Integral anderer Art, falls dieselben Gleichungen (31) zwei Lösungen $\varphi_1 = c$, $\varphi_2 = c$ gemein haben; — kein solches Integral, wenn keine gemeinsame Lösung existirt (vgl. hierzu die 8. N., von der jener Satz eine unmittelbare Folge ist).

*) Durch Elimination von $\varrho$, $\lambda$ aus (28) entstehen nämlich zwei in $m \cdots \nu$ homogene Gleichungen ersten Grades, die in Complexliniencoordinaten die Gleichung (29) darstellen. Oder es werden solche Gleichungen durch Elimination von $r$, $s$, $t$ zwischen (29) und den früheren: $r = ms + \mu$, $s = mt + \nu$ gewonnen. Durch die Substitutionen (22) werden dieselben in lineare partielle Gleichungen 1. O. verwandelt.

Das ist übrigens ein bekannter Satz. Es braucht wohl kaum der Umstand besonders erwähnt zu werden, dass die Gleichung (29), ohne ein vollständiges erstes Integral zu besitzen, zwei erste Integrale gestatten kann: $f = c$, $\varphi = c$, alsdann aber ist nothwendig $[f\varphi] = 0$*).

44. Eine lineare Gleichung:

$$Ar + Bs + Ct + E = 0$$

ist als ein Ausartungsfall der Gleichung (29) zu betrachten. Die zugehörige Linienfläche zweiten Grades ist nun in zwei unendlich entfernte Punkte und in eine durch dieselben hindurchgelegte Ebene zerfallen. Als Erzeugenden der Fläche fungiren die zwei nach den genannten Punkten gerichteten Schaaren von in der Ebene verlaufenden parallelen Linien.

45. Entsprechend den zwei Schaaren von Erzeugenden einer beliebigen partiellen Differentialgleichung 2. O. von der Form (29), können auf jeder Integralfläche einer solchen Gleichung zwei (reelle, zusammenfallende oder imaginäre) Schaaren von Curven ausgezeichnet werden, nach denen die Fläche mit unbegränzt vielen anderen Integralflächen derselben Gleichung eine Berührung 1. O. eingeht.

46. Die Gleichung 2. O. mit $n$ unabhängigen Variablen, die ein erstes Integral besitzt:

$\varphi(u_1 u_2 \cdots u_n) = 0$, ($u_1, u_2 \cdots u_n$ bestimmte Functionen von $z_1 x_1 \cdots x_n p_1 p_2 \cdots p_n$) lässt sich ganz in derselben Weise behandeln. Fassen wir nämlich die zweiten Differentalquotienten $p_{k_1 k_2}$ als Punktcoordinaten eines Raumes $R'$ auf, so wird die Gleichung 2. O. mit dem folgenden $n-1$-fachen Büschel in $R'$:

$$\sum \frac{\partial u_1}{\partial p_i} p_{i1} + \lambda_1 \sum \frac{\partial u_2}{\partial p_i} p_{i1} + \cdots \lambda_{n-1} \sum \frac{\partial u_n}{\partial p_i} p_{i1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \cdots \lambda_{n-1} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_n}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\sum \frac{\partial u_1}{\partial p_i} p_{i2} + \lambda_1 \sum \frac{\partial u_2}{\partial p_i} p_{i2} + \cdots \lambda_{n-1} \sum \frac{\partial u_n}{\partial p_i} p_{i2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \cdots \lambda_{n-1} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_n}{\partial z}\right) = 0,$$

. . . . . .

$$\sum \frac{\partial u_1}{\partial p_i} p_{in} + \lambda_1 \sum \frac{\partial u_2}{\partial p_i} p_{in} + \cdots \lambda_{n-1} \sum \frac{\partial u_n}{\partial p_i} p_{in} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \cdots \lambda_{n-1} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_n}{\partial z}\right) = 0$$

*) Die Gleichung 2. O., die $\psi(f\varphi) = 0$ als vollständiges erstes Integral hat, wird im Raume $R_3'$ durch einen Kegel: $(r - r_0)(t - t_0) - (s - s_0)^2 = 0$ repräsentirt.

äquivalent. Man bezeichne mit $\nu$ die Anzahl aller $p_{ik}$. Man hat dann die Gleichung 2. O. durch eine gewisse $M_{\nu-1}$ im Raume $R'$ repräsentirt. Durch solche $M_{\nu-n+1}$*), welche durch $n-1$ $M_{\nu-n}$**) des obigen Büschels hindurchgelegt sind, wird die $M_{\nu-1}$ ausserdem in einer $M_{\nu-n}$ geschnitten, die, hinsichtlich ihrer Gleichungen, von derselben Form wie die früheren $M_{\nu-n}$ ist. Also ist die fragliche $M_{\nu-1}$ durch zwei Schaaren von $M_{\nu-n}$ erzeugt, — welchem entsprechend es auch Gleichungen 2. O. der obigen Art geben kann, die zwei distincte Classen von ersten Integralen besitzen:

$$\varphi(u_1 u_2 \cdots u_n) = 0, \quad \psi(v_1 v_2 \cdots v_n) = 0,$$

aber dann ist immer $[u_i v_k] = 0$, weil die $M_{\nu-n}$, die $u_i = C$, $v_k = C$ entsprechen, da sie verschiedenen Schaaren von Erzeugenden ($M_{\nu-n}$) zugehören, sich treffen sollen (vgl. auch Nr. 8.).

In Bezug auf die Darstellung der ersten Integrale verweise ich auf den folgenden Paragraphen.

---

47. Gehen wir wiederum zum Raume $R_3$ zurück und behandeln wir nun kürzlich diejenige partielle Differentialgleichung 3. O. dieses Raumes, die ein erstes Integral:

(32) eine arbiträre Function von $(f_1(zxypqrst), f_2(zxypqrst)) = 0$ besitzen kann.

Diese Gleichung hat die Form:

$$\frac{df_1}{dx} \cdot \frac{df_2}{dy} - \frac{df_1}{dy} \cdot \frac{df_2}{dx} = 0, \tag{33}$$

oder, wenn $u$, $v$, $w$, $\varpi$ die dritten Differentialquotienten von $z$ bezeichnen:

$$Au + Bv + Cw + D\varpi + E + F(uw - v^2) + G(u\varpi - vw) + H(v\varpi - u^2) = 0, \tag{34}$$

wo $A$, $B \cdots H$ Functionen von $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ sind.

---

*) Z. B. die $M_{\nu-n+1}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{du_1}{dx_1} + \lambda \frac{du_1}{dx_2} + \cdots \mu \frac{du_1}{dx_n} = 0,\\
&\frac{du_2}{dx_1} + \lambda \frac{du_2}{dx_2} + \cdots \mu \frac{du_2}{dx_n} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{du_{n-1}}{dx_1} + \lambda \frac{du_{n-1}}{dx_2} + \cdots \mu \frac{du_{n-1}}{dx_n} = 0.
\end{aligned}$$

**) Eine solche $M_{\nu-n}$ ist die folgende:

$$\frac{du_1}{dx_1} = 0, \quad \frac{du_1}{dx_2} = 0, \cdots \frac{du_1}{dx_n} = 0.$$

Werden $x, y, z, p, q, r, s, t$ als Constanten aufgefasst, $u, v, w, \varpi$ als Coordinaten der Punkte eines $R_4'$, so stellt sich diese Gleichung als eine gewisse $M_3$ in $R_4'$ dar. Nun kann eine solche $M$ entweder keine Schaar von erzeugenden $M_2$ der Form:

$$\begin{aligned} u + mv + nw + \mu &= 0, \\ v + mw + n\varpi + \nu &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

enthalten*), — in diesem Falle ist auch für die Gleichung (34) ein vollständiges erstes Integral (32) unmöglich, — oder sie kann durch eine, aber bloss eine einfache Schaar derartiger $M_2$ erzeugt werden**), — dann kann es eintreffen, dass die Gleichung (34) ein vollständiges erstes Integral (32) zugiebt, — oder es können zwei einfache Schaaren derartiger $M_2$ stattfinden***), — die Gleichung 3. O. würde dann zwei distincte erste Integrale von der Form (32) besitzen können, — oder endlich, es können in drei verschiedenen Weisen die $M_3$ (34) durch einfache Schaaren von $M_2$ (35) erzeugt werden. *In diesem Falle ist die $M_3$ durch eine lineare Gleichung*

$$Au + Bv + Cw + D\varpi + E = 0$$

*dargestellt, und es kann nun möglich sein, dass, den drei Schaaren von Erzeugenden entsprechend, drei distincte Classen von ersten Integralen sich finden.*

Soll die $M_3$ (34) eine einfache Schaar von Erzeugenden (35) enthalten, so muss die Gleichung derselben in die Form:

$$\begin{vmatrix} u + mv + nw + \mu & u + m'v + n'w + \mu' \\ v + mw + n\varpi + \nu & v + m'w + n'\varpi + \nu' \end{vmatrix} = 0 \tag{34*}$$

gebracht werden können. Existirt noch eine zweite einfache Schaar von derartigen $M_2$ (35), so muss eine jede dieser $M_2$, da durch die zweite Schaar die $M_3$ ebenso vollständig wie durch die erste erzeugt werden soll, eine jede $M_2$ der ersten Schaar nach einer Mannigfaltigkeit einer Dimension schneiden. D. h. es müsste jede lineare $M_3$, welche durch eine $M_2$ der einen Schaar hindurchgeht:

(a) $u + mv + nw + \mu + \lambda(v + mw + n\varpi + \nu) = 0$ [$\lambda$ arbiträr]

die Mannigfaltigkeit (34*) nach einer $M_2$ der anderen Schaar schneiden.

---

*) Allerdings enthält die $M_3$ gewisse (reelle oder imaginäre) derartige $M_2$. Dementsprechend wird die Gleichung (34) ein Integral: $f(zxypqrst) = c$ oder einige solche Integrale besitzen können.

**) In diesem Falle könnte die $M_3$ durch drei in $m, n, \mu, \nu$ lineare Gleichungen dargestellt werden.

***) In diesem Falle würde die $M_3$ auf zwei verschiedene Weisen durch ein System dreier in $m, n, \mu, \nu$ linearer Gleichungen darstellbar sein.

Nun genügt stets die Schnittmannigfaltigkeit*) von (a) und (34*) der Gleichung

$$(b) \qquad u + m'v + n'w + \mu' + \lambda(v + m'w + n'\varpi + \nu') = 0,$$

und falls diese $M_2$, ((a), (b)), eine $M_2$ der Form (35) werden soll, muss sein:

$$(36) \qquad (n'-n)^2 + (m-m')(mn'-m'n) = 0.$$

Dies bildet also die charakteristische Bedingung dafür, dass die von der Schaar von $M_2$:

$$u + mv + nw + \mu + \varkappa(u + m'v + n'w + \mu') = 0,$$
$$v + mw + n\varpi + \nu + \varkappa(v + m'w + n'\varpi + \nu') = 0$$

erzeugte $M_3$ auch eine zweite Schaar derartiger $M_2$ enthalten soll.

Bemerken wir nun, dass die Gleichung (36) auch als Bedingung einer gemeinsamen Wurzel der zwei Gleichungen:

$$x^2 + mx + n = 0, \quad x^2 + m'x + n' = 0$$

zu deuten ist, so können wir von einer nicht-linearen Gleichung 3. O., die ein erstes Integral (32) hat, als eine nothwendige, wenn auch nicht hinreichende**) Forderung für die Existenz eines anderen vollständigen ersten Integrals

$$\psi(\varphi_1 \varphi_2) = 0$$

das festsetzen, dass *irgend zwei Gleichungen: $f_1 = c$, $f_2 = c$ des früheren Integrals zu jedem $(zxypqrst)$ eine gemeinsame charakteristische Richtung* (Nr. 39.) *zuordnen müssen.* — Von dem Umstande, dass die $M_2$, welche zwei Integralen $f_1 = c$, $\varphi_1 = c$ entsprechen, nach einer Mannigfaltigkeit einer Dimension sich schneiden, wird man weiter, mit einer leichten Erweiterung***) des am Ende der 8. Nummer Ausgesprochenen, erschliessen können, dass je zwei erste Integrale verschiedener Classen Integralflächen (mit einer arbiträren Function) gemein haben.

In Betreff der Darstellung der ersten Integrale verweise ich auf den folgenden Paragraphen.

Durch Anwendung einer Flächentransformation (15') auf eine Gleichung 2. O. des Gebietes $(ZXY)$, die zwei erste Integrale der Form:

$$\psi(u_1 u_2) = 0, \quad \psi(v_1 v_2) = 0$$
$$(\psi \text{ arbiträr}, \ [u_i v_k] = 0),$$

besitzt, wird gerade eine Gleichung 3. O. in $(xyz)$ von der zuletzt besprochenen Natur gewonnen.

---

*) Die andere als die durch die Gleichungen: $u + mv + nw + \mu = 0$, $v + mw + n\varpi + \nu = 0$ dargestellte.

**) Es kommen nämlich, wie aus den allgemeineren Sätzen des folgenden Paragraphen ersichtlich, gewisse Integrabilitätsbedingungen hinzu.

***) Auf Flächentransformationen: $X = F_1$, $Y = F_2$, $Z = F$, wo $F$, $F_1$, $F_2$ beliebige Functionenvon $xyzpqrst$ sind.

Von den *linearen* Gleichungen 3. O. bemerke ich nur, dass dieselben, wie es auch sein muss, eine gegenüber allen Berührungstransformationen invariante Gruppe bilden.

## § 6.

## Ueber partielle Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen, die erste Integrale besitzen.

Die Ergebnisse des § 4. lassen sich leicht in folgender Weise auf einen Raum von $n+1$ Dimensionen erweitern.

48. Eine Gleichung der $m^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$F(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n \cdots p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_m}) = 0,$$

($p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ gleich dem $m^{\text{ten}}$ partiellen Differentialquotienten von $z$ nach $x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_m}$), die ein erstes Integral mit $n$ willkürlichen Constanten besitzt:

(a) $f(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n \cdots p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}} c_1 c_2 \cdots c_n) = 0,$

soll, wenn man die $p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ aus ihr und aus $n$ Gleichungen der Form:

$$\frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 0, \cdots \frac{df}{dx_n} = 0$$

eliminirt (wo $f$ eine unbestimmte Function von $z, x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n$, $p_{k_1 k_2}, \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}}$ und $\frac{d}{dx}$ eine vollständige Differentiation nach $x$ bezeichnet), zu $\nu$ Gleichungen zwischen

$$z,\ x_i,\ p_i,\ \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}},\ \frac{\partial f}{\partial z},\ \frac{\partial f}{\partial x_i},\ \frac{\partial f}{\partial p_i},\ \cdots \frac{\partial f}{\partial p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}}}$$

führen, — wo $\nu$ gleich ist der Anzahl sämmtlicher $m-1^{\text{sten}}$ Differentialquotienten $p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}}$.

Diese $\nu$ homogenen Gleichungen 1. O. für $f$ sollen weiterhin $\infty^n$ gemeinsame Lösungen $f = 0$ besitzen. Dieselben, also nicht nur (a), sondern auch die Umhüllungsgebilde einfach, zweifach, $\cdots$ $(n-1)$-fach unendlich vieler der Gleichungen (a), werden intermediäre erste Integrale von $F = 0$.

Nun kann man immer, durch rein algebraische Operationen, die Lösung derartiger Gleichungssysteme auf diejenige eines Systems von Gleichungen 1. O. zurückführen, die die grösstmögliche Zahl gemeinsamer Lösungen gestatten*). Mit einem solchen Gleichungssysteme ist daher die Gleichung $F = 0$ äquivalent. (Vgl. Nr. 25., 26.)

*) Siehe die oben citirte Arbeit von Lie in diesen Annalen Bd. IX, p. 277.

49. Eine jede Flächentransformation (5), (6) der Nr. 10., von der $Z = F$ eine Gleichung ist, giebt eine Abbildung der Gleichung $F = 0$ auf die Ebene $Z = 0$. Diese Abbildung fällt mit derjenigen vollständig zusammen, vermöge deren, wie in den Nummern 9., 14. meines Aufsatzes über die Flächentransformationen (diese Annalen Bd. IX) auseinandergesetzt ist, das entsprechende System partieller Differentialgleichungen 1. O. auf denselben Raum $Z = 0$ bezogen wird. (Vgl. Nr. 33.)

50. Wenn irgend eine Gleichung, die nicht der betrachteten Gattung angehört, erste Integrale (unendlich oder endlich viele) besitzt, kommt immer, durch Anwendung der obigen Principien, die Auffindung der Integrale auf die Erledigung eines Systems partieller Differentialgleichungen 1. O. hinaus. Insbesondere, wenn erste Integrale nur in endlicher Zahl vorhanden sind, sind dieselben durch rein algebraische Operationen aus der vorgelegten partiellen Differentialgleichung zu entwickeln. (Vgl. Nr. 37., 38.)

Durch rein algebraische Operationen wird man immer über die Existenz von ersten Integralen überhaupt, sodann auch über die Anzahl derselben entscheiden können.

Helsingborg, 6. Juli 1876.

# Sur les formes quadratiques positives.

Par

A. Korkine et G. Zolotareff,

Professeurs à l'Université de Saint-Pétersbourg.

---

Dans nos recherches sur les formes quadratiques, nous avons rencontré et défini les formes que nous nommons *extrêmes*. La question sur la détermination précise de la limite des minima des formes quadratiques se réduit à la recherche d'une forme extrême au plus grand minimum. Or il est facile de voir que d'autres questions fondamentales de la théorie des formes quadratiques dépendent aussi de l'étude de telles formes.

A cet effet, et pour compléter les recherches que nous avons déjà publiées, nous nous sommes proposé de donner dans ce Mémoire, avec quelques propriétés fondamentales de ces formes, toutes les formes extrêmes binaires, ternaires, quaternaires et à cinq variables.

Notre Mémoire est divisé en deux chapitres:

Dans le premier, nous considérons principalement les formes à un nombre quelconque de variables.

Le second est consacré aux formes à cinq variables.

## Chapitre premier.

**1.** Rappelons d'abord la définition des formes extrêmes.

Nous nommons *extrême* une forme quadratique positive si son minimum est diminué, lorsqu'on attribue aux coefficients des accroissements infiniment petits, tels que la valeur du déterminant de la forme reste invariable. Il est clair que toutes les formes équivalentes à une forme extrême sont aussi des formes extrêmes. Nous considérons dans ce qui suit toute la classe de formes équivalentes comme une seule forme.

Quoique la définition que nous venons de donner exprime la propriété caractéristique des formes extrêmes par laquelle elles sont com-

plétement déterminées, toutefois la recherche de ces formes pour un nombre donné de variables présente de grandes difficultés.

Elle demande, en effet, une étude étendue des propriétés des valeurs entières des variables pour lesquelles la forme reçoit la valeur minimum.

Quelles que soient, d'ailleurs, les difficultés de la recherche, la question des formes extrêmes est cependant la première qu'on puisse se proposer dans la théorie des formes quadratiques.

Les formes binaires et ternaires qui ont été étudiées sont si peu compliquées en comparaison avec les autres, où le nombre de variables est plus grand, que la recherche des formes extrêmes ne s'est point présentée dans leur théorie comme une question séparée; mais elle entrait implicitement dans la réduction de ces formes. Or, si l'on suivait la même voie dans l'étude des formes avec un nombre de variables un peu considérable, il faudrait établir des tables avec un nombre énorme d'inégalités, qui déterminent la forme réduite dans des cas donnés.

Si même on n'avait aucune peine à former ces inégalités, il faudrait néanmoins abandonner tout espoir d'en tirer des conclusions semblables à celles qui ont été déduites pour les formes binaires et ternaires. Or la composition même de ces inégalités demande la connaissance des propriétés des valeurs entières des variables pour lesquelles la forme est la plus petite possible, ce qui constitue la partie la plus essentielle dans la recherche des formes extrêmes. Quand une forme est donnée, on peut facilement reconnaître si elle est extrême ou non, par une méthode que nous allons appliquer à trois formes:

$$U_n = 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}\,[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n],$$

$$V_n = \sqrt[n]{2^{n-2}D}\,[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+x_1x_3+x_1x_4+\cdots+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n],$$

$$Z = \sqrt[5]{\frac{2^9}{3^4}D}\,[x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-\tfrac{1}{2}x_1x_2-\tfrac{1}{2}x_1x_3-\tfrac{1}{2}x_1x_4-\tfrac{1}{2}x_1x_5+\tfrac{1}{2}x_2x_3+\tfrac{1}{2}x_2x_4-x_2x_5+\tfrac{1}{2}x_3x_4-x_3x_5-x_4x_5].$$

Ce sont les seules formes extrêmes dont nous aurons à nous occuper dans ce Mémoire.

2. Considérons d'abord la forme $U_n$. Son minimum s'obtient:

1°. Lorsque $x_i = 1$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_n = 0$. Cela nous donne $n$ représentations, $i$ étant un des nombres $1, 2, 3, \cdots, n$.

2°. Lorsque $x_i = 1$, $x_k = -1$, les autres $x$ étant égaux à zéro.

Nous obtenons de cette manière $\frac{n(n-1)}{2}$ représentations, les nombres $i$ et $k$ étant différents entre eux et compris dans la suite $1, 2, 3, \cdots, n$ *).

Considérons avec $U_n$ une forme $f$ de même déterminant $-D$, telle que la différence $f - U_n$ soit une forme quadratique à coefficients infiniment petits. Une telle forme $f$ peut être écrite comme il suit:

$$f = 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}[(1+\alpha_{11})x_1^2+(1+\alpha_{22})x_2^2+\cdots+(1+\alpha_{n,n})x_n^2+(1+\alpha_{12})x_1x_2 \\ +(1+\alpha_{13})x_1x_3+\cdots+(1+\alpha_{n-1,n})x_{n-1}x_n].$$

Ici les quantités $\alpha_{ii}$ et $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ sont infiniment petites ou zéros.

Nous exceptons le cas dans lequel tous les $\alpha$ sont égaux à zéro, car on aura alors identiquement $f = U_n$.

En égalant le déterminant de $f$ à $-D$, on aura, après les réductions,

$$(1)\quad n(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{nn}) - (\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{23}+\cdots+\alpha_{n-1,n}) + \Omega = 0,$$

$\Omega$ étant la somme des termes dont chacun est infiniment petit en comparaison avec quelques-unes des quantités $\alpha$. Donnons maintenant une autre forme à l'équation (1).

Supposons d'abord que, pour

$$x_i = 1, \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_n = 0,$$

la forme $f$ devienne égale à

$$(2)\qquad 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}(1+\omega_{ii}),$$

de sorte que $\omega_{ii} = \alpha_{ii}$.

Supposons ensuite que, pour $x_i = 1$, $x_k = -1$, les autres $x$ égaux à zéro, la forme $f$ devienne

$$(3)\qquad 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}(1+\omega_{ik}),$$

de sorte que $\omega_{ik} = \omega_{ki} = \alpha_{ii} + \alpha_{kk} - \alpha_{ik}$.

En désignant maintenant par $\Sigma\omega$ la somme de toutes les quantités $\omega_{ii}$ et $\omega_{ik}$ en nombre $\frac{n(n+1)}{2}$, nous aurons facilement

$$\Sigma\omega = n(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{nn}) - (\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{23}+\cdots+\alpha_{n-1,n}).$$

Cela nous conduit à cette forme de l'équation (1)

$$(4)\qquad \Sigma\omega + \Omega = 0.$$

---

*) Les autres représentations en nombre $\frac{n(n+1)}{2}$, qui s'obtiennent de celles que nous donnons ici par le changement des signes de toutes les variables, ne nous étant point nécessaires, nous en faisons abstraction.

Les quantités $\omega$ ne peuvent pas être égales à zéro toutes ensemble, car il s'ensuivrait que tous les $\alpha$ seraient égaux à zéro et nous avons fait abstraction de ce cas. Il est évident, de ce que nous avons dit de $\Omega$, que, parmi les quantités $\omega$, quelques-unes sont négatives et les autres positives, car il serait impossible de satisfaire à l'équation (4) dans une autre supposition.

Supposons que $\omega_{ii}$ soit négatif. Alors la valeur (2) de la forme $f$ sera moindre que $2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}$.

Si maintenant $\omega_{ik}$ est négatif, alors la valeur (3) de $f$ sera moindre que $2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}$. Ainsi, dans tous les cas, il y a une valeur de $f$ plus petite que le minimum de $U_n$. Il s'ensuit que le minimum de $f$ est, *à fortiori*, inférieur à celui de $U_n$.

Donc le minimum de toute forme de déterminant $-D$, obtenue de $U_n$ par des variations infiniment petites des coefficients est moindre que celui de $U_n$, et par conséquent $U_n$ est une forme extrême.

3. Passons maintenant à la forme $V_n$. Son minimum s'obtient:

1°. Lorsque $x_i = 1$, les autres $x$ égaux à zéro

$$i = 1, 2, \cdots n.$$

2°. Lorsque $x_i = 1$, $x_k = \mp 1$; les autres $x$ sont égaux à zéro, $i$ et $k$ étant deux nombres différents pris de la suite 1, 2, 3, $\cdots$, $n$, la combinaison $i = 1$, $k = 2$ exceptée.

3°. Lorsque $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_i = 1$, $i = 3, 4, \cdots, n$; les autres $x$ sont égaux à zéro.

4°. Lorsque $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_i = 1$, $x_k = 1$; les autres $x$ sont nuls, $i$ et $k$ étant deux nombres différents de la suite 3, 4, $\cdots$, $n$.

Considérons avec $V_n$ une autre forme $f$ du même déterminant $-D$ et telle que la différence $f - V_n$ soit une forme dont tous les coefficients soient infiniment petits. La forme $f$ peut être représentée comme il suit:

$$f = \sqrt[n]{2^{n-2}D}\,[(1+\alpha_{11})x_1^2+(1+\alpha_{22})x_2^2+\cdots+(1+\alpha_{nn})x_n^2+\alpha_{12}x_1x_2 + (1+\alpha_{13})x_1x_3+(1+\alpha_{23})x_2x_3+\cdots+(1+\alpha_{n-1,n})x_{n-1}x_n];$$

les quantités $\alpha_{ii}$ et $\alpha_{ik}$ sont des infiniment petits ou zéros.

En exprimant que le déterminant de $f$ est égal à $-D$, il viendra, après quelques réductions,

$$(1)\qquad \begin{aligned} &n(\alpha_{11}+\alpha_{22}) + 4(\alpha_{33}+\alpha_{44}+\cdots+\alpha_{nn}) + (n-2)\alpha_{12} \\ &\quad - 2(\alpha_{13}+\alpha_{14}+\cdots+\alpha_{1n}) \\ &\quad - 2(\alpha_{23}+\alpha_{24}+\cdots+\alpha_{2n}) + \Omega = 0, \end{aligned}$$

$\Omega$ étant la somme des termes qui sont infiniment petits par rapport à *quelques-unes* des quantités $\alpha$.

Maintenant nous allons donner une autre forme à l'équation (1) et, dans ce but, nous supposerons que:

1°. $x_i$ étant égal à l'unité et les autres $x$ à zéro, la valeur de $f$ soit

$$\sqrt[n]{2^{n-2}D}(1+\omega_{ii}),$$

de sorte que $\omega_{ii}=\alpha_{ii}$;

2°. $x_i$ étant égal à $-1$, $x_k$ à $+1$ et les autres $x$ à zéro, la valeur de $f$ soit

$$\sqrt[n]{2^{n-2}D}(1+\omega_{ik}),$$

de sorte que $\omega_{ik}=\alpha_{ii}+\alpha_{kk}-\alpha_{ik}$, la combinaison $i=1$, $k=2$ étant exceptée;

3°. $x_1$ et $x_2$ étant égaux à $-1$, $x_i$ à $+1$ et les autres $x$ à zéro, la valeur de $f$ soit

$$\sqrt[n]{2^{n-2}D}(1+\varepsilon_i)$$
$$(i=3,\ 4,\ \cdots,\ n),$$

de manière que $\varepsilon_i=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{ii}+\alpha_{12}-\alpha_{1i}-\alpha_{2i}$;

4°. $x_1$ et $x_2$ étant égaux à $-1$, $x_i$ et $x_k$ à $+1$ et les autres $x$ à zéro, la valeur de $f$ soit

$$\sqrt[n]{2^{n-2}D}(1+\varepsilon_{ik}),$$

de sorte que $\varepsilon_{ik}=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{ii}+\alpha_{kk}+\alpha_{12}-\alpha_{1i}-\alpha_{1k}-\alpha_{2i}-\alpha_{2k}+\alpha_{ik}$.

Maintenant, en ajoutant toutes les équations,

$$\omega_{ii}=\alpha_{ii},$$
$$\omega_{ik}=\alpha_{ii}+\alpha_{kk}-\alpha_{ik},$$
$$\varepsilon_i=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{ii}+\alpha_{12}-\alpha_{1i}-\alpha_{2i},$$
$$\varepsilon_{ik}=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{ii}+\alpha_{kk}+\alpha_{12}-\alpha_{1i}-\alpha_{1k}-\alpha_{2i}-\alpha_{2k}+\alpha_{ik},$$

on aura

$$\Sigma\omega_{ii}+\Sigma\omega_{ik}+\Sigma\varepsilon_i+\Sigma\varepsilon_{ik}$$
$$=\frac{n-1}{2}\{n(\alpha_{11}+\alpha_{22})+4(\alpha_{33}+\alpha_{44}+\cdots+\alpha_{nn})+(n-2)\alpha_{12}$$
$$-2(\alpha_{13}+\alpha_{14}+\cdots+\alpha_{1n})$$
$$-2(\alpha_{23}+\alpha_{24}+\cdots+\alpha_{2n})\}.$$

Par conséquent l'équation (1) prend la forme

$$\Sigma\omega_{ii}+\Sigma\omega_{ik}+\Sigma\varepsilon_i+\Sigma\varepsilon_{ik}+\frac{2}{n-1}\Omega=0.$$

Il résulte de là, comme précédemment pour la forme $U_n$, que la forme $V_n$ est extrême.

4. Discutons de la même manière la forme

$$Z = \sqrt[5]{\frac{2^9 D}{3^4}} \Big[ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - \tfrac{1}{2} x_1 x_2 - \tfrac{1}{2} x_1 x_3 - \tfrac{1}{2} x_1 x_4 - \tfrac{1}{2} x_1 x_5 + \tfrac{1}{2} x_2 x_3 + \tfrac{1}{2} x_2 x_4 - x_2 x_5 + \tfrac{1}{2} x_3 x_4 - x_3 x_5 - x_4 x_5 \Big]$$

$$= \sqrt[5]{\frac{2^9 D}{3^4}} \Big[ \Big(x_5 - \frac{x_2 + x_3 + x_4}{2} - \frac{x_1}{4}\Big)^2 + \frac{3}{4}\Big(x_2 - \frac{x_1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4}\Big(x_3 - \frac{x_1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4}\Big(x_4 - \frac{x_1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{8} x_1^2 \Big].$$

Ayant $Z$ en forme d'une somme de carrés, il est facile de trouver les représentations de son minimum. Elles sont contenues dans la table suivante:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |

Chaque ligne contient une représentation du minimum de $Z$; par exemple, dans la dernière ligne, figure la représentation

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 2.$$

Pour démontrer que $Z$ est une forme extrême, considérons la forme

$$f = \sqrt[5]{\frac{2^9 D}{3^4}} \big[ (1+\alpha_{11}) x_1^2 + (1+\alpha_{22}) x_2^2 + (1+\alpha_{33}) x_3^2 + (1+\alpha_{44}) x_4^2 + (1+\alpha_{55}) x_5^2 + (-\tfrac{1}{2}+\alpha_{12}) x_1 x_2 + (-\tfrac{1}{2}+\alpha_{13}) x_1 x_3 + (-\tfrac{1}{2}+\alpha_{14}) x_1 x_4 + (-\tfrac{1}{2}+\alpha_{15}) x_1 x_5 + (\tfrac{1}{2}+\alpha_{23}) x_2 x_3 + (\tfrac{1}{2}+\alpha_{24}) x_2 x_4 + (-1+\alpha_{25}) x_2 x_5 + (\tfrac{1}{2}+\alpha_{34}) x_3 x_4 + (-1+\alpha_{35}) x_3 x_5 + (-1+\alpha_{45}) x_4 x_5 \big],$$

toutes les quantités $\alpha$ étant infiniment petites.

Désignons maintenant par

$$\sqrt[5]{\frac{2^9 D}{3^4}}(1+\omega_1),\quad \sqrt[5]{\frac{2^9 D}{3^4}}(1+\omega_2),\ \cdots,\ \sqrt[5]{\frac{2^9 D}{3^4}}(1+\omega_{15})$$

les valeurs de $f$ qui s'obtiennent en attribuant aux variables successivement les quinze systèmes de valeurs contenues dans la table qui précède.

En exprimant que le déterminant de $f$ est égal à celui de $Z$, on aura, après quelques réductions,

$$(1)\quad \begin{aligned} &7\alpha_{55}+3\alpha_{22}+3\alpha_{33}+3\alpha_{44}+4\alpha_{11}+3\alpha_{25}+3\alpha_{35}+3\alpha_{45}+4\alpha_{15},\\ &+\alpha_{23}+\alpha_{24}+\alpha_{34}+2\alpha_{12}+2\alpha_{13}+2\alpha_{14}+\Omega=0, \end{aligned}$$

$\Omega$ désignant la somme des termes dont chacun est infiniment petit par rapport à quelques-unes des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{15}$. D'après la définition des quantités $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{15}$, il viendra

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Sigma\omega = {} & 7\alpha_{55}+3\alpha_{22}+3\alpha_{33}+3\alpha_{44}+4\alpha_{11}+3\alpha_{25}+3\alpha_{35}+3\alpha_{45}\\ & +4\alpha_{15}+\alpha_{23}+\alpha_{24}+\alpha_{34}+2\alpha_{12}+2\alpha_{13}+2\alpha_{14}, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation (1) prendra la forme

$$\Sigma\omega+2\Omega=0.$$

Donc, etc.

5. La méthode que nous avons appliquée aux formes $U_n$, $V_n$ et $Z$ peut être employée toutes les fois qu'on demande si une forme donnée est extrême ou non. Mais il faut recourir à d'autres moyens si l'on a à trouver toutes les formes extrêmes pour un nombre donné de variables.

Dans notre Mémoire *Sur les formes quadratiques**), nous avons énoncé un théorème concernant le nombre de représentations du minimum d'une forme extrême. Ce nombre ne peut être inférieur à $\frac{n(n+1)}{2}$. On peut facilement vérifier cette proposition pour toutes les formes extrêmes que nous y avons données. Comme elle est fondamentale pour nous, nous en donnerons la démonstration. Soit

$$f=\Sigma a_{ik}x_ix_k$$

une forme de déterminant $-D$.

Désignons les différentes représentations du minimum $M$ de $f$ comme il suit:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1\ x_2\ \cdots\ x_n \\ \hline p_1\ p_2\ \cdots\ p_n \\ q_1\ q_2\ \cdots\ q_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ r_1\ r_2\ \cdots\ r_n. \end{array}\right.$$

*) *Mathematische Annalen* VI. Band, S. 366.

Supposons que cette table ne renferme pas au moins $\frac{n(n+1)}{2}$ représentations, qui déterminent complétement la forme $f$, son minimum étant donné.

Cela posé, nous allons démontrer qu'en faisant varier infiniment peu les coefficients de $f$, on obtient une forme de même déterminant et dont le minimum surpasse celui de $f$.

En exprimant que la table (1) contient les représentations du nombre $M$, on aura les équations

$$\Sigma p_i p_k a_{ik} = M, \quad \Sigma q_i q_k a_{ik} = M, \quad \cdots. \tag{2}$$

La supposition que ces représentations ne déterminent pas la forme $f$ consiste en ce que les équations (2) avec inconnues $a_{ik}$ ont un nombre infini de solutions.

Il suit de là que les équations

$$\Sigma p_i p_k \lambda_{ik} = 0, \quad \cdots$$

peuvent être satisfaites par les valeurs $\lambda_{ik}$ qui ne s'annulent pas toutes à la fois. De telles valeurs $\lambda_{ik}$ étant trouvées, considérons la forme

$$f + \varepsilon\varphi,$$

$\varepsilon$ désignant une quantité infiniment petite et $\varphi$ la forme

$$\Sigma \lambda_{ik} x_i x_k.$$

La forme

$$f + \varepsilon\varphi$$

devient minimum pour les mêmes valeurs (1) des variables que $f$; mais, pour ces valeurs, la forme $\varphi$ s'annule; par conséquent le minimum de $f + \varepsilon\varphi$ sera aussi égal à $M$, comme celui de $f$.

Faisons voir que le déterminant de $f + \varepsilon\varphi$, pour la valeur convenable de $\varepsilon$, devient inférieur à $D$ en valeur absolue. Désignons-le par $-D'$; on a

$$D' = D + \varepsilon\left(\frac{dD}{da_{11}}\lambda_{11} + \frac{dD}{da_{22}}\lambda_{22} + \cdots + \frac{dD}{da_{nn}}\lambda_{nn} + \frac{dD}{da_{12}}\lambda_{12} + \frac{dD}{da_{13}}\lambda_{13} + \cdots + \frac{dD}{da_{n-1,n}}\lambda_{n-1,n}\right) + \Omega,$$

$\Omega$ étant la somme de termes des ordres supérieurs au premier par rapport à $\varepsilon$.

Il y a ici deux cas à distinguer:

1°. Lorsque l'expression

$$P = \frac{dD}{da_{11}}\lambda_{11} + \frac{dD}{da_{22}}\lambda_{22} + \cdots + \frac{dD}{da_{n-1,n}}\lambda_{n-1,n}$$

diffère de zéro;

2°. Lorsque

$$P = 0.$$

Dans le premier cas, $\varepsilon$ étant pris avec le signe contraire à celui de $P$, on voit immédiatement que

$$D' = D + \varepsilon P + \Omega < D.$$

Dans le second cas lorsque $P = 0$ représentons $\Omega$ sous la forme

$$\Omega = K\frac{\varepsilon^2}{2} + \Omega_1,$$

$K$ étant indépendant de $\varepsilon$ et $\Omega_1$ une quantité infiniment petite par rapport à $\varepsilon^2$.

Cela posé, nous faisons voir que le coefficient

$$K = \frac{d^2D}{da_{11}^2}\lambda_{11}^2 + 2\frac{d^2D}{da_{12}da_{13}}\lambda_{12}\lambda_{13} + \cdots$$

est négatif.

A cet effet, considérons l'expression

$$P^2 - DK,$$

qui est, comme on sait, l'invariant simultané des deux formes $f$ et $\varphi$. Transformons dans $f$ et $\varphi$ les variables par une même transformation linéaire dont le déterminant est égal à l'unité. Soient $z_1, z_2, \cdots, z_n$ les nouvelles variables.

La transformation mentionnée peut être choisie de sorte que $f$ devienne

$$f = \alpha_{11}z_1^2 + \alpha_{22}z_2^2 + \cdots + \alpha_{nn}z_n^2.$$

Supposons que $\varphi$ prenne la forme

$$\varphi = \Sigma\mu_{ik}z_iz_k.$$

Composons maintenant, pour la nouvelle forme de $f$ et $\varphi$, l'expression $P^2 - DK$. Nous aurons facilement

$$P^2 - DK = D^2\left[\left(\frac{\mu_{11}}{\alpha_{11}}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{22}}{\alpha_{22}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\mu_{nn}}{\alpha_{nn}}\right)^2 + 2\frac{\mu_{12}^2}{\alpha_{11}\alpha_{22}} + 2\frac{\mu_{13}^2}{\alpha_{11}\alpha_{33}} + \cdots + 2\frac{\mu_{n-1,n}^2}{\alpha_{n-1,n-1}\alpha_{n,n}}\right].$$

On voit de là que $P^2 - DK$ est positif, car $\alpha_{ii}$ sont tous positifs. Or de l'inégalité

$$P^2 - DK > 0,$$

à cause de l'équation

$$P = 0.$$

on déduit que $K$ est négatif. Dans le cas considéré, on a

$$D' = D + K\frac{\varepsilon^2}{2} + \Omega,$$

et il suit de là que $D' < D$.

Ainsi on peut supposer, dans l'un et l'autre cas,

$$D' = D(1-\eta), \quad \eta > 0.$$

Alors la forme

$$\frac{f+\varepsilon\varphi}{\sqrt[n]{1-\eta}}$$

aura le déterminant $-D$ et le minimum $\frac{M}{\sqrt[n]{1-\eta}} > M$.

Donc le minimum de la forme $f$ peut être augmenté par des variations infiniment petites des coefficients qui laissent la valeur du déterminant invariable.

Par conséquent, si une forme est telle que son minimum ne puisse être augmenté de cette manière, il aura au moins $\frac{n(n+1)}{2}$ représentations qui déterminent complétement la forme.

6. Soit

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$$

une forme dont le minimum ne puisse être augmenté par des variations infiniment petites de ses coefficients, en laissant la valeur du déterminant invariable.

Il est facile de démontrer que par ces variations le minimum de $f$ variera et, par conséquent, sera nécessairement *diminué*.

En effet, considérons la forme

$$f + \Sigma \alpha_{ik} x_i x_k = f + \psi,$$

de même déterminant que $f$, $\psi = \Sigma \alpha_{ik} x_i x_k$ étant une forme à coefficients infiniment petits, et supposons que le minimum de $(f+\psi)$ soit le même que celui de $f$. Il ne peut donc être augmenté comme celui de $f$ et la forme

$$f + \psi$$

aura au moins $\frac{n(n+1)}{2}$ représentations de ce minimum (n° 5.), qui seront évidemment contenues parmi celles du minimum de $f$. Supposons qu'elles soient

$$\begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n. \end{array}$$

D'après le n° 5., les équations

$$\Sigma p_i p_k a_{ik} = M, \quad \Sigma q_i q_k a_{ik} = M, \cdots,$$

ainsi que les équations

$$\Sigma p_i p_k (a_{ik} + \alpha_{ik}) = M, \quad \Sigma q_i q_k (a_{ik} + \alpha_{ik}) = M, \cdots$$

admettent une solution déterminée.

Il résulte de là que tous les $\alpha_{ik}$ s'annulent, et la forme $f+\psi$ est la même que $f$, ce qui est contraire à la supposition.

7. De ce que nous avons dit dans les numéros précédents il résulte les conséquences suivantes:

1°. Une forme dont le minimum ne peut être augmenté, si l'on fait varier infiniment peu ses coefficients, en laissant la valeur du déterminant invariable, est une forme extrême (n° 6.).

2°. Toute forme extrême a au moins $\frac{n(n+1)}{2}$ représentations de son minimum qui déterminent complétement cette forme, en supposant que son minimum soit donné.

3°. Les formes avec le plus grand minimum, choisies dans l'ensemble de toutes les formes de même déterminant et avec les mêmes variables, sont nécessairement extrêmes.

4°. La détermination précise de la limite des minima se réduit évidemment à la recherche des formes extrêmes avec le plus grand minimum. Par conséquent cette détermination sera accomplie si l'on a composé toutes les formes extrêmes, le déterminant et le nombre des variables étant donnés.

5°. Le rapport d'une forme extrême à son minimum est une forme dont tous les coefficients sont des nombres rationnels.

Cela résulte de ce que, en vertu du n° 5., les coefficients de toute forme extrême sont déterminés par les équations linéaires semblables aux équations (2).

8. Nous allons nous occuper maintenant des déterminants formés avec des nombres qui représentent le minimum de la forme. Nous les nommerons *déterminants caractéristiques*. Un tel déterminant sera, par exemple,

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{vmatrix},$$

les lignes

$$\begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{array}$$

désignant les représentations du minimum de la forme, comme dans Nr. 5. la table (1); leur nombre est $n$.

Ces déterminants constituent un élément essentiel dans notre méthode de composer des formes extrêmes; c'est pourquoi nous allons démontrer quelques-unes de leurs propriétés.

*Pour toute forme extrême, il existe au moins un déterminant caractéristique qui ne soit pas égal à zéro.*

Supposons le contraire et soient, comme dans la table (1),

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

toutes les représentations du minimum de $f$.

Il suit de notre supposition qu'il existe des nombres

$$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$$

qui ne sont pas zéro tous ensemble et tels qu'on ait

$$\begin{aligned} p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + \cdots + p_n\xi_n &= 0, \\ q_1\xi_1 + q_2\xi_2 + \cdots + q_n\xi_n &= 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot

$$f(p_1, p_2), \quad f(q_1, q_2)$$

soient égales au minimum $M$ de $F$. Il viendra

$$M^2 \geqq D\Delta^2.$$

Or on sait que

$$M \leqq \sqrt{\tfrac{4}{3} D};$$

donc

$$(\Delta) \leqq \sqrt{\tfrac{4}{3}},$$

$(\Delta)$ désignant la valeur absolue de $\Delta$.

En supposant que les nombres $p_1$, $p_2$, $q_1$, $q_2$ soient des entiers, on aura

$$(\Delta) = 0, \text{ ou } (\Delta) = 1.$$

Or on ne peut pas supposer $\Delta = 0$, car il viendrait

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2},$$

et comme $p_1$ est un nombre premier à $p_2$ et $q_1$ à $q_2$, on aurait nécessairement

$$p_1 = \pm q_1, \quad p_2 = \pm q_2,$$

et les deux représentations $(p_1 p_2)$ et $(q_1 q_2)$ ne seront point différentes entre elles.

De la même manière pour les formes ternaires dans la formule connue d'Euler

$$\begin{aligned}(p^2+q^2+r^2+s^2)\,(p'^2+q'^2+r'^2+s'^2)\\ = (pp'-qq'+rr'-ss')^2 + (pq'+qp'-rs'-sr')^2\\ + (pr'+sq'-qs'-rp')^2 + (ps'+qr'+rq'+sp')^2\end{aligned}$$

supposons

$$\begin{aligned} &p = uu' + vv' + ww', \quad && q = vw' - wv',\\ &r = wu' - uw', && s = uv' - vu',\\ &r' = u'', \quad q' = v'', \quad && p' = w'', \quad s' = 0,\end{aligned}$$

et, en ayant égard à l'identité

$$\begin{aligned}(uu'+vv'+ww')^2 + (vw'-wu')^2 + (wu'-uw')^2 + (uv'-vu')^2\\ = (u^2+v^2+w^2)\,(u'^2+v'^2+w'^2),\end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}(2)\qquad &(u^2+v^2+w^2)(u'^2+v'^2+w'^2)(u''^2+v''^2+w''^2)\\ &= [(vw'-wv')\,u'' + (wu'-uw')\,v'' + (uv'-vu')\,w'']^2\\ &\qquad + \text{une somme de carrés.}\end{aligned}$$

Soit maintenant $f(x, y, z)$ une forme positive ternaire du déterminant $-D$. Représentons-la sous la forme d'une somme de carrés $f(x, y, z) = (ax+by+cz)^2 + (a'x+b'y+c'z)^2 + (a''x+b''y+c''z)^2$. Faisons maintenant, dans la formule (2),

$$u = ap_1 + bp_2 + cp_3, \quad v = a'p_1 + b'p_2 + c'p_3,$$
$$u' = aq_1 + bq_2 + cq_3, \quad v' = a'q_1 + b'q_2 + c'q_3,$$
$$u'' = ar_1 + br_2 + cr_3, \quad v'' = a'r_1 + b'r_2 + c'r_3,$$
$$w = a''p_1 + b''p_2 + c''p_3,$$
$$w' = a''q_1 + b''q_2 + c''q_3,$$
$$w'' = a''r_1 + b''r_2 + c''r_3.$$

Alors on aura

$$f(p_1, p_2, p_3) f(q_1, q_2, q_3) f(r_1, r_2, r_3)$$
$$= D \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_2 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}^2 + \text{une somme de carrés.}$$

Par conséquent

$$f(p_1, p_2, p_3) f(q_1, q_2, q_3) f(r_1, r_2, r_3) \geq D\Delta^2,$$

$\Delta$ désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant qu'on ait

$$f(p_1, p_2, p_3) = f(q_1, q_2, q_3) = f(r_1, r_2, r_3) = M,$$

$M$ étant le minimum de $f$.

Il viendra

$$M^3 \geq D\Delta^2.$$

Or

$$M \leq \sqrt[3]{2D};$$

donc

$$(\Delta) \leq \sqrt{2}.$$

Ainsi

$$(\Delta) = 0 \text{ ou } (\Delta) = 1.$$

**10.** Voici une démonstration générale de notre théorème:

Soit $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ une forme positive à $n$ variables $x_1, x_2, \cdots x_n$. Faisons la transformation

$$x_1 = p_1 z_1 + q_1 z_2 + \cdots + r_1 z_n,$$
$$x_2 = p_2 z_1 + q_2 z_2 + \cdots + r_2 z_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = p_n z_1 + q_n z_2 + \cdots + r_n z_n,$$

$z_1, z_2, \cdots z_n$ étant de nouvelles variables.

Soit encore

$$\varphi = \Sigma a_{ik} z_i z_k$$

la forme transformée. On aura

$$a_{11} = f(p_1, p_2, \cdots p_n), \quad a_{22} = f(q_1, q_2, \cdots q_n).$$

Représentons $\varphi$ par la somme de carrés

$$\varphi = a_{11}\left(z_1 + \frac{a_{12}z_2 + a_{13}z_3 + \cdots + a_{1n}z_n}{a_{11}}\right)^2 + K(z_2 + \lambda z_3 + \cdots)^2 + L(z_3 + \cdots)^2 + \cdots + Nz_n^2,$$

où, pour abréger, nous avons désigné par $K, \lambda, L, \cdots N$ les quantités suivantes:

$$K = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}}, \quad \lambda = \frac{a_{23}a_{11} - a_{12}a_{13}}{a_{22}a_{11} - a_{12}^2};$$

$$L = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} : (a_{22}a_{11} - a_{12}^2),$$

$$N = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

On a, en premier lieu,

$$a_{11}K \cdot L \cdots N = D\Delta^2,$$

$\Delta$ désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

En second lieu, il est évident que

$$K \leq a_{22} = f(q_1, q_2 \cdots q_n), \cdots, N \leq a_{nn} = f(r_1, r_2 \cdots r_n).$$

Donc

$$f(p_1, p_2, \cdots p_n) f(q_1, q_2, \cdots q_n) \cdots f(r_1, r_2, \cdots r_n) \geq D\Delta^2.$$

Si maintenant nous supposons

$$f(p_1, p_2, \cdots p_n) = f(q_1, q_2, \cdots q_n) = \cdots = M,$$

$M$ étant le minimum de $f$, il viendra

$$M^n \geq D\Delta^2.$$

Or

$$M < \sqrt[n]{\mu D},$$

$\mu$ ne dépendant que de $n$.

Il résulte de là

$$(\Delta) \leq \sqrt{\mu}.$$

Donc le théorème est démontré.

On déduit de là les conséquences qui suivent:

1°. Pour les formes binaires, $\mu = \frac{4}{3}$, $(\Delta) \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$; $\Delta$ ne pouvant être nul (n° 9.), on aura $(\Delta) = 1$.

2°. Pour les formes ternaires, $\mu = (\frac{4}{3})^3$, $(\Delta) \leq (\frac{4}{3})^{\frac{3}{2}}$; par conséquent $(\Delta)$ est un des nombres 0, 1.

3°. Pour les formes quaternaires, d'après le théorème de M. Hermite, $\mu = (\frac{4}{3})^6$. Par conséquent $(\Delta) \leq (\frac{4}{3})^3$. Donc $(\Delta)$ ne peut être qu'un des nombres 0, 1, 2.

Il résulte de notre Mémoire*) que $(\Delta)$ ne peut être égal à 2 que pour la forme $V_4$.

En effet, afin que $(\Delta)$ soit égal à 2, il faut qu'on ait $\mu = 4$, et que par conséquent le minimum de la forme soit $\sqrt[4]{4D}$. Or un tel minimum ne peut avoir lieu que pour la forme $V_4$.

4°. Pour les formes à cinq variables, nous profiterons de la limite $\mu = 9$ donnée dans le Mémoire cité.

D'où il résulte $(\Delta) \leq 3$.

Remarquant que $(\Delta)$ ne peut être égal à 3, car dans ce cas on aurait

$$M = \sqrt[5]{9D},$$

ce qui est impossible (n° 10. du Mémoire), on voit que $(\Delta)$ est un des nombres 0, 1, 2.

**11.** En nous fondant sur les propositions établies dans les numéros précédents, nous pouvons établir les formes extrêmes directement.

A cet effet, nous allons chercher pour chacune d'elles les représentations de son minimum en nombre $\frac{n(n+1)}{2}$, qui la déterminent complétement. Nous rangerons ces systèmes de nombres en tables, comme nous avons fait dans le n° 4. pour la forme $Z$. Soit

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \alpha, & \beta, & \gamma, & \cdots, & \lambda \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \cdots, & \lambda' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha^{(\mu-1)}, & \beta^{(\mu-1)}, & \gamma^{(\mu-1)}, & \cdots, & \lambda^{(\mu-1)} \end{cases}$$

une table contenant $\mu$ systèmes de nombres.

Deux lignes

$$\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \lambda$$
$$\alpha', \beta', \gamma', \cdots, \lambda'$$

sont considérées comme distinctes si les égalités

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \cdots, \lambda' = \lambda,$$

ou ces autres

$$\alpha' = -\alpha, \quad \beta' = -\beta, \cdots, \lambda' = -\lambda$$

n'ont pas lieu toutes ensemble. Dans le cas contraire nous compterons ces deux lignes

$$\alpha, \beta, \gamma, \cdots \lambda$$
$$\alpha', \beta', \gamma', \cdots \lambda'$$

comme une seule.

*) Mathematische Annalen VI. Band, S. 366.

De plus, nous faisons abstraction du système dont tous les nombres sont égaux à zéro, et nous désignons par $n$ le nombre de colonnes dans la table (I).

Soient

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

$n$ variables, et supposons que chaque ligne de la table (I) comprenne leurs valeurs simultanées, de sorte qu'on ait successivement

$$\begin{aligned} &x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \cdots, x_n = \lambda, \\ &x_1 = \alpha', \quad x_2 = \beta', \cdots, x_n = \lambda', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Nous exprimerons cela en écrivant la table (I) comme il suit:

(I')

| $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\beta$ | $\cdots$ | $\lambda$ |
| $\alpha'$ | $\beta'$ | $\cdots$ | $\lambda'$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |

En remplaçant les variables

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

par les suivantes:

$$y_1, y_2, \cdots, y_n,$$

au moyen des équations

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1 y_1 + g_2 y_2 + \cdots + g_n y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= g_1^{(n-1)} y_1 + g_2^{(n-1)} y_2 + \cdots + g_n^{(n-1)} y_n, \end{aligned}$$

les nombres $g_i^{(k)}$ étant des entiers et le déterminant $\Sigma \pm g_1 g_2' \cdots g_{n-1}^{(n-1)}$ étant égal à $\pm 1$, nous déduirons de la table (I) une nouvelle table qui se rapporte aux variables

$$y_1, y_2, \cdots, y_n.$$

Soit

(II)

| $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_n$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $\cdots$ | $l$ |
| $a'$ | $b'$ | $\cdots$ | $l'$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $a^{(\mu-1)}$ | $b^{(\mu-1)}$ | $\cdots$ | $l^{(\mu-1)}$ |

cette table. Nous dirons qu'elle est équivalente à la table (I).

Remarque I. — Si nous changons l'ordre des colonnes dans une table quelconque ou les signes de tous les nombres d'une même colonne, nous formerons une nouvelle table à elle équivalente.

De plus, nous laissons l'ordre des lignes tout à fait arbitraire; par conséquent on pourra mettre les lignes de la table dans tel ordre que l'on voudra.

Remarque II. — Si l'un des déterminants formés avec $n$ lignes d'une table est égal à $\pm 1$, on peut toujours transformer cette table en une autre table équivalente où se trouveront les lignes suivantes:

$$\begin{array}{c} y_1\ y_2\ \cdots\ y_n \\ \hline 1\ 0\ \cdots\ 0 \\ 0\ 1\ \cdots\ 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\ 0\ \cdots\ 1. \end{array}$$

En effet, soit

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \cdots & \lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{(n-1)} & \beta^{(n-1)} & \gamma^{(n-1)} & \cdots & \lambda^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ce déterminant.

En faisant la transformation de la table (I) au moyen des formules

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha y_1 + \alpha' y_2 + \cdots + \alpha^{(n-1)} y_n, \\ x_2 &= \beta y_1 + \beta' y_2 + \cdots + \beta^{(n-1)} y_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= \lambda y_1 + \lambda' y_2 + \cdots + \lambda^{(n-1)} y_n, \end{aligned}$$

nous aurons la table

(2)
$$\begin{array}{c} y_1\ y_2\ \cdots\ y_n \\ \hline 1\ 0\ \cdots\ 0 \\ 0\ 1\ \cdots\ 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\ 0\ \cdots\ 1 \\ a\ b\ \cdots\ l \\ a'\ b'\ \cdots\ l' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

équivalente à la table (I).

Cette table contient $n$ lignes formée schacune avec l'unité et $n-1$ zéros qui correspondent aux lignes

$$\begin{array}{l} \alpha, \beta, \cdots \lambda \\ \alpha', \beta', \cdots \lambda' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

de la table (I).

Ajoutons encore que tous les nombres $a, b, c, \cdots, a', b', c', \cdots,$ ainsi que les déterminants comme $\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a, & b, & c, \\ a', & b', & c', \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix}$, etc., sont égaux aux déterminants formés avec $n$ lignes de la table (2). Par exemple:

$$a=\begin{vmatrix} a & b & c & \cdots & l \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c & \cdots & l \\ a' & b' & c' & \cdots & l' \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

**12.** Passons maintenant à la recherche des formes extrêmes dont les déterminants caractéristiques ne surpassent pas l'unité en valeur absolue. Cette question se réduit à la recherche d'un type auquel peuvent être ramenées toutes les tables

$$(1) \qquad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline \alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda' \\ . & . & . & . \end{array}$$

pour lesquelles les déterminants formés avec $n$ lignes quelconques sont égaux à zéro ou à $\pm 1$.

Relativement à la table (1) nous allons démontrer le théorème qui suit:

*Soit donnée une table* (1) *à* $\mu \geq \frac{n(n+1)}{2}$ *lignes distinctes.*

*Supposons que, parmi les déterminants formés avec n de ces lignes, il y en ait au moins un qui soit égal à* $\pm 1$ *et que tous les autres ne surpassent pas l'unité en valeur absolue.*

*Cela posé, on va voir que la table donnée contient précisément* $\frac{n(n+1)}{2}$ *lignes et qu'elle peut être transformée en l'équivalente*

$$\begin{array}{rrrl} 1, & 0, & 0, & \cdots 0 \\ 0, & 1, & 0, & \cdots 0 \\ 0, & 0, & 0, & \cdots 1 \\ 1, & -1, & 0, & \cdots 0 \\ 1, & 0, & -1, & \cdots 0 \\ . & . & . & . \end{array}$$

*Cette dernière table contient, en premier lieu, les n lignes*

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

*et encore* $\frac{n(n-1)}{2}$ *lignes formées chacune de deux unités* $+1$ *et* $-1$, *et* $n-2$ *zéros.*

Avant de démontrer le théorème général, nous allons indiquer une propriété de la table (1).

D'après la supposition, au moins un des déterminants formés avec $n$ lignes de la table (1) est égal à $\pm 1$. Donc, d'après le n° 11., elle peut être transformée dans une équivalente

$$(2)\qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a & b & c & \cdots & l \\ a' & b' & c' & \cdots & l' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Tous les nombres

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & \cdots \\ a' & b' & c' & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

ainsi que les déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \text{ etc.},$$

sont nuls ou $\pm 1$.

Maintenant on voit facilement que le théorème énoncé a lieu pour $n = 2$.

En effet, il existe dans ce cas quatre systèmes différents formés de zéros, de $+1$ et de $-1$. Ce sont

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ} & 1 \quad 0 \\ 2^{\circ} & 0 \quad 1 \\ 3^{\circ} & 1 \quad -1 \\ 4^{\circ} & 1 \quad 1. \end{array}$$

Les systèmes (3) et (4) donnent le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

égal à 2.

Par conséquent ils ne peuvent pas se trouver ensemble dans la table (1). Ainsi la table cherchée pour $n = 2$ ne peut être formée que de deux manières

$$\begin{array}{ccc} 1 \quad 0 & & 1 \; 0 \\ 0 \quad 1 & \text{et} & 0 \; 1 \\ 1 \quad -1 & & 1 \; 1. \end{array}$$

Il est évident que la seconde de ces tables est équivalente à la première et le théorème est démontré pour $n = 2$.

Nous allons démontrer maintenant que la table

$$(3)\qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & c & d & & \cdots & l \\ b' & c' & d' & & \cdots & l' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

résultant de la table (2), si l'on supprime la première ligne et la première colonne, a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes distinctes.

Soient

$$B\ C\ \cdots\ L$$
$$B'\ C'\ \cdots\ L'$$

deux systèmes non différents entre eux, savoir

$$B = \pm B',\quad C = \pm C',\ \cdots,\ L = \pm L'.$$

Echangeant alors, s'il est nécessaire, dans les tables (2) et (3) les signes de tous les termes de la ligne où se trouve le système $B', C', \cdots L'$, nous la ferons identique au système $B, C, \cdots, L$.

Ainsi deux lignes de la table (2), dans lesquelles se trouvent les systèmes $B, C, \cdots, L$ et $B', C', \cdots, L'$ seront

$$A\ B\ C\ \cdots\ L$$
$$A'\ B\ C\ \cdots\ L.$$

Donc ils ne sont distingués l'un de l'autre que par l'élément $A$.

Chacun des nombres distincts $A$ et $A'$ est égal à zéro ou à $\pm 1$.

Remarquons maintenant que les nombres $A$ et $A'$ ne peuvent être égaux à l'unité avec des signes différents.

En effet, si tous les nombres $B, C, \cdots L$ étaient égaux à zéro, les systèmes

$$A\ B\ C\ \cdots\ L$$
$$A'\ B\ C\ \cdots\ L$$

ne seraient pas distincts, ce qui est contraire à la supposition.

Donc l'un au moins des nombres $B, C, \cdots, L$ est égal à $\pm 1$. Soit, par exemple, $B = \pm 1$.

En supposant $A$ et $A'$ égaux à l'unité avec des signes différents, on aura le déterminant $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B \end{vmatrix}$ égal à $\pm 2$, ce qui ne peut être.

Ainsi l'un des éléments $A$ et $A'$ est zéro et l'autre l'unité avec un signe déterminé. On peut toujours supposer ce signe positif, car dans le cas contraire on pourrait changer le signe de tous les termes de la ligne à laquelle appartient $A$.

Nous désignerons l'ensemble de deux systèmes

$$A\ B\ C \cdots L$$
$$A'\ B\ C \cdots L$$

par une seule ligne

$$(\alpha) \qquad A\ B\ C \cdots L$$

l'élément $A$ ayant deux valeurs 0 et 1.

Les systèmes semblables à $(\alpha)$ seront dits les *systèmes doubles*.

Pour savoir le nombre des systèmes distincts de la table (3), il faut chercher combien il y a des systèmes doubles dans la table (2).

Quant à celui-ci nous aurons la proposition suivante:

*Le nombre de systèmes doubles de la table* (2) *ne surpasse pas* $n-1$.

Supposons, au contraire, que les systèmes doubles s'y trouvent en nombre au moins égal à $n$.

Soient

$$(4) \qquad \begin{array}{cccc} A & B & C & \cdots L \\ A_1 & B_1 & C_1 & \cdots L_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} & \cdots L_{n-1} \end{array}$$

ces systèmes.

Remarquons que dans la même colonne de cette table ne peuvent se trouver deux unités de signes différents.

En effet, soient, par exemple, $B$ et $B_1$ de tels éléments. Alors, supposant

$$A = 1, \quad A_1 = 1,$$

nous aurons le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

égal à $\pm 2$, ce qui ne peut avoir lieu. Il suit de là que, en changeant, s'il est nécessaire, les signes de tous les termes des colonnes, nous pouvons faire positifs tous les termes de la table (4).

Cela posé, nous allons voir si cette table est possible.

Parmi les systèmes

$$\begin{array}{ccc} B & C & \cdots L \\ B_1 & C_1 & \cdots L_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n-1} & C_{n-1} & \cdots L_{n-1} \end{array}$$

il en existe au moins un qui contient deux ou un plus grand nombre d'unités, car le nombre de systèmes distincts formés avec l'unité et $n-2$ zéros est égal à $n-1$.

D'après cela, il est permis de supposer

$$B = 1, \quad C = 1.$$

En outre, il est facile voir que les couples des nombres

$$(B_1, C_1), \quad (B_2, C_2), \cdots, (B_{n-1}\ C_{n-1})$$

peuvent se réduire à ceux-ci: (0, 0), (1, 1), et encore à l'un des deux couples (0, 1) et (1, 0).

En effet, supposons, quant à ces derniers, que parmi les couples $(B_1, C_1)$, $(B_2, C_2)$, $\cdots$, $(B_n, C_n)$ il y ait l'un et l'autre.

Soient, par exemple, $B_1 = 0$, $C_1 = 1$, $B_2 = 1$, $C_2 = 0$. Nous aurons alors le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

dont les éléments sont pris à la table (4). Si nous faisons $A = 0$, $A_1 = A_2 = 1$, le déterminant sera égal à 2, ce qui est impossible.

Ainsi, parmi les couples $(B_1, C_1)$, $(B_2, C_2)$, $\cdots$, il ne peut se trouver qu'un des couples (0, 1) et (1, 0), par exemple (0, 1).

Maintenant, en retranchant les éléments de la deuxième colonne de ceux de la troisième, nous transformons la table (4) en une nouvelle qui lui est équivalente. Les éléments de cette nouvelle table seront encore égaux à zéro ou à l'unité positive, car, d'après la supposition, les éléments de la troisième colonne ne sont pas inférieurs à ceux de la deuxième.

Dans la nouvelle table, le système $A, B, C, \cdots, L$ sera remplacé par celui-ci: $A, B, C - B, \cdots L$, contenant moins d'unités que le précédent, car $C - B = 0$

Quant aux autres lignes de la nouvelle table qui remplaceront les lignes $A_1, B_1, \cdots, L_1$, $A_2, B_2, \cdots, L_2$, chacun d'elles contiendra un même nombre d'unités ou ce nombre moins un.

On conçoit maintenant qu'en faisant plusieurs tranformations analogues aux précédentes on réduit toutes les lignes

$$\begin{array}{cccc} B_1 & C & \cdots & L \\ B_1 & C_1 & \cdots & L_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n-1} & C_{n-1} & \cdots & L_{n-1} \end{array}$$

aux autres, dont chacune contiendra une unité et $n - 2$ zéros.

D'où l'on voit que la table (4) est impossible, car le nombre de telles lignes distinctes est égal à $n - 1$. Donc le nombre de systèmes doubles ne surpasse pas $n - 1$ ou, en d'autres termes, le nombre de lignes distinctes de la table (3) n'est pas inférieur à $\frac{n(n-1)}{2}$. Maintenant passons à la démonstration de notre proposition.

Supposons qu'elle ait lieu pour le nombre $n - 1$ et faisons voir qu'elle subsiste encore pour le nombre $n$.

Le théorème ayant lieu, par hypothèse, pour le nombre $n - 1$, on voit que le nombre de systèmes distincts de la table (3) ne surpasse pas $\frac{n(n-1)}{2}$. Mais on vient de voir que ce nombre n'est pas inférieur à

$\frac{n(n-1)}{2}$; par conséquent il est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$. Il en résulte encore que le nombre de systèmes doubles de la table (2) est égal à $(n-1)$. Donc les systèmes dans la table (2) sont en nombre $\frac{n(n+1)}{2}$.

Nous avons vu que les systèmes doubles peuvent être toujours présentés ainsi:

$$\begin{array}{lccccc} A_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

les nombres $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ étant égaux à zéro ou à l'unité.

Donc étant donnés ces $n-1$ systèmes doubles, ainsi que le système $1, 0, 0, \cdots, 0$, nous ferons connaître qu'il se trouve $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ autres systèmes qui forment avec les systèmes mentionnés plus haut la table que nous cherchons.

Remarquons, en premier lieu, que si, dans le système quelconque

$$a, b, c, \cdots, l,$$

le premier élément $a$ est égal à zéro, deux des éléments $b, c, \cdots, l$ sont égaux à l'unité avec des signes différents et les autres sont nuls.

En effet, si, parmi les éléments

$$b, c, \cdots, l$$

il y en avait au moins trois égaux à l'unité, on en pourrait trouver deux égaux à l'unité avec un même signe. Soient, par exemple, $b = c = \pm 1$. En supposant, dans le déterminant,

$$\begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0 \\ A_2 & 0 & 1 \\ 0 & b & c \end{vmatrix},$$

$A_1 = A_2 = 1$, il vient

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 & \pm 1 \end{vmatrix} = \mp 2,$$

ce qui est impossible.

Donc l'élément $a$ étant nul, deux des éléments $b, c, \cdots, l$ sont égaux à l'unité avec des signes contraires et les autres sont des zéros.

Supposons, en second lieu, $a = \pm 1$. On peut toujours prendre $a = 1$, en changeant, dans le cas contraire, les signes de tous les termes de la ligne $a, b, c, \cdots, l$.

Alors aucun des nombres $b, c, \cdots, l$ ne sera égal à l'unité négative. En effet, en supposant, par exemple, $b = -1$ et $A_1 = 1$, on aurait le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$$

égal à $-2$.

Remarquons encore que parmi les nombres $b, c, \cdots, l$, il n'y en a plus de deux égaux à l'unité. Supposant, en effet, qu'il y en ait $k$ qui soient égaux à l'unité, nous aurons le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & 1\ 0 \cdots 0 \\ A_2 & 0\ 1 \cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n-1} & 0\ 0 \cdots 1 \\ a & b\ c \cdots l \end{vmatrix}.$$

En supposant

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = 1$$

il est facile de voir que ce déterminant est égal à $\pm (k-1)$, ce qui est encore impossible, $k$ étant supérieur à 2.

Donc les systèmes en nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ qu'il nous reste à chercher ne peuvent appartenir qu'à deux groupes

(I) $$0, b, c, \cdots, l,$$

où les deux nombres parmi $b, c, \cdots, l$ sont égaux à l'unité avec des signes contraires et les autres sont zéros; et

(II) $$1, b, c, \cdots, l,$$

deux des nombres $b, c, \cdots l$ étant égaux à l'unité positive et les autres à zéro.

Maintenant nous allons démontrer que, pour tous les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ systèmes cherchés, on peut prendre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ systèmes du premier groupe.

En effet, on va voir que, si la table contient les systèmes du second groupe, elle peut être transformée en une équivalente de telle manière, que les systèmes du second groupe disparaissent. Nous commencons par un cas particulier $n = 3$. Alors on a les systèmes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ A_1 & 1 & 0 \\ A_2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

savoir cinq systèmes.

Il nous faut encore chercher un système. Ce dernier système est un des deux suivants:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

système du 1er groupe
système du 2e groupe.

Considérons la table

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ A_1 & 1 & 0 \\ A_2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

ou, ce qui est le même, la table

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1. \end{matrix}$$

En retranchant les éléments de la 3e colonne de ceux de la 1e colonne, on aura la table

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1. \end{matrix}$$

Après le changement de signe de tous les termes de quelques lignes et colonnes, cette table se transformera dans la suivante:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1. \end{matrix}$$

D'où il suit:

*Si dans le cas de $n = 3$, la 6e ligne appartient au second groupe, la table peut être transformée dans une équivalente qui ne contient aucun système de ce groupe.*

Au moyen de cette transformation, les systèmes

$$\begin{matrix} A_1 & 1 & 0 \\ A_2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

se transforment en eux mêmes.

De plus, dans les 2e et 3e colonnes, rien n'est changé aux signes de quelques termes près.

Pour passer maintenant au cas général, nous supposons que la même propriété subsiste pour un nombre quelconque $n - 1$ et nous faisons voir qu'elle aura encore lieu pour un nombre $n$. Ainsi nous supposons que la table correspondante au nombre $n - 1$, dans laquelle existent les systèmes $1, 0, \cdots, 0, A_1, 1, 0, 0, \cdots, A_{n-2}, 0, 0, \cdots, 1$ peut être transformée dans l'équivalente

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
A_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
A_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
0 & -1 & +1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1, 1
\end{array}$$

et qu'au moyen de cette transformation les systèmes $1, 0, 0, \cdots, 0$; $A_1, 1, 0, 0, 0, \cdots, A_{n-2}, 0, 0, \cdots 1$ se transforment en eux-mêmes et dans les $2^e$, $3^e$, $\cdots$, $n-1^{ième}$ colonnes rien n'est changé aux signes de quelques termes près.

Cela posé, nous considérons la table correspondante au nombre $n$, dans laquelle existent les systèmes

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
A_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}$$

et encore $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ systèmes appartenant aux groupes I et II.

En effaçant la dernière colonne et ne considérant que les lignes distinctes, on aura la table correspondante à $n-1$.

Cette table, d'après ce qu'on a admis, peut être transformée dans la suivante:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
A_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1, & 1.
\end{array}$$

D'après cela, la table qui se rapporte au nombre $n$ peut être écrite comme il suit:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
A_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & \alpha_1 \\
0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & \alpha_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & \varrho_1 & \cdots & \tau_1 \\
\lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & \varrho_2 & \cdots & \tau_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\lambda_{n-2} & \mu_{n-2} & \nu_{n-2} & \varrho_{n-2} & \cdots & \tau_{n-2}.
\end{array}$$

Les systèmes

$$\begin{array}{l} 0\ -1\ 1\ 0\ \cdots\ \alpha_1 \\ 0\ -1\ 0\ 1\ \cdots\ \alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

doivent appartenir au premier groupe et par conséquent on aura

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0.$$

En outre, tous les nombres $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-2}$ sont égaux à $+1$, car le nombre de lignes distinctes ayant zéro en dernière colonne ne peut surpasser $\frac{n(n-1)}{2}$ et nous avons déjà toutes ces lignes.

Il est à remarquer encore que tous les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont nuls, ou tous sont égaux à $+1$ ($-1$ peut être converti en $+1$).

En effet, soit au contraire le nombre $\lambda$ égal à zéro dans l'une des lignes et dans l'autre à l'unité; savoir, supposons une des lignes appartenant au premier groupe et l'autre au second. Soient, par exemple,

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 = 0, & \mu_1 = -1, & \nu_1 = 0, & \cdots, \tau_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1, & \mu_2 = 0, & \nu_2 = 1, & \cdots, \tau_2 = 1. \end{array}$$

En ajoutant à ces deux systèmes celui-ci:

$$0,\ -1,\ +1,\ \cdots,\ 0,$$

on aura ce déterminant

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 & \tau_1 \\ \mu_2 & \nu_2 & \tau_2 \\ -1 & +1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

ce qui est impossible. Donc les nombres $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \cdots, \tau_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \cdots, \tau_2$ ne peuvent être assignés que de deux manières, ce qui nous conduit aux deux tables suivantes:

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{array}{llll} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ A_1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ A_{n-1} & 0 & 0 \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ 0 & -1 & 0 \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 \cdots & 1 \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & -1\ 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (\delta)\quad \left\{\begin{array}{llll} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ A_1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ A_{n-1} & 0 & 0 \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ 1 & 1 & 0 \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 \cdots & 1 \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ 1 & 0 & 0 \cdots & 1\ 1. \end{array}\right.$$

On transforme facilement la table ($\delta$) en table ($\gamma$) et au moyen de cette transformation les systèmes

$$\begin{array}{llll} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ A_1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ A_2 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ A_{n-1} & 0 & 0 \cdots & 1 \end{array}$$

se transforment en eux-mêmes et dans les $2^e$, $3^e$, $n^{ièmes}$ colonnes, rien ne change aux signes de quelques termes près.

Il est évident encore que tous les déterminants formés avec $n$ lignes de la table $(\gamma)$ sont égaux à zéro ou à $\pm 1$.

Enfin nous remarquons que, dans la table $(\gamma)$, les éléments $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$, au lieu de leurs valeurs 0 et $+1$, peuvent avoir les valeurs 0 et $-1$; cela revient à changer les signes de tous les termes de la $1^{re}$ colonne.

Donc le théorème est démontré.

**13.** On déduit de ce théorème la conséquence suivante:

Toutes les formes extrêmes à $n$ variables dont les déterminants caractéristiques sont égaux à zéro ou à $\pm 1$ sont équivalents à la forme

$$U_n = 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}\,[x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_1x_2 + \cdots].$$

Nous avons vu, en effet, que les tables correspondantes à telles formes se transforment dans la table qui correspond à $U_n$.

Pour abréger, nous dirons qu'il n'existe qu'une seule forme extrême $U_n$, dont les déterminants caractéristiques sont de 0 ou $\pm 1$.

En ayant égard aux limites des déterminants caractéristiques pour les formes binaires et ternaires (n° 9.), on voit qu'il existe une seule forme binaire extrême

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}D}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2),$$

ainsi qu'une seule forme extrême ternaire

$$\sqrt[3]{2D}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

## Deuxième Chapitre.

**14.** En passant à la recherche des formes extrêmes à 5 variables, remarquons d'abord qu'en vertu du n° 10. leurs déterminants caractéristiques ne surpassent pas deux en valeur absolue.

D'abord il faut démontrer que chacune d'elles en a au moins un égal à $\pm 1$. Cela deviendra évident si nous faisons voir que les formes extrêmes à cinq variables dont tous les déterminants caractéristiques sont égaux à zéro ou à $\pm 2$ sont impossibles.

En effet, supposons que $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ est une de ces formes et que la table

(1)
$$\left\{\begin{array}{ccccc} \underline{x_1} & \underline{x_2} & \underline{x_3} & \underline{x_4} & \underline{x_5} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array}\right.$$

contient toutes les représentations du minimum $M$ de $f$.

D'après le n° 7., cette table contiendra, au moins $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ lignes.

Comme tous les déterminants caractéristiques de $f$ ne sont pas égaux à zéro (n° 8.), il en existera au moins un égal à $\pm 2$.

Supposons que ce soit le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \end{vmatrix}$$

et, désignant par

$$z_1, \; z_2, \; z_3, \; z_4, \; z_5$$

les nouvelles variables, faisons la transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 z_1 + q_1 z_2 + \cdots + r_1 z_5, \\ x_2 &= p_2 z_1 + q_2 z_2 + \cdots + r_2 z_5, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_5 &= p_5 z_1 + q_5 z_2 + \cdots + r_5 z_5. \end{aligned}$$

Soit

$$\varphi(z_1, \; z_2, \; z_3, \; z_4, \; z_5)$$

la forme $f$ transformée.

En vertu de ce que tous les déterminants caractéristiques de $f$ sont égaux à zéro ou à $\pm 2$, il est évident qu'à toute ligne, comme

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \quad \cdots, \quad x_5 = s_5$$

de la table (1) correspondent les valeurs de $z_1, z_2, \cdots, z_5$ égales aux nombres entiers. Il est évident de plus que $\varphi$ étant comme $f$ une forme extrême tous les déterminants caractéristiques de $\varphi$ sont égaux à zéro ou à $\pm 1$ et que le minimum de $\varphi$ est égal à $M$.

En désignant par $D$ le déterminant de $f$, $4D$ sera celui de $\varphi$.

En vertu du n° 13., le minimum $M$ de $\varphi$ sera égal à la quantité

$$\sqrt[5]{\frac{64 D}{8}} > \sqrt[5]{9 D}.$$

Or cela est impossible, car on doit avoir

$$M < \sqrt[5]{9 D}.$$

Donc la forme telle que $f$ est impossible.

Remarque. — Par le même raisonnement on s'assure que la proposition démontrée dans ce numéro a encore lieu pour les formes quaternaires; savoir que parmi les déterminants caractéristiques des formes extrêmes quaternaires, il en est au moins un qui soit égal à l'unité.

A cet effet, il suffit de savoir que, pour les formes quaternaires

$$M < \left(\frac{4}{3}\right)^3 \sqrt[4]{D}.$$

**15.** Nous nous servirons dans ce qui suit d'une proposition relative aux formes quaternaires que nous allons maintenant démontrer.

Soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ une forme quaternaire qui reçoit la valeur minimum $M$, lorsqu'une des variables, par exemple $x_4$, est égale à 2, les autres variables ayant des valeurs convenables.

Supposons de plus que $f$ devienne égal à $M$ pour les trois systèmes de valeurs des variables que voici:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = 0, & x_4 = 0, \\ x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 0, & x_4 = 0, \\ x_1 = 0, & x_2 = 0, & x_3 = 1, & x_4 = 0. \end{cases}$$

En d'autres termes supposons que la table de $f$ contienne les lignes

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | 2 |

$a_1$, $a_2$, $a_3$ étant des entiers. Cela posé, nous allons démontrer que $f$ est l'une des huit formes équivalentes à $V_4$ qu'on obtient de l'expression

$$M\left[\left(x_1 \pm \tfrac{x_4}{2}\right)^2 + \left(x_2 \pm \tfrac{x_4}{2}\right)^2 + \left(x_3 \pm \tfrac{x_4}{2}\right)^2 + \tfrac{x_4^2}{4}\right],$$

en combinant les signes $\pm$ de toutes les manières possibles.

Comme le minimum $M$ de $f$ a les trois représentations (1), les coefficients de $x_1^2$, $x_2^2$, $x_3^2$ dans $f$ sont égaux à $M$; ainsi l'on aura

$$f = Mx_1^2 + Mx_2^2 + Mx_3^2 + \cdots.$$

Représentons $f$ sous la forme d'une somme de carrés:

$$f = M\left[(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_4)^2 + N(x_2 + \delta x_3 + \varepsilon x_4)^2 + P(x_3 + \zeta x_4)^2 + Qx_4^2\right].$$

Remarquons d'abord que le coefficient $Q$ ne peut surpasser $\frac{1}{4}$, car, si l'on avait

$$Q > \tfrac{1}{4},$$

on aurait

$$f(a_1, a_2, a_3, 2) > 4QM > M,$$

ce qui est impossible.

Ensuite faisons voir que le coefficient $Q$ ne peut pas être non plus inférieur à $\frac{1}{4}$. En effet, dans le cas contraire, après avoir supposé $x_4 = 1$ et attribué aux variables $x_3$, $x_2$, $x_1$ des valeurs telles, que chacun des carrés $(x_3 + \zeta x_4)^2$, $(x_2 + \delta x_3 + \varepsilon x_4)^2$, $(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_4)^2$ ne surpasse pas $\frac{1}{4}$, la forme $f$ deviendrait inférieure à $M$, ce qui ne peut avoir lieu. Donc $Q$ doit être égal à $\frac{1}{4}$.

En outre, on aura

$$N = P = 1.$$

En effet, il est évident d'abord que chacune de ces quantités $N$ et $P$ ne surpasse pas l'unité. D'un autre côté, aucune d'elles ne peut être inférieure à l'unité, car dans ce cas, en prenant $x_4 = 1$ et attribuant aux nombres $x_1$, $x_2$, $x_3$ des valeurs telles que les trois carrés mentionnés ne soient pas supérieurs à $\frac{1}{4}$, on aurait la valeur de $f$ moindre que $M$. Donc on aura

$$\begin{aligned} f &= Mx_1^2 + Mx_2^2 + Mx_3^2 + \cdots \\ &= M[(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_4)^2 + (x_2 + \delta x_3 + \varepsilon x_4)^2 \\ &\qquad + (x_3 + \zeta x_4)^2 + \tfrac{1}{4} x_4^2]. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients des $x_2^2$ et $x_3^2$ dans l'une et l'autre expression de $f$, et en remarquant que le coefficient de $x_4^2$ ne peut être moindre que $M$, il vient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \delta = 0,$$
$$\gamma^2 + \varepsilon^2 + \zeta^2 \geqq \tfrac{3}{4}.$$

Comme les quantités $\gamma$, $\varepsilon$, $\zeta$ ne surpassent pas $\frac{1}{2}$, en valeur absolue, on doit avoir

$$\gamma = \pm \tfrac{1}{2}, \quad \varepsilon = \pm \tfrac{1}{2}, \quad \zeta = \pm \tfrac{1}{2}.$$

Le théorème est démontré.

**16.** En ayant égard aux limitations des déterminants caractéristiques pour les formes quaternaires (n° 10.), ainsi qu'à la proposition du n° 13., on voit qu'il existe seulement deux formes extrêmes quaternaires

$$2\sqrt[4]{\frac{D}{5}}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4),$$

$$\sqrt[4]{4D}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \pm x_1x_4 \pm x_2x_4 \pm x_3x_4).$$

Il en résulte que $\sqrt[4]{4D}$ est la limite précise des minima des formes quaternaires.

Nous avons ainsi une nouvelle démonstration de ce théorème.

**17.** Il suit de ce qui précède que toutes les formes extrêmes à cinq variables se distribuent en deux groupes:

dans le premier sont contenues les formes dont les déterminants caractéristiques ne surpassent pas l'unité, en valeur absolue; ces formes sont équivalentes à $U_5$ en vertu du n° 13.; dans le second se trouvent les formes pour chacune des quelles il existe des déterminants caratéristiques égaux à $\pm 2$.

En considérant le dernier groupe de formes nous avons à distinguer deux cas:

1°. Lorsque toutes les valeurs des variables qui donnent le minimum de la forme sont égaux à zéro et à $\pm 1$.

2°. Lorsque parmi ces valeurs se trouvent égales à $\pm 2$.

Le premier de ces cas se réduit toujours au second, en vertu de la proposition que nous allons démontrer.

Soit $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une forme extrême à $n$ variables, et supposons que son minimum est donné par les valeurs 0 et $\pm 1$ de $x_1$, $x_2$, $\cdots$, $x_n$.

Supposons de plus que ces déterminants caractéristiques ne surpassent pas deux en valeur absolue et qu'il en existe qui soient égaux à $\pm 1$ et à $\pm 2$.

Cela posé, on trouvera dans la table de $f$ les $n$ lignes

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{vmatrix},$$

qui composent le déterminant égal à $\pm 2$.

Nous allons démontrer que dans cette table on trouvera une certaine ligne qui, avec $n-1$ lignes du déterminant (1), composera un nouveau déterminant égal à $\pm 1$.

Supposons le contraire et, en désignant par

$$x_1', \; x_2', \; \cdots, \; x_n'$$

les nouvelles variables, faisons la transformation

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = m_1 x_1' + q_1 x_2' + \cdots + r_1 x_n', \\ x_2 = m_2 x_1' + q_2 x_2' + \cdots + r_2 x_n', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = m_n x_1' + q_n x_2' + \cdots + r_n x_n'. \end{cases}$$

Désignons par

$$F(x_1', x_2', \cdots, x_n')$$

la forme $f$ transformée.

Il est évident que, en vertu de notre supposition pour toute ligne

$$x_1 = k_1, \quad x_2 = k_2, \; \cdots \; x_n = k_n$$

de la table de $f$, on obtiendra, par les équations (2), des valeurs entières de $x_1'$, $x_2'$, $\cdots$ $x_n'$ qui sont égaux à zéro et à $\pm 1$.

En désignant maintenant par $\Delta$ un déterminant caractéristique de $f$ et par $\delta$ son correspondant de la forme $F$, on aura

$$\Delta = \pm 2\,\delta,$$

$\Delta$ et $\delta$ étant des entiers.

Or nous avons supposé qu'il y a un certain $\Delta = \pm 1$; par conséquent on obtiendra

$$\delta = \pm \tfrac{1}{2},$$

ce qui est impossible.

On ne peut donc supposer que les $n-1$ lignes quelconques du déterminant (1) composent avec toute ligne de la table de $f$ un déterminant égal à zéro ou à $\pm 2$.

Il existe, par conséquent, dans cette table une certaine ligne

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$

qui, avec $n-1$ lignes, comme

$$\begin{array}{l} q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n \end{array}$$

compose le déterminant

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} p_1, & p_2, & \cdots, & p_n \\ q_1, & q_2, & \cdots, & q_n \\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_n \end{vmatrix}$$

égal à $\pm 1$.

Faisons maintenant la transformation

$$\begin{array}{l} x_1 = p_1 y_1 + q_1 y_2 + \cdots + r_1 y_n, \\ x_2 = p_2 y_1 + q_2 y_2 + \cdots + r_2 y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = p_n y_1 + q_n y_2 + \cdots + r_n y_n, \end{array}$$

et soit

$$\varphi(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$$

la forme $f$ transformée.

Les formes $f$ et $\varphi$ sont équivalentes, et aux valeurs

$$x_1 = m_1,\quad x_2 = m_2,\ \cdots,\ x_n = m_n$$

correspond la valeur $y_1 = \pm 2$.

Dans la table de $\varphi$ on trouvera par conséquent les $n$ lignes

$$(4) \qquad \begin{array}{|cccc} \underline{y_1} & \underline{y_2} & \cdots & \underline{y_n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

qui correspondent aux lignes (3) de la table de $f$ et la ligne correspondante à $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$ commencera par le nombre $\pm 2$.

Ainsi la forme $f$ peut être transformée dans une équivalente $\varphi$, dont la table contiendra les $n$ lignes (4) et dans les autres lignes on trouvera les nombres égaux à $\pm 2$.

18. Désignons maintenant par $f$ une forme extrême à cinq variables et telle, que parmi les déterminants caractéristiques correspondants à cette forme il y en a au moins un égal à $\pm 2$.

On a vu (n° 17.) que la table correspondante à $f$ peut être trans-

formée dans une autre à elle équivalente et telle, qu'elle contienne les lignes

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1. |

En outre, cette table contiendra nécessairement une ligne ayant au moins un terme égal à $\pm 2$. On peut évidemment supposer que ce terme est égal à $+2$ et se trouve dans la 5e colonne. Donc on aura la ligne

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad 2.$$

Les nombres $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ peuvent être supposés positifs et leurs valeurs, comme on sait, ne surpassent pas 2.

Nous remarquons d'abord que deux des nombres $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ ne peuvent être nuls. En effet, soit, par exemple,

$$a_1 = a_2 = 0.$$

Cela étant, si l'on pose dans la forme $f$

$$x_1 = x_2 = 0,$$

on aura la forme ternaire, dont le minimum sera évidemment égal à celui de $f$. Parmi les valeurs des variables $x_3$, $x_4$, $x_5$, pour lesquelles la forme ternaire prendra son minimum, il y a les suivantes:

| $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| $a_3$ | $a_4$ | 2. |

Ces trois lignes nous donnent le déterminant caractéristique égal à 2, ce qui est impossible par rapport aux formes ternaires (n° 9.).

On voit de la même manière que deux des nombres $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ ne peuvent être égaux à 2.

En effet, soient, par exemple,

$$a_1 = a_2 = 2.$$

Posant dans la forme $f$

$$x_1 = x_5, \quad x_2 = x_5,$$

nous aurons la forme ternaire à variables $x_3$, $x_4$, $x_5$. Le minimum de cette forme est égal au minimum de $f$; car les coefficients de $x_3^2$ et $x_4^2$ sont égaux à ce minimum. Comme dans la table de la forme $f$ nous avons les lignes

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & a_3 & a_4 & 2 \end{matrix}$$

la forme ternaire aura les représentations suivantes de son minimum:

$$\begin{matrix} x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & 2. \end{matrix}$$

Ces lignes donnent encore un déterminant caractéristique égal à 2, ce qui est impossible.

Remarquons enfin que deux des nombres

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$$

ne peuvent être égaux, l'un à 2 et l'autre à zéro.

En effet, soient, par exemple,

$$a_1 = 0,\quad a_2 = 2.$$

Cela étant, posons, dans la forme $fx_1 = 0$, $x_2 = x_5$. On aura une forme ternaire à variables $x_3$, $x_4$, $x_5$.

Les représentations du minimum de $f$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a_3 & a_4 & 2 \end{matrix}$$

donnent pour le minimum de la forme ternaire les représentations suivantes:

$$\begin{matrix} x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & 2 \end{matrix}$$

ce qui est impossible.

Il suit, de tout ce que nous avons dit, que toutes les lignes contenant le terme $\pm 2$, comme

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ 2,$$

ne peuvent être que de trois espèces:

1°. Un des nombres $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ est nul et les trois autres sont des unités. En posant, par exemple $a_1 = 0$, on aura la ligne

$$0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2.$$

2°. Un des nombres $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, par exemple, $a_1$ est 2, et les trois autres sont des unités. Ainsi on aura la ligne

$$2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2.$$

3°. Tous les nombres $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ sont des unités. Alors la table de la forme $f$ contiendra la ligne

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2.$$

**19.** Examinons maintenant le cas dans lequel la forme a une représentation

$$0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2.$$

Nous allons démontrer que les formes extrêmes qui admettent outre cette représentation encore ces trois-ci:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

sont équivalentes à $V_5$.

On voit que, dans le cas actuel, en supposant dans la forme $x_1 = 0$, on aura la forme (n° 15.)

$$M[(x_2 - \tfrac{1}{2}x_5)^2 + (x_3 - \tfrac{1}{2}x_5)^2 + (x_4 - \tfrac{1}{2}x_5)^2 + \tfrac{1}{4}x_5^2]$$

$M$ étant le minimum de la forme cherchée à 5 variables. Par conséquent, cette forme peut être écrite comme il suit:

$$(1)\quad M[(x_2 - \tfrac{1}{2}x_5 + \lambda x_1)^2 + (x_3 - \tfrac{1}{2}x_5 + \mu x_1)^2 + (x_4 - \tfrac{1}{2}x_5 + \nu x_1)^2 + \tfrac{1}{4}(x_5 + \sigma x_1)^2 + K x_1^2].$$

Remarquant, en premier lieu, que tous les coefficients d'une forme extrême se trouvent déterminés complétement au moyen des équations linéaires qui expriment que la forme prend son minimum, les variables étant égales aux nombres donnés, on voit que la forme (1) doit avoir au moins 5 représentations de son minimum servant à déterminer les quantités

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \sigma,\ K.$$

Il est évident que, dans aucune de ces représentations, $x_1$ ne peut être nul; en second lieu, en ayant égard à ce que le déterminant de la forme (1) doit surpasser $\frac{1}{3}M^5$, on voit que la quantité $K$ surpasse $\frac{1}{3}$. Donc la forme (1) ne peut avoir la valeur minimum qu'en supposant $x_1 = \pm 1$, si $x_1$ est distinct de zéro.

En faisant, s'il est nécessaire, la transformation

$$\begin{aligned} x_5 &= x_5' + p x_1', \\ x_2 &= x_2' + q x_1', \\ x_3 &= x_3' + r x_1', \\ x_4 &= x_4' + s x_1', \\ x_1 &= x_1', \end{aligned}$$

$p$, $q$, $r$, $s$ étant des nombres entiers, on peut toujours arriver à la forme dans laquelle les quantités $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\sigma$ ne seront pas supérieures à $\frac{1}{2}$. De plus, toutes ces quantités peuvent être supposées positives. En effet, si $\sigma$ est négatif, il suffit de changer le signe de $x_1$ pour avoir, au lieu de $\sigma$, $-\sigma$, savoir une quantité positive, et si l'une des quantités

$\lambda$, $\mu$, $\nu$, par exemple $\lambda$, est négative, il suffit de substituer $-x_2'+x_5$ à $x_2$ pour transformer le carré $(x_2-\frac{1}{2}x_5+\lambda x_1)^2$ en un autre $(x_2'-\frac{1}{2}x_5-\lambda x_1)^2$, $-\lambda$ étant positif.

Cherchons maintenant quelles valeurs doivent avoir les variables $x_2, x_3, x_4, x_5$ pour que la forme (1) soit minimum en supposant $x_1=\pm 1$. On peut toujours prendre, bien entendu, $x_1 = 1$.

Nous avons ici deux cas à distinguer:

1°. $x_5$ étant un nombre pair ou zéro, les valeurs minima des carrés

$$(x_2-\tfrac{1}{2}x_5+\lambda x_1)^2, \quad (x_3-\tfrac{1}{2}x_5+\mu x_1)^2, \quad (x_1-\tfrac{1}{2}x_5+\nu x_1)^2$$

sont respectivement égales à $\lambda^2$, $\mu^2$, $\nu^2$. Le minimum de la forme, en supposant $x_5$ donné, sera

$$M[\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\tfrac{1}{4}(x_5+\sigma)^2+K]. \tag{2}$$

De toutes les valeurs (2) correspondantes aux différentes valeurs de $x_5$, celle qui correspond à $x_5 = 0$ est évidemment la moindre. Cette valeur est

$$M[\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\tfrac{1}{4}\sigma^2+K]. \tag{3}$$

On l'obtient en supposant dans la forme (1)

$$x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_5 = 0.$$

Pour les autres valeurs des variables $x_2$, $x_3$, $x_4$, la forme (1) ne peut avoir une valeur égale à (3) que dans le cas où l'un au moins des nombres $\lambda$, $\mu$, $\nu$ est égal à $\frac{1}{2}$. Si, par exemple, $\lambda = \frac{1}{2}$, on peut supposer $x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 0$, pour que la forme prenne la valeur (3).

2°. $x_5$ étant un nombre impair, les valeurs minima des carrés

$$(x_2-\tfrac{1}{2}x_5+\lambda x_1)^2, \quad (x_3-\tfrac{1}{2}x_5+\mu x_1)^2, \quad (x_1-\tfrac{1}{2}x_5+\nu x_1)^2,$$

sont respectivement $(\frac{1}{2}-\lambda)^2$, $(\frac{1}{2}-\mu)^2$, $(\frac{1}{2}-\nu)^2$, $x_2, x_3, x_4$ étant, bien entendu, des nombres entiers, et la valeur minimum de la forme (1) lorsque $x_5$ a la valeur assignée d'avance sera

$$M[(\tfrac{1}{2}-\lambda)^2+(\tfrac{1}{2}-\mu)^2+(\tfrac{1}{2}-\nu)^2+\tfrac{1}{4}(x_5+\sigma)^2+K]. \tag{4}$$

De toutes les valeurs (4) correspondantes aux différentes valeurs de $x_5$, celle qui correspondra à $x_5 = -1$ sera la moindre. Cette valeur est

$$M[(\tfrac{1}{2}-\lambda)^2+(\tfrac{1}{2}-\mu)^2+(\tfrac{1}{2}-\nu)^2+\tfrac{1}{4}(1-\sigma)^2+K], \tag{5}$$

et on l'aura, en supposant dans la forme (1)

$$x_2 = x_3 = x_4 = -1, \quad x_5 = -1, \quad x_1 = 1.$$

Pour les autres valeurs des variables $x_2$, $x_3$, $x_4$, la forme (1) ne peut avoir une valeur égale à (5) que dans le cas où l'une au moins des quantités $\lambda$, $\mu$, $\nu$ est égale à zéro. Si, par exemple, $\lambda = 0$, la forme (1) prend la valeur (5) pour $x_5 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = -1$, $x_1 = 1$.

Cela posé, $M$ étant le minimum de la forme (1), on aura

$$(6)\qquad \begin{cases} \lambda^2+\mu^2+\nu^2+\frac{1}{4}\sigma^2+K\geqq 1, \\ (\frac{1}{2}-\lambda)^2+(\frac{1}{2}-\mu)^2+(\frac{1}{2}-\nu)^2+\frac{1}{4}(1-\sigma)^2+K\geqq 1. \end{cases}$$

De plus

$$(7)\qquad \tfrac{1}{2}\geqq\lambda\geqq 0,\quad \tfrac{1}{2}\geqq\mu\geqq 0,\quad \tfrac{1}{2}\geqq\nu\geqq 0,$$

comme nous avons dit plus haut.

De ce qui précède il suit que toutes les équations entre les coëfficients $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\sigma$, $K$ qui résultent des représentations du minimum de la forme (1), pour lesquelles $x_1=1$, équivalent à celles qu'on obtient, en convertissant quelques inégalités (6) et (7) en équations.

Au moins cinq de ces inégalités doivent être converties en équations pour qu'on puisse déterminer $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\sigma$, $K$. Il suit de là que les équations

$$(8)\qquad \begin{cases} \lambda^2+\mu^2+\nu^2+\frac{1}{4}\sigma^2+K=1, \\ (\frac{1}{2}-\lambda)^2+(\frac{1}{2}-\mu)^2+(\frac{1}{2}-\nu)^2+\frac{1}{4}(1-\sigma)^2+K=1 \end{cases}$$

doivent être satisfaites, car autrement les quantités $\sigma$ et $K$ ne peuvent être déterminées.

De plus, trois au moins des inégalités (7) doivent être converties en équations. Supposons $\lambda\leqq\mu\leqq\nu$, ce qui est évidemment permis.

Remarquons maintenant qu'on ne peut faire

$$\lambda=\mu=\nu=0,$$

car il en résulterait $K=0$, $\sigma=2$, ce qui est impossible.

On ne peut faire non plus

$$\lambda=\mu=\nu=\tfrac{1}{2},$$

car il s'ensuivrait $K=0$, $\sigma=-1$.

On voit donc que $\lambda$ doit être égal à zéro et $\nu=\frac{1}{2}$.

Cela posé, $\mu$ ne peut pas être égal à zéro, car, dans le cas contraire, les équations (8) nous donneraient

$$\sigma=1,\quad K=\tfrac{1}{2},$$

à cause de $\lambda=0$, $\mu=0$, $\nu=\frac{1}{2}$.

Mais, $\sigma$ ne surpassant pas $\frac{1}{2}$, cette supposition est impossible.

Donc $\mu=\frac{1}{2}$. Il résulte des équations (8) que $K=\frac{1}{2}$, $\sigma=0$. Ainsi nous aurons la forme extrême

$$M[(x_2-\tfrac{1}{2}x_5)^2+(x_3-\tfrac{1}{2}x_5+\tfrac{1}{2}x_1)^2+(x_4-\tfrac{1}{2}x_5+\tfrac{1}{2}x_1)^2+\tfrac{1}{4}x_5^2+\tfrac{1}{2}x_1^2],$$

équivalente à $V_5$.

**20.** Maintenant nous passons au cas où la table de la forme $f$ contient la ligne

$$(1)\qquad 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2.$$

En transformant la forme $f$ au moyen de la substitution

$$x_1 = x_1' + x_5',$$
$$x_2 = x_2',$$
$$x_3 = x_3',$$
$$x_4 = x_4',$$
$$x_5 = x_5',$$

on voit que les lignes

$$0, 1, 0, 0, 0,$$
$$0, 0, 1, 0, 0,$$
$$0, 0, 0, 1, 0,$$

et la ligne (1) se transforment respectivement dans les suivantes:

$$0, 1, 0, 0, 0,$$
$$0, 0, 1, 0, 0,$$
$$0, 0, 0, 1, 0,$$
$$0, 1, 1, 1, 2.$$

Mais nous avons vu que toutes les formes extrêmes dont la table contient ces quatre lignes sont équivalentes à $V_5$.

**21.** Il nous reste à examiner le cas où on a la représentation

$$1, 1, 1, 1, 2.$$

Nous avons les 6 lignes suivantes:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (2) | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| (3) | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| (4) | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| (5) | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| (6) | 1 | 1 | 1 | 1 | 2. |

Supposons maintenant que l'une quelconque des autres lignes soit

(B) $\qquad x_1 = b_1, \quad x_2 = b_2, \quad x_3 = b_3, \quad x_4 = b_4, \quad x_5 = b_5.$

Il est facile de démontrer qu'aucun de ses termes n'est égal à $\pm 2$. En effet, soit d'abord

$$b_5 = \pm 2.$$

En changeant, s'il est nécessaire, les signes de tous les termes de la ligne (B), on peut faire $b_5 = +2$. Alors aucun des nombres $b_1, b_2, b_3, b_4$ ne sera ni zéro, ni $\pm 2$, car dans cette supposition on aurait le cas qui a été déjà discuté dans les n$^{os}$ 19. et 20.

Aucun de ces nombres ne sera non plus égal à $-1$, car dans ce cas nous aurions le déterminant caractéristique

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & b_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

qui est impossible (voir le n$^o$ 10.).

Il reste à supposer

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = + 1;$$

or cela est également impossible, car alors la ligne (B) devient identique avec la ligne (6).

La supposition

$$b_5 = \pm 2$$

est par conséquent à rejeter.

Supposons ensuite que, parmi les nombres

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4$$

on en trouvera un égal à $\pm 2$.

Soit, par exemple,

$$b_4 = \pm 2;$$

comme précédemment, on peut faire

$$b_4 = + 2,$$

car il est permis de changer les signes de tous les termes de la ligne (B).

Alors aucun des nombres $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ ne sera ni zéro, ni $\pm 2$ et, par conséquent, ils sont égaux à l'unité en valeur absolue.

Or on aura dans ce cas le déterminant caractéristique

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b_5 \end{vmatrix} = - 4 + b_5,$$

supérieur à 2 en valeur absolue, ce qui est impossible (n° 10.).

Aucun des termes de la ligne (B) ne peut donc être supposé égal à $\pm 2$.

Nous allons maintenant démontrer que $b_5$ est égal à $\pm 1$.

En effet, supposons le contraire. Le cas $b_5 = \pm 2$ étant inadmissible, il reste à supposer

$$b_5 = 0.$$

Alors au moins deux des nombres $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ sont égaux à $\pm 1$, car, si un seul d'entre eux était $\pm 1$ et les autres des zéros, la ligne (B) coinciderait avec une des suivantes:

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4).$$

Par conséquent au moins deux des nombres $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ sont égaux à $\pm 1$.

En changeant, s'il est nécessaire, l'ordre des quatres premières colonnes et les signes de tous les termes de la ligne (B), ce qui ne change pas l'ensemble des lignes

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ (5),\ (6),$$

on peut faire

$$b_1 = + 1.$$

En supposant donc $b_1 = + 1$, faisons dans la table de $f$ la transformation

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = -x_2' + b_2 x_1', \quad x_3 = -x_3' + b_3 x_1', \quad x_4 = -x_4' + b_4 x_1',$$
$$x_5 = -x_5';$$

les sept lignes (1), (2), (3), (4), (5), (6), (B) seront transformées respectivement dans les suivantes:

| | $x_1'$ | $x_2'$ | $x_3'$ | $x_4'$ | $x_5'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (1)′ | 1 | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | 0 |
| (2)′ | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 |
| (3)′ | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 |
| (4)′ | 0 | 0 | 0 | −1 | 0 |
| (5)′ | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 |
| (6)′ | 1 | $b_2 - 1$ | $b_3 - 1$ | $b_4 - 1$ | −2 |
| (B)′ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0. |

Comme au moins un des nombres $b_2$, $b_3$, $b_4$ est $\pm 1$ la ligne (6)′ contiendra deux fois le nombre $\pm 2$, ou zéro et $-2$, et nous aurons le cas déjà discuté. Ainsi il faut poser

$$b_5 = \pm 1.$$

Or on peut faire

$$b_5 = +1,$$

en changeant au besoin les signes de tous les termes de la ligne (B).

Maintenant aucun des nombres $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ ne sera $-1$, car, si l'on avait, par exemple,

$$b_2 = -1,$$

on obtiendrait le déterminant caractéristique impossible

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ b_2 & b_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Ainsi, dans la ligne (B), le terme $b_5$ est $+1$; parmi les autres

$$b_1, \ b_2, \ b_3, \ b_4,$$

quelques-uns sont des zéros et au moins un seul est égal à $+1$. Il est possible aussi que tous les nombres $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ soient égaux à $+1$.

22. Dans le cas que nous discutons avec les lignes

(I)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (2) | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| (3) | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| (4) | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| (5) | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| (6) | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |

on ne peut donc combiner que les suivantes:

$$
\begin{array}{lll}
 & (7) & 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\
 & (8) & 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
(II) & (9) & 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
 & (10) & 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
 & (11) & 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 & (12) & 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
 & (13) & 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
(III) & (14) & 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\
 & (15) & 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
 & (16) & 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 & (17) & 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \\
 & (18) & 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
(IV) & (19) & 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 & (20) & 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 & (21) & 1\ 1\ 1\ 1\ 1.
\end{array}
$$

Des 6 premières lignes nous composons le premier groupe, de quatre (7), (8), (9), (10) le deuxième, de six (11), (12), (13), (14), (15), (16) le troisième, et de quatre (17), (18), (19), (20) le quatrième. La ligne (21) n'entre dans aucun de ces groupes.

En nous proposant maintenant de trouver toutes les formes extrêmes $f$ non équivalentes à $V_5$ et qui admettent les six représentations de leur minimum contenues dans les lignes du premier groupe, nous avons à résoudre le problème suivant:

Choisir, de toutes les manières possibles, parmi les 19 lignes

$$(7), (8), (9), \cdots, (21)$$

au moins neuf telles, que l'ensemble de ces lignes avec les six du premier groupe détermine complétement une forme extrême non équivalente à $V_5$, en supposant que son minimum $M$ soit donné.

Faisons d'abord quelques remarques qui nous permettront de diminuer le nombre de différentes combinaisons possibles.

Remarque I. — Les quatre lignes du 4e groupe ne peuvent toutes se trouver parmi les lignes cherchées, car elles composent le déterminant caractéristique impossible

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Donc on ne peut prendre plus de trois lignes du 4e groupe.

Remarque II. — On ne peut prendre non plus les 4 lignes du 2e groupe avec la ligne (21), car on aura, comme précédemment, le déterminant caractéristique impossible

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Remarque III. — Toute combinaison de 3 lignes du 2e groupe avec la ligne (21) équivaut à l'ensemble de toutes les 4 lignes de ce groupe.

En effet, quelle que soit cette combinaison, elle sera transformée dans l'ensemble de lignes du 2e groupe par l'une des transformations

(A) $x_1 = x_1'$, $x_2 = -x_2' + x_1'$, $x_3 = -x_3' + x_1'$, $x_4 = -x_4' + x_1'$, $x_5 = -x_5' + 2x_1'$,

(B) $x_1 = -x_1' + x_2'$, $x_2 = x_2'$, $x_3 = -x_3' + x_2'$, $x_4 = -x_4' + x_2'$, $x_5 = -x_5' + 2x_2'$,

(C) $x_1 = -x_1' + x_3'$, $x_2 = -x_2' + x_3'$, $x_3 = x_3'$, $x_4 = -x_4' + x_3'$, $x_5 = -x_5' + 2x_3'$,

(D) $x_1 = -x_1' + x_4'$, $x_2 = -x_2' + x_4'$, $x_3 = -x_3' + x_4'$, $x_4 = x_4'$, $x_5 = -x_5' + 2x_4'$.

Par exemple, les lignes (7), (8), (9), (21) seront transformées par la transformation (D), respectivement dans les suivantes:

| $x_1'$ | $x_2'$ | $x_3'$ | $x_4'$ | $x_5'$ |
|---|---|---|---|---|
| −1 | 0 | 0 | 0 | −1 |
| 0 | −1 | 0 | 0 | −1 |
| 0 | 0 | −1 | 0 | −1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1. |

Or ce sont précisément les 4 lignes du 2e groupe par rapport aux variables

$$x_1', x_2', x_3', x_4', x_5'.$$

Remarquons encore que l'ensemble des groupes (I), (III) et (IV) ne sera changé par aucune des 4 transformations

(A), (B), (C), (D).

Remarque IV. — Si l'on prend toutes les 4 lignes du 2e groupe pour composer les lignes cherchées, on ne pourra prendre avec elles aucune ligne du 4e groupe.

En effet la transformation

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = x_4', \quad x_5 = x_1' + x_2' + x_3' + x_4' - x_5'$$

ne changera pas l'ensemble des lignes du 1er et du 2e groupe, tandis que les lignes (17), (18), (19) et (20) seront transformées respectivement dans les suivantes:

| $x_1'$ | $x_2'$ | $x_3'$ | $x_4'$ | $x_5'$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 2. |

Or chacune de ces lignes contient les termes 0 et 2 et conduira par conséquent au cas du n° (19.).

Par la même raison, et en vertu de la remarque III., on ne peut prendre avec 3 lignes du 2e groupe et la ligne (21) aucune ligne du 4e.

Remarque V. — Si l'on prend les 4 lignes du 2e groupe, on doit en prendre au moins 5 du 3e. En effet, en vertu de la remarque II., la ligne (21) est à rejeter et en vertu de le remarque IV., on ne peut non plus prendre aucune ligne du 4e groupe.

Donc, pour composer au moins 9 lignes, on est obligé de prendre, avec les 4 lignes (7), (8), (9), (10) au moins 5 du 3e groupe.

Or il ne faut point prendre plus de 5 lignes de ce groupe, car la forme sera complétement déterminée par les 6 lignes du 1er groupe, les 4 du 2e et les 5 quelconques du 3e.

Il est évident qu'en choisissant ces dernières 5 lignes de toutes les manières possibles, on aura 5 formes équivalentes entre elles qui se réduisent l'une à l'autre par les transpositions de 2 lettres prises dans la suite

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,$$

par exemple, par le changeant de $x_1$ en $x_2$ et réciproquement.

Il suffira donc de prendre les 5 lignes quelconques des 3e groupe, par exemple

(11), (12), (13), (14), (15).

Soit

$$f = M(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2) + 2\alpha x_1x_2 + 2\beta x_1x_3 + 2\gamma x_1x_4 + 2\delta x_1x_5 + 2\varepsilon x_2x_3 + 2\zeta x_2x_4 + 2\eta x_2x_5 + 2\theta x_3x_4 + 2ix_3x_5 + 2kx_4x_5$$

la forme cherchée.

En exprimant que son minimum $M$ a les représentations contenues dans les lignes

(6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14) et (15),

on aura les équations

$$\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon+\zeta+\theta+2(\delta+\eta+i+k) = -\frac{7}{2}M,$$

$$\delta = -\frac{M}{2},\quad \eta = -\frac{M}{2};\quad i = -\frac{M}{2},\quad k = -\frac{M}{2},$$

$$\alpha+\delta+\eta = -M,\quad \beta+\delta+i = -M,\quad \gamma+\delta+k = -M,$$

$$\varepsilon+\eta+i = -M,\quad \zeta+\eta+k = -M.$$

On déduit de là

$$\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = \zeta = 0, \quad \delta = \eta = i = k = -\theta = -\frac{M}{2}.$$

On aura alors

$$f = M(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1x_5 - x_2x_5 - x_3x_5 - x_4x_5 + x_3x_4).$$

Cette forme est équivalente à $V_5$ et se transforme dans $V_5$ par la transformation

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = -x_4', \quad x_4 = -x_5', \quad x_5 = x_1' + x_2' + x_3'.$$

De la même manière on obtiendra les formes équivalentes à $V_5$ si l'on prend 3 lignes du 2e groupe avec la ligne (21) en vertu de la remarque III.

Ainsi, pour avoir des formes extrêmes non équivalentes à $V_5$, on ne doit pas prendre plus de 3 lignes de l'ensemble

(7), (8), (9), (10), (21).

Remarque VI. — Comme, pour composer les lignes cherchées (au moins 9 en nombre), on ne peut prendre du 4e groupe que 3 lignes au plus (remarque I.) et de l'ensemble

(7), (8), (9), (10), (21)

aussi au plus 3 lignes (remarque V.), il s'ensuit qu'il faut prendre au moins 3 lignes du 3e groupe.

Remarque VII. — Si l'on prend 3 lignes du 4e groupe, par exemple

(17), (18), (19)

on ne doit prendre avec elles que 3 lignes déterminées du 3e groupe. Pour les trouver il faut, parmi les 4 premières colonnes dans l'ensemble des lignes données du 4e groupe, remarquer celle qui contient 3 unités.

Dans le 3e groupe il faut chercher trois lignes telles, que dans leur ensemble la même colonne contienne 3 unités.

Ces 3 lignes du 3e groupe sont celles qu'on doit prendre avec les 3 lignes données du 4e.

Par exemple, si l'on donne les lignes

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (17) | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| (18) | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| (19) | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

on remarque d'abord que, des 4 premières colonnes, celle qui contient 3 unités est la première.

Dans le 3e groupe on trouve 3 lignes déterminées

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (11) | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| (12) | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| (13) | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

dont l'ensemble contient 3 unités dans la première colonne.

Ainsi, avec les lignes

(17), (18), (19)

il faut prendre

(11), (12), (13).

Pour démontrer la proposition énoncée, considérons le cas où l'on donne les lignes (17), (18), (19), car il est évident que les autres cas se réduisent à celui-ci par de simples transpositions des lettres

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4.$$

Or, si nous faisons la transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' - x_2' - x_3' + x_5', \\ x_2 &= -x_2' - x_3' + x_5', \\ x_3 &= -x_2' + x_5', \\ x_4 &= -x_3' + x_5', \\ x_5 &= -x_2' - x_3' + 2x_5' - x_4', \end{aligned}$$

les lignes (1), (5), (6), (17), (18), (19) et celles du 3e groupe seront transformées respectivement dans les suivantes :

| | | $x_1'$ | $x_2'$ | $x_3'$ | $x_4'$ | $x_5'$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | dans | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| (5) | " | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| (6) | " | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| (17) | " | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| (18) | " | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| (19) | " | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | |
| (11) | " | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | IIIe groupe. |
| (12) | " | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| (13) | " | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| (14) | " | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| (15) | " | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| (16) | " | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | |

On voit d'abord que les 6 lignes du 1er groupe figureront après la transformation. Ensuite on remarque que la ligne (16) est à rejeter, car, après la transformation elle contiendra les termes 0 et 2 (le cas du n° 19.).

Les lignes (14) et (15) sont également impossibles, car chacune d'elles étant transformée contient le terme 0 dans la même colonne où se trouve le terme 2 de la ligne

1 1 1 1 2

(voir le n° 21.).

Restent du 3e groupe comme possibles et obligatoires (remarque VI.) les lignes

(11), (12), (13). C. q. f. d.

Ayant fait ces remarques, nous passons à la recherche des formes non équivalentes à $V_5$ et qui ont les 6 représentations de leur minimum contenues dans les lignes du 1er groupe. Comme il est nécessaire de prendre 3 lignes du 3e groupe (remarque VI.), nous distinguerons deux cas:

1°. Lorsqu'on n'en prend que 3 seulement;

2°. Si l'on prend plus de 3 lignes du 3e groupe.

Dans le premier cas, pour composer les lignes cherchées, il nous en faut choisir encore au moins 6. Or on n'en peut prendre du 4e groupe plus de 3, ainsi que de l'ensemble

(7), (8), (9), (10), (21)

(remarque V.). Par conséquent, il faut nécessairement choisir 3 lignes du 4e groupe et 3 de cet ensemble.

Comme il est indifférent quelle réunion de 3 lignes du 4e groupe nous choisissons, on peut prendre (17), (18), (19). Avec elles seulement sont compatibles les 3 lignes du 3e groupe

(11), (12), (13)

(remarque VII.).

Nous avons encore à assigner 3 lignes de l'ensemble

(7), (8), (9), (10), (21).

Or, quel que soit notre choix, une des transformations

$(A)$, $(B)$, $(C)$, $(D)$

(remarque III.) changera les lignes choisies en 3 lignes du 2e groupe.

Après cela on prendra, parmi les lignes transformées du 3e et du 4e groupe celles qui sont identiques avec les suivantes:

1 1 0 0 1
1 0 1 0 1
1 0 0 1 1
1 1 1 0 1
1 1 0 1 1
1 0 1 1 1

De cette manière on peut faire abstraction de la ligne (21) et choisir avec les lignes

(11), (12), (13), (17), (18), (19)

3 lignes du 2e groupe.

Or ce choix peut être fait de deux manières différentes:

1°. On peut prendre les lignes

(8), (9), (10);

2°. Ou les lignes

(7), (8), (9).

Les autres combinaisons se réduisent à ces deux-là.

La réunion

(8), (9), (10), (11), (12), (13), (17), (18), (19)

détermine (comme dans la remarque V.) la forme

$$Z = M(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - \tfrac{1}{2}x_1x_2 - \tfrac{1}{2}x_1x_3 - \tfrac{1}{2}x_1x_4 - \tfrac{1}{2}x_1x_5 + \tfrac{1}{2}x_2x_3 + \tfrac{1}{2}x_2x_4 + \tfrac{1}{2}x_3x_4 - x_2x_5 - x_3x_5 - x_4x_5),$$

qui est extrême (n° 4.) et non équivalente à $V_5$.

La réunion

(7), (8), (9), (11), (12), (13), (17), (18), (19)

donne la forme

$$M(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1x_5 - x_2x_5 - x_3x_5 - x_1x_4)$$

équivalente à $V_5$ et qui se transforme dans $V_5$ par la transformation

$$x_1 = -x_4' - x_5', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_1', \quad x_4 = -x_5', \quad x_5 = x_1' + x_2' + x_3'.$$

Cette forme est par conséquent à rejeter.

Ainsi, dans le cas que nous étudions, on obtient une seule forme $Z$, qui répond à la question.

Considérons maintenant le cas où l'on prend plus de 3 lignes du 3e groupe.

Comme, de l'ensemble

(7), (8), (9), (10), (21)

on ne peut choisir plus de 3 lignes, il en faut prendre au moins 6 du 3e et du 4e groupe.

Ainsi, avec 4 du 3e, il faut en prendre au moins 2 du 4e et, avec 5 du 3e au moins 1 du 4e.

Or on peut prendre 4 lignes du 3e groupe de deux manières différentes:

La première est représentée par la combinaison

(g) (11), (12), (13), (14);

la seconde par la combinaison

(h) (11), (12), (15), (16).

Toutes les autres se réduisent à ces deux.

Si l'on prend 5 lignes du 3e groupe, on aura la combinaison

(k) (11), (12), (13), (14), (15),

les autres se réduisant à celle-ci.

Les 6 lignes du 3e groupe donnent, bien entendu, la combinaison

(l) (11), (12), (13), (14), (15), (16).

Il est facile de faire voir maintenant que chacune de ces quatres combinaisons

(g), (h), (k), (l),

prise avec un nombre nécessaire des lignes du 4e groupe, après l'une des transformations

(*A*), (*B*), (*C*), (*D*)

(remarque III.), contiendra 3 lignes de ce groupe.

Remarquons encore que les transformations

(*A*), (*B*), (*C*), (*D*)

ne changent pas le premier groupe, ainsi que l'ensemble

(7), (8), (9), (10), (21).

Quant aux lignes du 3e et du 4e groupe, elles sont transformées dans les suivantes:

| | | (A) | | | | | (B) | | | | | (C) | | | | | (D) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1'$ | $x_2'$ | $x_3'$ | $x_4'$ | $x_5'$ | $x_1'$ | $x_2'$ | $x_3'$ | $x_4'$ | $x_5'$ | $x_1'$ | $x_2'$ | $x_3'$ | $x_4'$ | $x_5'$ | $x_1'$ | $x_2'$ | $x_3'$ | $x_4'$ | $x_5'$ |
| ) | se change en | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ) | " " " | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| ) | " " " | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| ) | " " " | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| ) | " " " | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| ) | " " " | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| ) | " " " | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| ) | " " " | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| ) | " " " | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| ) | " " " | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

La combinaison (g) après la transformation (A) contiendra 3 lignes à 4 unités (du 4e groupe).

La combinaison (h) avec une quelconque des lignes

(17), (18), (19), (20)

(et il faut en prendre au moins deux) donnera, après l'une des transformations

(A), (B), (C), (D),

3 lignes à 4 unités.

Les combinaisons (k) et (l) contiendront après la transformation (A) 3 lignes avec ce nombre d'unités. Ainsi on aura toujours 3 lignes du 4e groupe.

Or, avec elles, il est nécessaire de prendre 3 lignes déterminées du 3e groupe et l'on sera conduit au cas précédent. On obtient donc toujours la forme *Z* comme le résultat de cette recherche.

**23.** De tout ce que nous avons dit des formes à cinq variables, il suit que, pour le déterminant donné $-D$, il existe 3 formes extrêmes à cinq variables

$$U_5 = 2\sqrt[5]{\frac{D}{6}}\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5 \\ +x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5),$$

$$Z = \sqrt[5]{\frac{2^9 D}{3^4}}\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-\tfrac{1}{2}x_1x_2-\tfrac{1}{2}x_1x_3-\tfrac{1}{2}x_1x_4-\tfrac{1}{2}x_1x_5 \\ +\tfrac{1}{2}x_2x_3+\tfrac{1}{2}x_2x_4-x_2x_5+\tfrac{1}{2}x_3x_4-x_3x_5-x_4x_5),$$

$$V_5 = \sqrt[5]{2^3 D}\,[x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3 \\ +x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5].$$

Comme $V_5$ a le minimum $\sqrt[5]{8D}$, plus grand que celui de $U_5$ et de $Z$, il suit du n° 7 que la quantité

$$\sqrt[5]{8D}$$

est la limite précise des minima des formes à cinq variables du déterminant $-D$.

# Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades.

(Zweiter Aufsatz.)

Von Felix Klein in München.

(Hierzu eine lithogr. Tafel.)

---

In der ersten unter dem vorstehenden Titel erschienenen Mittheilung (diese Annalen Bd. X, p. 365 ff.) habe ich für die verschiedenartigen Curven vierten Grades, welche reelle Züge besitzen, im Anschlusse an eine bestimmte Zerschneidung der zugehörigen Riemann'schen Fläche reelle Normalintegrale hergestellt, ihren Verlauf im Allgemeinen beschrieben und Schlüsse auf die Realität gewisser Berührungscurven gemacht. Dabei bin ich aber noch nicht auf eine Discussion derjenigen Fragen eingegangen, welche mit der Aufstellung der sogenannten $\Theta$-Charakteristiken zusammenhängen. Eben diese werde ich im Nachstehenden angreifen und im speciellen Falle erledigen, insofern ich wenigstens für die *viertheilige* Curve und diejenige Zerschneidung der zugehörigen Riemann'schen Fläche, die ich in der früheren Arbeit angab, den in Betracht kommenden ausgezeichneten Berührungskegelschnitt bestimme und die Charakteristiken, welche den einzelnen Doppeltangenten beizulegen sind, wirklich anschreibe.

Die Methode, deren ich mich dabei bediene, ist im Wesentlichen dieselbe, welche ich in dem früheren Aufsatze gebrauchte: die Methode der *Continuität*. So wie ich dort die allgemeine Curve vierter Ordnung aus dem Kegelschnittpaare entstehen liess, so jetzt aus einer symmetrisch gestalteten Curve, oder aus einem hyperelliptischen Grenzfalle. Eigentliche hyperelliptische Curven vierter Ordnung vom Geschlechte $p = 3$ giebt es bekanntlich nicht; aber man kann eine Curve vierter Ordnung, die in einen doppeltzählenden Kegelschnitt mit acht Scheiteln (sommets, Verzweigungspunkten) ausgeartet ist, als solche auffassen. Die Betrachtung solcher mehrfacher Curven, die in der Theorie der Curvensysteme längst üblich ist, scheint für Fragen der hier vorliegenden Art in der That von weitreichendem Vortheile.

Ein analoger Uebergang zu einem doppeltzählenden Kegelschnitte kann auch bei *den* Curven vierter Ordnung, welche weniger als vier

Züge besitzen, bewerkstelligt werden und man kann an diesen Uebergang ganz ähnliche Schlüsse knüpfen. Nur werden von den acht Scheiteln, die der Kegelschnitt trägt, einige imaginär sein. Da ich in der weiteren Darstellung hierauf nicht mehr zurückkomme, so bemerke ich nur, dass der Zeuthen'sche Satz, dem zufolge eine Curve vierter Ordnung immer vier reelle Doppeltangenten besitzt, sich dann als unmittelbare Consequenz der Thatsache ergiebt, dass acht reelle oder imaginäre (doch paarweise conjugirt imaginäre) Punkte immer mindestens vier reelle Verbindungsgeraden haben; auch ergiebt sich ohne Weiteres, dass immer vier Doppeltangenten „von der ersten Art" sind.

## § 1.

## Die Curve vierter Ordnung. Imaginäre Bestandtheile der Integralwerthe.

Statt der viertheiligen Curve vierter Classe, welche ich in dem früheren Aufsatze betrachtete, werde ich im Folgenden, unter Benutzung resp. Uebertragung der damals abgeleiteten Resultate, die viertheilige Curve vierter Ordnung in der von Plücker gegebenen Gestalt benutzen; sie ist für die hier zu verfolgenden Zwecke übersichtlicher, insofern nicht mehr, wie damals, eine explicite Betrachtung imaginärer Elemente eintreten soll.

Dem entsprechend sollen die vier Züge der Curve (siehe lithogr. Tafel Fig. 1) mit *I*, *II*, *III*, *IV* bezeichnet sein; die beigesetzten Pfeile geben diejenigen Richtungen an, welche als positiv zu gelten haben. Unter $\mathfrak{J}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ werden die überall endlichen Integrale verstanden, wie sie in dem vorigen Aufsatze als Normalintegrale eingeführt wurden, und $a_{1k}$, $a_{2k}$, $a_{3k}$, $a_{4k}$ sollen die (in unserem Falle reellen) Periodicitätsmoduln bedeuten, welche $\mathfrak{J}_k$ ergiebt, wenn es im positiven Sinne an den Ovalen *I*, *II*, *III*, *IV* vorbeigeleitet wird. Zwischen ihnen hat man die Relation*):

$$a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} = 0.$$

*) Von dieser Relation kann man sich folgendermassen Rechenschaft geben, ohne die zur Curve gehörige Riemann'sche Fläche zu betrachten. Man nehme auf jedem der Ovale *I*, *II*, *III*, *IV* einen festen Punkt an und wähle diese vier Punkte als Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels. Jeder Kegelschnitt desselben schneidet das einzelne Oval in noch einem beweglichen Punkte, und lässt man einen dieser Punkte sein Oval in positivem Sinne durchlaufen, so geschieht das Entsprechende von Seiten der übrigen. Werden nun die vier beweglichen Punkte in einer Lage mit $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, in einer anderen mit $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ bezeichnet, so ist nach dem Abel'schen Theoreme:

$$0 = \int_{a_1}^{b_1} d\mathfrak{J}_k + \int_{a_2}^{b_2} d\mathfrak{J}_k + \int_{a_3}^{b_3} d\mathfrak{J}_k + \int_{a_4}^{b_4} d\mathfrak{J}_k$$

Als untere Grenze der Integrale wähle ich einen beliebigen Punkt des Ovales *IV*, etwa $\mu$, wie es in Fig. 1. angegeben ist (weiterhin werde ich dem $\mu$ eine noch speciellere Lage ertheilen). Die Tangente in $\mu$ schneidet die Curve noch in zwei weiteren Punkten $\alpha$, $\beta$. So setze ich

$$\int_{\mu}^{\alpha} d\mathfrak{J}_k + \int_{\mu}^{\beta} d\mathfrak{J}_k = C_k ,$$

wo die vorkommenden Integrale in der Weise gebildet sein sollen, wie es bei Fig. 1. am einfachsten scheint: Beidemal werde das Integral von $\mu$ beginnend längs des Ovales *IV* hingeleitet, und zwar das eine Mal in positiver Richtung bis $\beta$, das andere Mal in negativer Richtung bis $\alpha$. Die $C_k$ sind dann völlig bestimmte, *reelle* Grössen. Sie treten als Constanten beim Abel'schen Theoreme auf. Sind nämlich $x_1, \cdots x_{4m}$ diejenigen Punkte, in denen die Curve vierter Ordnung durch eine Curve $m^{\text{ter}}$ Ordnung geschnitten wird, so hat man:

$$\int_{\mu}^{x_1} d\mathfrak{J}_k + \int_{\mu}^{x_2} d\mathfrak{J}_k + \cdots \int_{\mu}^{x_{4m}} d\mathfrak{J}_k = m \cdot C_k .$$

Die Entwickelungen des vorigen Aufsatzes gestatten namentlich auch, die imaginären Bestandtheile anzugeben, welche die Integrale $\mathfrak{J}_k$, modulo $2i\pi$, erhalten, wenn man sie von $\mu$ zu einem anderen reellen Curvenpunkte hinerstreckt. Es sind, je nachdem der betr. Punkt der Ovalen *I*, $\cdots$ *IV* angehört, die folgenden:

| | *I* | *II* | *III* | *IV* |
|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{J}_1$ | $i\pi$ | 0 | 0 | 0 |
| $\mathfrak{J}_2$ | 0 | $i\pi$ | 0 | 0 |
| $\mathfrak{J}_3$ | 0 | 0 | $i\pi$ | 0 |

Hieran schliessen sich nun zwei, für das Nachstehende fundamentale Folgerungen.

A. Ich betrachte zuvörderst diejenigen Argumente, welche, bei der hier gewählten unteren Grenze, den 28 verschiedenen Doppeltangenten beizulegen sind (als Summen der zu ihren Berührungspunkten hingeleiteten Integrale). Wenn $x$, $y$ die Berührungspunkte einer Doppeltangente bezeichnen, so ist, nach dem Abel'schen Theoreme

---

und hieraus folgt die Relation des Textes, wenn man die *b* durch die betr. Ovale hindurchwandern lässt, bis sie wieder mit den *a* zusammenfallen.

$$2\left(\int_{\mu}^{x} d\mathfrak{J}_k + \int_{\mu}^{y} d\mathfrak{J}_k\right) \equiv C_k,$$

also

$$\int_{\mu}^{x} d\mathfrak{J}_k + \int_{\mu}^{y} d\mathfrak{J}_k \equiv \frac{C_k}{2} + \frac{P}{2},$$

wo $\frac{P}{2}$ eine halbe Periode bedeutet. Wir werden uns dieselbe, wie in dem vorigen Aufsatze, in der Form geschrieben denken:

$$\frac{P}{2} = \frac{1}{2}(m_1\beta_{1k} + m_2\beta_{2k} + m_3\beta_{3k} + q_1 a_{1k} + q_2 a_{2k} + q_3 a_{3k}),$$

wo die Zahlen:

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ q_1,\ q_2,\ q_3,$$

allgemein zu reden, die Werthe 0, 1 annehmen können, und die Bedeutung der $\beta_{ik}$ durch folgende Tabelle gegeben ist:

| | $\beta_{1k}$ | $\beta_{2k}$ | $\beta_{3k}$ |
|---|---|---|---|
| $k = 1$ | $2i\pi$ | 0 | 0 |
| $k = 2$ | 0 | $2i\pi$ | 0 |
| $k = 3$ | 0 | 0 | $2i\pi$ |

während die $a_{ik}$ reelle Grössen vorstellen. Von den 64 $\frac{P}{2}$, die es überhaupt giebt, werden nur 28 für die Doppeltangenten benutzt; welche, ist zunächst unbekannt. Aber wir können wenigstens die Werthe der zugehörigen $m_1$, $m_2$, $m_2$ unmittelbar angeben, insofern nur von ihnen die imaginären Bestandtheile abhängen, welche die Doppeltangenten aufweisen, und wir diese imaginären Bestandtheile in der Figur ablesen können.

Offenbar nämlich erhalten die vier Doppeltangenten erster Art, diejenigen, welche dasselbe Oval zweimal berühren, reelle Integralsummen; für sie also ist:

$$m_1,\ m_2,\ m_3 = 0,\ 0,\ 0.$$

Für diejenigen Doppeltangenten dagegen, welche das Oval IV und andererseits bez. *I* oder *II* oder *III* berühren, findet man

$$\begin{aligned} m_1,\ m_2,\ m_3 \text{ bez. gleich } & 1,\ 0,\ 0, \\ & 0,\ 1,\ 0, \\ & 0,\ 0,\ 1. \end{aligned}$$

Endlich für diejenigen Doppeltangenten, welche zwei der drei Züge *I*, *II*, *III* berühren, ergiebt sich bez.:

$$m_1, m_2, m_3 = 0, 1, 1,$$
$$= 1, 0, 1,$$
$$= 1, 1, 0.$$

**B.** Die zweite Folgerung, welche wir an die Tabelle der imaginären Bestandtheile knüpfen, bezieht sich auf das Jacobi'sche Umkehrproblem. Das Punktetripel $x, y, z$, welches durch die Gleichungen:

$$\int_\mu^x d\mathfrak{J}_k + \int_\mu^y d\mathfrak{J}_k + \int_\mu^z d\mathfrak{J}_k = v_k$$

definirt wird, ist, nach meiner früheren Angabe, dann und nur dann reell, wenn die $v_k$, modulo $2i\pi$, die imaginären Bestandtheile 0 oder $i\pi$ aufweisen. Für die hier vorliegende, viertheilige Curve können wir sofort die folgenden, näheren Bestimmungen zufügen, deren Richtigkeit sich unmittelbar ergiebt:

1) Wenn die imaginären Bestandtheile der $v$ unter eins der folgenden vier Schemata fallen:

$$0, \; i\pi, \; i\pi,$$
$$i\pi, \; 0, \; i\pi,$$
$$i\pi, \; i\pi, \; 0,$$
$$i\pi, \; i\pi, \; i\pi,$$

so sind die drei Punkte $x, y, z$ einzeln reell und liegen auf drei verschiedenen Ovalen, nämlich bez. auf *II*, *III*, *IV* oder *III*, *I*, *IV* oder *I*, *II*, *IV* oder *I*, *II*, *III*.

2) Wenn aber die imaginären Bestandtheile der $v$ resp. gleich sind

$$i\pi, \; 0, \; 0,$$
$$0, \; i\pi, \; 0,$$
$$0, \; 0, \; i\pi,$$
$$0, \; 0, \; 0,$$

so ist nur einer der drei Punkte $x, y, z$ nothwendig reell und bez. auf dem Ovale *I*, *II*, *III*, *IV* befindlich; die beiden anderen Puukte können conjugirt imaginär sein; sind sie aber reell, so liegen sie gemeinsam auf einem, übrigens beliebigen Ovale.

## § 2.

## Berührungskegelschnitte.

Bei der Lösung des Umkehrproblems durch $\Theta$-Functionen erscheinen die Integralsummen

$$\int_\mu^x d\mathfrak{J}_k + \int_\mu^y d\mathfrak{J}_k + \int_\mu^z d\mathfrak{J}_k$$

um bestimmte (nur von $\mu$ abhängige) Constante $K_k$ vermehrt, deren Bestimmung nach Clebsch-Gordan folgendermassen formulirt werden kann*).

Durch die Punkte $\alpha$, $\beta$, in denen die Tangente des Punktes $\mu$ die Curve vierter Ordnung abermals trifft, kann man Kegelschnitte legen, welche die Curve in drei weiteren Punkten berühren. Ihre Zahl ergiebt sich zunächst gleich 64; aber 28 derselben sind uneigentliche, insofern sie in die Tangente des Punktes $\mu$ und je eine der 28 Doppeltangenten zerfallen. Es bleiben 36 *eigentliche* Berührungskegelschnitte, und unter ihnen ist einer, welcher der *ausgezeichnete* heissen soll. Er ist dadurch bestimmt, dass seine drei Berührungspunkte $c$ der transscendenten Gleichung genügen:

$$\Theta\left(\int_{\mu}^{c} d\mathfrak{J}_k\right) = 0,$$

und nennt man diese Berührungspunkte einzeln $c_1^0$, $c_2^0$, $c_3^0$, so ist die in Rede stehende Constante:

$$K_k \equiv \int_{c_1^0}^{\mu} d\mathfrak{J}_k + \int_{c_2^0}^{\mu} d\mathfrak{J}_k + \int_{c_3^0}^{\mu} d\mathfrak{J}_k .$$

Es ist eine der uns vorliegenden Aufgaben, diesen ausgezeichneten Kegelschnitt (deren Lage übrigens mit der Zerschneidung der Riemann'schen Fläche wechselt), in der Figur nachzuweisen. Reell wird er jedenfalls sein; denn nach den im vorigen Aufsatze entwickelten Anschauungen sind die 64 eigentlichen und uneigentlichen Berührungskegelschnitte, von denen eben gesprochen wurde, alle reell.

Orientiren wir uns zunächst überhaupt hinsichtlich der Lage der 36 eigentlichen Berührungskegelschnitte. Sind $c_1$, $c_2$, $c_3$ die Berührungspunkte eines solchen, so hat man

$$2\left(\int_{\mu}^{c_1} d\mathfrak{J}_k + \int_{\mu}^{c_2} d\mathfrak{J}_k + \int_{\mu}^{c_3} d\mathfrak{J}_k\right) + \int_{\mu}^{\alpha} d\mathfrak{J}_k + \int_{\mu}^{\beta} d\mathfrak{J}_k = 2C_k ,$$

oder, da

$$\int_{\mu}^{\alpha} d\mathfrak{J}_k + \int_{\mu}^{\beta} d\mathfrak{J}_k = C_k ;$$

$$\int_{\mu}^{c_1} d\mathfrak{J}_k + \int_{\mu}^{c_2} d\mathfrak{J}_k + \int_{\mu}^{c_3} d\mathfrak{J}_k = \frac{C_k}{2} + \frac{P}{2} .$$

*) Vergl. hier und im Folgenden: Clebsch Vorlesungen über Geometrie, herausgegeben von F. Lindemann, oder auch: H. Weber, Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlechte 3. (Berlin 1876.)

Setzen wir hier für $\frac{P}{2}$ die 64 Werthe ein, deren es fähig ist:

$$\frac{P}{2} = \frac{1}{2}(m_1\beta_{1k} + m_2\beta_{2k} + m_3\beta_{3k} + q_1\alpha_{1k} + q_2\alpha_{2k} + q_3\alpha_{3k}),$$

so erhalten wir neben den 36 eigentlichen Berührungskegelschnitten noch einmal die 28 Doppeltangenten. Es fällt dann einer der drei Berührungspunkte, etwa $c_3$, in $\mu$ zurück; das auf ihn bezügliche Integral kommt in Wegfall; und die beiden anderen $c_1$, $c_2$ sind die Berührungspunkte der betr. Doppeltangente. *Diejenigen Werthe von* $\frac{P}{2}$ *also, welche bei den Doppeltangenten schon auftreten, kommen bei den eigentlichen Berührungskegelschnitten nicht mehr vor*; wir wollen sie dementsprechend fortan mit $\frac{P'}{2}$ bezeichnen. Die Werthe der Zahlen $m_1'$, $m_2'$, $m_3'$, welche sich bei den $\frac{P'}{2}$ einstellen (ich accentuire fortan die $m$, $q$, wo sie sich auf eine Periode $P'$ beziehen), haben wir bereits soeben (§ 1.) bestimmt; es waren bez. je viermal dir folgenden Zahlen:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1, | 0, | 0, | 0, | 1, | 1, |
| 0, | 0, | 0, | 0, | 1, | 0, | 1, | 0, | 1, |
| | | | 0, | 0, | 1, | 1, | 1, | 0. |

Zu jedem Werthsysteme der $m$ gehören aber im Ganzen *acht* halbe Perioden, weil die Werthe von $q_1$, $q_2$, $q_3$ noch beliebig sind. Demnach hat man den Satz:

*Die* 36 *eigentlichen Berührungskegelschnitte vertheilen sich auf sieben Gruppen von je vier und eine Gruppe von acht. Die zugehörigen* $\frac{P}{2}$ *besitzen nämlich je viermal eins der sieben angeführten Werthsysteme der* $m$, *und achtmal tritt das Werthsystem*

$$m_1, m_2, m_3 = 1, 1, 1$$

*auf.*

Es sind insbesondere die acht Kegelschnitte der letzten Gruppe, auf die wir weiterhin unsere Aufmerksamkeit zu richten haben. Die Summen der zu ihren Berührungspunkten hingeleiteten Integrale haben alle den imaginären Bestandtheil $i\pi$; die Berührungspunkte sind also einzeln reell und sind auf die Ovale *I*, *II*, *III* vertheilt, nach den Ausführungen des § 1. Hiernach ist die Lage der acht Kegelschnitte in der Figur leicht anzugeben. Man denke sich einen Augenblick die Ovale *I*, *II*, *III* in isolirte Punkte zusammengezogen. Dann giebt es *einen* Kegelschnitt, der durch sie und durch $\alpha$ und $\beta$ hindurchgeht. Er spaltet sich in *acht*, sobald man statt der isolirten Punkte (zunächst) kleine Ovale setzt, insofern man willkürlich bestimmen kann, ob das Oval mit dem Kegelschnitte einen *inneren* oder *äusseren* Contact besitzen soll.

## § 3.

### Bestimmung der Constanten $K_k$.

Ich will die halbe Periode, welche dem ausgezeichneten Kegelschnitte zugehört, mit $\frac{P_0}{2}$ bezeichnen. Dann erhalten die Constanten $K_k$ die Werthe:

$$K_k \equiv -\frac{C_k}{2} - \frac{P_0}{2},$$

oder auch, da es auf ganzzahlige Multipla der Perioden nicht ankommt:

$$K_k \equiv -\frac{C_k}{2} + \frac{P_0}{2}.$$

Addiren wir sie zu den Argumenten, die wir oben (§ 1.) den Doppeltangenten beilegten:

$$\frac{C_k}{2} + \frac{P'}{2},$$

so entstehen die sogenannten *Charakteristiken* der Doppeltangenten:

$$\frac{P' + P_0}{2} = \frac{P''}{2},$$

deren schliessliche Bestimmung unsere Hauptaufgabe ist.

Zuvörderst werde das $K_k$, bez. das $\frac{P_0}{2}$ gesucht. Ich benutze dazu zweierlei Methoden. Es sei

$$\frac{P_0}{2} = \frac{1}{2}(m_1^0\beta_{1k} + m_2^0\beta_{2k} + m_3^0\beta_{3k} + q_1^0 a_{1k} + q_2^0 a_{2k} + q_3^0 a_{3k}).$$

So bestimme ich zunächst $m_1^0$, $m_2^0$, $m_3^0$, indem ich davon ausgehe, dass die Charakteristiken der Doppeltangenten, $\frac{P''}{2}$, bekanntlich *ungerade* sind, d. h. dass für die in ihnen auftretenden Zahlen $m''$, $q''$

$$m_1'' q_1'' + m_2'' q_2'' + m_3'' q_3'' \equiv 1 \pmod 2.$$

Sodann bestimme ich $q_1^0$, $q_2^0$, $q_3^0$, indem ich die seither betrachtete Curve vierter Ordnung in eine andere übergehen lasse, bei der die Ovale *I*, *II*, *III* eine gegen das Oval *IV* symmetrische Lage haben. Die Betrachtung dieser neuen Curve würde auch sofort $m_1^0$, $m_2^0$, $m_3^0$ liefern; aber ich zog es vor, so lange es ausreichte, an der ursprünglichen Curvenform festzuhalten. Hierin liegt auch der Grund, der mich bestimmte, die weiterhin so bequeme hyperelliptische Curve erst im folgenden Paragraphen einzuführen.

1) Da $\frac{P''}{2}$ eine ungerade Charakteristik sein soll, so dürfen die zugehörigen $m_1''$, $m_2''$, $m_3''$ nicht zugleich Null sein. Die Zahlen $m_1^0$, $m_2^0$, $m_3^0$, welche in $\frac{P_0}{2}$ auftreten, dürfen daher nicht gleich sein einem

der Zahlensysteme $m_1'$, $m_2'$, $m_3'$, welche bei den $\frac{P'}{2}$ vorkommen. Daher ist nothwendig:

$$m_1^0,\ m_2^0,\ m_3^0 = 1,\ 1,\ 1,$$

und der ausgezeichnete Berührungskegelschnitt gehört also, wie gleich hier hervorgehoben sei und schon oben angedeutet wurde, zu der Gruppe der acht Berührungskegelschnitte, deren jeder jedes der drei Ovale *I*, *II*, *III* berührt.

2) Die symmetrisch gestaltete Curve, in welche ich nunmehr die seither betrachtete übergehen lassen will, ist in Fig. 2 gezeichnet. Sie entsteht aus der ursprünglichen Curve folgendermassen. Man löse die vier Ovale *I*, *II*, *III*, *IV* bez. von den Doppeltangenten erster Art ab, so dass vier isolirte Doppeltangenten entstehen. Sodann projicire man die Figur in der Art, dass die eine Doppeltangente unendlich weit rückt, während die anderen ein (in unserem Falle) gleichseitiges Dreieck bilden. Die Doppeltangenten, welche in der neuen Figur mit 1, 2, 3 bezeichnet sind, sind diejenigen, welche früher die Ovale *II*, *I*, *IV* je zweimal berührten; die unendlich ferne Doppeltangente ist aus derjenigen entstanden, welche sich an *III* anschmiegte.

Bei dem geschilderten Aenderungsprocesse bleibt, wie ich in dem vorigen Aufsatze nachwies, die Zerschneidung der Riemann'schen Fläche, die Definition der Normalintegrale etc. ungeändert. Es bleiben daher auch die Charakteristiken der Doppeltangenten die alten. Andererseits sind wir jetzt, bei der Symmetrie der Figur und der symmetrischen Benutzung, welche ihre Bestandtheile bei Definition der Normalintegrale erfahren, in der Lage, die Charakteristiken der vier Doppeltangenten erster Art ohne Weiteres anzugeben. Die zugehörigen Zahlen $m_1''$, $m_2''$, $m_3''$ sind jedenfalls 1, 1, 1; denn $m_1^0$, $m_2^0$, $m_3^0$ wurden $= 1, 1, 1$ gefunden, während (§ 1.) $m_1'$, $m_2'$, $m_3'$ für die Doppeltangenten erster Art $= 0, 0, 0$ waren. Für die Zahlen $q_1''$, $q_2''$, $q_3''$ bleiben daher nur noch die vier Möglichkeiten

$$\begin{matrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \end{matrix}$$

und bei der Symmetrie der Figur ist nicht fraglich, wie sich diese Möglichkeiten auf die vier in Betracht kommenden Doppeltangenten vertheilen.

Dieses Resultat muss auch für die ursprüngliche Curve gelten. Ich benenne bei ihr, was am bequemsten scheint, die Doppeltangenten erster Art fortan nach demjenigen Ovale, welches sie berühren. *Dann hat man also folgende Charakteristiken:*

$$\begin{array}{ll} I & 1\,1\,1,\ 0\,1\,0 \\ II & 1\,1\,1,\ 1\,0\,0 \\ III & 1\,1\,1,\ 1\,1\,1 \\ IV & 1\,1\,1,\ 0\,0\,1. \end{array}$$

Zieht man von diesen Charakteristiken resp. den Grössensystemen, die sie vertreten, diejenigen Argumente ab, welche den betr. Doppeltangenten anfänglich (§ 1.) von uns beigelegt wurden, so erhält man die Constanten $K_k$ resp. das $\frac{P_0}{2}$. Aber die Argumente, welche ursprünglich der Doppeltangente $IV$ beizulegen waren, sind einfach anzugeben: *es sind geradezu die Constanten* $\frac{C_k}{2}$. Um dies deutlich zu sehen, lasse man $\mu$, dessen Lage noch beliebig war, über das Oval $IV$, etwa nach rechts hin, hinwandern, bis es in den nächstgelegenen Berührungspunkt der Doppeltangente $IV$ hineinfällt. Auf dem Wege hat es einen Wendepunkt und in demselben das zugehörige $\alpha$ überschritten; fortan ist, sofern wir an der alten Definition des $C_k$ festhalten, nicht nur $\int_\mu^\beta$ sondern auch $\int_\mu^\alpha$ in *positivem* Sinne an dem Ovale $IV$ vorbeizuleiten. Sowie $\mu$ in den einen Berührungspunkt der Doppeltangente $IV$ rückt, fallen $\alpha$ und $\beta$ in den anderen Berührungspunkt zusammen; das $\int_\mu^\alpha$ wird also mit dem $\int_\mu^\beta$ identisch, jedes einzelne also gleich $\frac{C_k}{2}$, da die Summe der beiden $= C_k$ gesetzt war. Aber zugleich stellen alsdann die Integrale

$$\int_\mu^\alpha d\mathfrak{J}_k \text{ oder } \int_\mu^\beta d\mathfrak{J}_k$$

die Argumente vor, welche der Doppeltangente $IV$ beizulegen sind (denn der andere Berührungspunkt von $IV$ fällt ja mit $\mu$ zusammen); diese Argumente werden also gleich den $\frac{C_k}{2}$, wie behauptet wurde.

Die Charakteristik

$$1\,1\,1\ \ 0\,0\,1,$$

welche wir der Doppeltangente $IV$ beilegten, vertritt die Grössensysteme:

$$\tfrac{1}{2}(\beta_{1k} + \beta_{2k} + \beta_{3k} + a_{3k});$$

*wir erhalten daher für die Constanten* $K_k$ *die Werthe*

$$K_k = -\frac{C_k}{2} + \frac{1}{2}(\beta_{1k} + \beta_{2k} + \beta_{3k} + a_{3k}),$$

oder, mit anderen Worten, *das* $\frac{P_0}{2}$ *ist durch das folgende Symbol gegeben:*

$$1\ 1\ 1,\quad 0\ 0\ 1.$$

## § 4.

### Die hyperelliptische Curve. Bestimmung der Charakteristiken und des ausgezeichneten Kegelschnitts.

Ich werde jetzt die bisher betrachtete Curve vierter Ordnung in einen doppeltzählenden Kegelschnitt überführen und an ihm die noch fehlende Bestimmung der Charakteristiken der 24 Doppeltangenten zweiter Art und des ausgezeichneten Berührungskegelschnittes durchführen. Zu dem Zwecke sollen $p$, $q$, $r$, $s$ die vier Doppeltangenten erster Art bedeuten, $\Omega = 0$ sei der Kegelschnitt, welcher durch ihre acht Berührungspunkte hindurchgeht. So kann man die Gleichung der ursprünglichen Curve in die Form setzen:

$$\varphi = \Omega^2 - \lambda pqrs = 0.$$

In ihr betrachte man $\lambda$ als einen Parameter, den man allmählich zu Null werden lässt. Die Curve vierter Ordnung geht dann in bekannter Weise in diejenigen vier, doppelt zu zählenden, Segmente von $\Omega = 0$ über, welche bez. durch $p$, $q$, $r$, $s$ abgeschnitten werden, wie Fig. 3 erläutert.

Die 28 Doppeltangenten der $C_4$ verwandeln sich dabei, ohne unbestimmt zu werden, in die 28 Verbindungsgeraden der 8 Scheitel (der 8 Segment-Endigungen), welche $\Omega$ trägt. Ich will annehmen, dass der Punkt $\mu$ während des Grenzüberganges fortwährend die besondere Lage beibehalten habe, welche wir ihm soeben (§ 3.) ertheilten. Dann ist er schliesslich in einen der beiden Grenzpunkte des Segmentes IV übergegangen (vergl. die Fig.), während $\alpha$, $\beta$ in den anderen Grenzpunkt desselben Segmentes zusammenfallen. Die berührenden Kegelschnitte, die wir zu construiren haben, gehen dann also durch diesen Scheitel $\alpha$, $\beta$ hindurch und berühren in ihm die Doppeltangente IV. Insbesondere die acht Kegelschnitte der ausgezeichneten Gruppe, sind ihrer Lage nach leicht völlig zu bestimmen. *Offenbar sind sie in diejenigen acht Kegelschnitte der genannten Eigenschaft übergegangen, welche von den begrenzenden Scheiteln der Segmente I, II, III je einen enthalten.*

Betrachten wir jetzt die längs der Curve erstreckten überall endlichen Integrale. Man kann dieselben, indem man den constanten Factor $2\sqrt{\lambda}$ im Zähler zusetzt, folgendermassen schreiben:

$$\int \frac{2\sqrt{\lambda}\cdot|cxdx|\cdot u_x}{\Sigma c_i \varphi_i} = \int \frac{2\sqrt{\lambda}\cdot|cxdx|\cdot u_x}{\Sigma c_i \left\{2\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial x_i} - \lambda\frac{\partial(pqrs)}{\partial x_i}\right\}}.$$

Setzt man hier für $\Omega$ seinen Werth:

$$\Omega = \sqrt{\lambda \cdot pqrs}$$

und lässt dann $\lambda = 0$ werden, so erhält man die *hyperelliptischen* Integrale:

$$\int \frac{|cxdx| \cdot u_x}{\sqrt{pqrs} \cdot \Sigma c_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}},$$

welche längs des Kegelschnittes $\Omega = 0$ erstreckt sind und an den acht Stellen

$$pqrs = 0$$

Verzweigungen aufweisen (also vom Geschlechte 3 sind).

Entstand ein solches Integral auf die angegebene Weise aus dem Normalintegrale $\mathfrak{J}_k$, so soll es wieder $\mathfrak{J}_k$ genannt sein; ebenso sollen die Grössen $a_{ik}$ ihre frühere Bedeutung behalten. Führt man $\mathfrak{J}_k$ längs des reellen Kegelschnittes $\Omega$ hin, so erhält man bald reelle, bald *rein* imaginäre Zuwächse, je nach dem Vorzeichen des unter dem Quadratwurzelzeichen stehenden Productes $pqrs$: innerhalb derjenigen Segmente von $\Omega$, welche von reellen Punkten der ursprünglichen Curve doppelt überdeckt sind, erweisen sich die Zuwächse als reell, innerhalb der anderen als rein imaginär. Achten wir also jetzt, da die imaginären Bestandtheile der Integrale $\mathfrak{J}_k$ bereits in den früheren Paragraphen genugsam berücksichtigt sind, nur auf die *reellen* Bestandtheile derselben, so erhalten wir das in Fig. 4 gegebene Schema, in welchem die beigesetzten Argumente sich jedesmal gleichzeitig auf die beiden einander folgenden Scheitelpunkte beziehen. In dieser Figur nun lesen wir ohne Weiteres die Beantwortung der noch ausstehenden Fragen ab.

Zunächst erfahren wir die Argumente

$$\frac{C_k}{2} + \frac{P'}{2},$$

welche die einzelne Doppeltangente bei der hinsichtlich $\mu$ getroffenen Festsetzung erhält. Denn die imaginären Bestandtheile kennen wir bereits (§ 1.) und *die reellen erhalten wir, indem wir einfach die beiden Zahlen zusammenaddiren, welche den beiden Scheiteln zugesetzt sind, die die Doppeltangente verbindet.*

Sodann ergiebt sich (vergl. § 3.) aus dem Umstande, dass $\alpha$, $\beta$ in den zweiten Begrenzungspunkt des Segmentes $IV$ fallen:

$$\frac{C_k}{2} = \frac{a_{1k}}{2} = \frac{a_{1k} + a_{2k} + a_{3k}}{2}.$$

Die Constanten $K_k$ haben also folgende Werthe:

$$K_k = -\frac{C_k}{2} + \frac{1}{2}(\beta_{1k} + \beta_{2k} + \beta_{3k} + a_{3k})$$

$$= \frac{1}{2}(\beta_{1k} + \beta_{2k} + \beta_{3k} + a_{1k} + a_{2k}).$$

*Indem wir sie zu den eben berechneten Argumenten der Doppeltangenten hinzufügen, haben wir deren eigentliche Charakteristiken, wie sie in Fig.* 5 *angegeben sind.*

Der *ausgezeichnete Kegelschnitt* endlich bestimmt sich durch folgende Ueberlegungen. Man hat für seine drei Berührungspunkte $c_1^0$, $c_2^0$, $c_3^0$ folgende Gleichungen (§ 2.):

$$-K_k = \int_{\mu}^{c_1^0} d\mathfrak{J}_k + \int_{\mu}^{c_2^0} d\mathfrak{J}_k + \int_{\mu}^{c_3^0} d\mathfrak{J}_k.$$

Es fallen dabei, wie bereits angegeben, $c_1^0$, $c_2^0$, $c_3^0$ in drei derjenigen Scheitel, welche bez. *I*, *II*, *III* begrenzen, und durch diesen Umstand werden die vorstehenden Gleichungen, was die imaginären Theile angeht, jedenfalls befriedigt. Es sind also nur noch die reellen Theile zu beachten. Mit anderen Worten: *Die Punkte $c_1^0$, $c_2^0$, $c_3^0$ sind unter den die Segmente I, II, III begrenzenden Scheiteln in der Weise auszusuchen, dass die ihnen in Fig.* 4 *beigesetzten Zahlen zusammenaddirt congruent werden mit den reellen Theilen der* $(-K_k)$.

Aber die reellen Theile der $(-K_k)$ sind congruent mit

$$-\frac{1}{2}(a_{1k} + a_{2k}),$$

oder, was dasselbe ist, mit

$$+\frac{1}{2}(a_{1k} + a_{2k});$$

es ergiebt sich also der Kegelschnitt, den Fig. 6 darstellt.

*Er schliesst das Segment III ein, während er mit den Segmenten I und II einen äusserlichen Contact besitzt.* Damit ist zugleich angegeben, welche Lage der ausgezeichnete Berührungskegelschnitt besitzt, wenn an Stelle der hyperelliptischen Curve wiederum die eigentliche Curve vierter Ordnung mit ihren vier Ovalen tritt.

München, im August 1876.

# Ueber correspondirende Flächenelemente.

(Aus den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Februar 1876.)

Von C. Neumann in Leipzig.

---

Setzt man zwischen den Punkten $x, y, z$ und $\xi, \eta, \zeta$ die Correspondenz fest:

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi = \varphi(x, y, z), \\ \eta = \psi(x, y, z), \\ \zeta = \chi(x, y, z), \end{cases}$$

wo $\varphi, \psi, \chi$ gegebene Functionen sein sollen, und versteht man unter $dt$ und $d\tau$ zwei correspondirende *Raum*elemente, so findet bekanntlich die Relation statt:

$$(2) \qquad \frac{d\tau}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Ein ähnlicher Satz gilt für zwei correspondirende *Flächen*elemente $ds$ und $d\sigma$. Sind nämlich $a, b, c$ die Richtungscosinus der Normale von $ds$, und $\alpha, \beta, \gamma$ die Richtungscosinus der Normale von $d\sigma$, so findet die Relation statt:

$$(3) \qquad \frac{d\sigma}{ds} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} & \alpha \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \beta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \gamma \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

Ohne auf den Beweis dieses Satzes (3) hier näher einzugehen, will ich nur bemerken, dass derselbe angewendet werden kann, um den analytischen Ausdruck für das Gauss'sche *Krümmungsmaass* einer gegebenen Fläche:

$$f(x, y, z) = 0$$

zu entwickeln. In diesem Falle sind offenbar die allgemeinen Gleichungen (1) durch folgende specielleren zu ersetzen:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial x}, \\ \eta = \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial y}, \\ \zeta = \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \text{wo } R = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}; \end{cases}$$

ferner sind in diesem Falle $a$, $b$, $c$ und $\alpha, \beta, \gamma$ identisch mit $\xi, \eta, \zeta$; und man erhält daher für das Gauss'sche Krümmungsmaass $k$ der gegebenen Fläche die Formel:

$$k = \frac{d\sigma}{ds} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} & \xi \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \eta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix};$$

hieraus aber entspringt durch Substitution der für $\xi$, $\eta$, $\zeta$ angegebenen Werthe sofort der bekannte Ausdruck:

$$k = \frac{(-1)}{R^4} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}.$$

Ein *zweiter* Satz über correspondirende Flächenelemente ergiebt sich, sobald man ausgeht von etwas *anderen* Grundlagen, nämlich annimmt, dass $x, y, z$ und $\xi, \eta, \zeta$ gegeben seien als bestimmte Functionen zweier Parameter $p, q$:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \lambda(p, q), \\ y = \mu(p, q), \\ z = \nu(p, q), \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = \Lambda(p, q), \\ \eta = \mathsf{M}(p, q), \\ \zeta = \mathsf{N}(p, q): \end{cases}$$

alsdann wird die Gesammtheit der Punkte $x, y, z$ eine gewisse Fläche*), und die Gesammtheit der Punkte $\xi, \eta, \zeta$ eine gewisse andere Fläche bilden. Nennt man nun zwei Punkte $x, y, z$ und $\xi, \eta, \zeta$ dieser Flächen, welche *dieselben* Parameter $p, q$ haben, *correspondirende* Punkte, und bezeichnet man zwei in diesem Sinne einander correspondirende Elemente der beiden Flächen mit $ds$ und $d\sigma$, so findet die Relation statt:

*) Man erhält die Gleichung dieser Fläche, wenn man aus dem in (4) auf der linken Seite stehenden Formelsystem die Grössen $p$, $q$ eliminirt.

$$(5) \qquad ds : d\sigma = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} & a \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} & b \\ \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q} & c \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial p} & \frac{\partial \xi}{\partial q} & \alpha \\ \frac{\partial \eta}{\partial p} & \frac{\partial \eta}{\partial q} & \beta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial p} & \frac{\partial \zeta}{\partial q} & \gamma \end{vmatrix};$$

wo $a$, $b$, $c$ und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ [ebenso wie in (3)] die Richtungscosinus der Normalen von $ds$ und $d\sigma$ vorstellen.

Ohne auf den Beweis dieses Satzes (5) hier mich näher einzulassen, will ich nur noch bemerken, dass man denselben ebenfalls mit gutem Erfolg benutzen kann zur Reproduction gewisser von Gauss für das *Krümmungsmaass* gegebener Formeln.

# Ueber die Zuverlässigkeit des Ampère'schen Gesetzes.

(Aus den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Februar 1876.)

Von C. Neumann in Leipzig.

---

Das Vertrauen, dessen das Ampère'sche Gesetz ein halbes Jahrhundert hindurch sich erfreut hat, dürfte durch die Angriffe, denen dasselbe in letzter Zeit ausgesetzt war, gelitten haben, — vielleicht um so mehr gelitten haben, als das Gesetz in den Augen der meisten Physiker und Mathematiker wohl immer noch auf der bedenklichen Hypothese ruht, dass die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein einzelnes Stromelement gegen letzteres *senkrecht* sei.

*Ich werde im Folgenden zeigen, dass das Ampère'sche Gesetz von der genannten Hypothese unabhängig ist,* — was allerdings *implicite* schon aus einer Untersuchung Stefan's*) hervorgeht. — Dabei mag es gestattet sein, einige vorbereitende Bemerkungen voranzuschicken, indem ich (in § 1.) an zwei rein mathematische Sätze, und sodann (in § 2.) an die Ersetzbarkeit geschlossener elektrischer Ströme durch magnetische Flächen kurz erinnere.

## § 1.

## Zwei mathematische Hülfsätze.

Ich werde diese Sätze hier nur *historisch* angehen, ohne auf den Beweis derselben mich näher einzulassen.

*Erster Satz***). — Es sei $Ds$ das Element eines *Ringes* d. i. einer geschlossenen Curve; ferner sei $D\omega$ das Element einer von diesem Ringe begrenzten Fläche, und $\nu$ die positive***) Normale von $D\omega$. Ausserdem mögen $Ds_1$, $D\omega_1$, $\nu_1$ analoge Bedeutung haben für irgend einen *zweiten Ring*. Endlich seien $\vartheta$, $\vartheta_1$ die Winkel, unter welchen

---

*) Stefan: *Die Grundformeln der Elektrodynamik.* Sitzungsberichte der Wiener Akad. (1869) Bd. LIX p. 693. — Vergl. auch die Fortschritte der Berliner Physik. Gesellschaft, Jahrg. XXV, p. 604.

**) Man findet den Beweis dieses Satzes in meinem Werk: *„Die elektrischen Kräfte"*, Leipzig 1873, p. 93; ferner auch in den Abh. d. Kl. Sächs. Ges., 1873, p. 431.

***) Ich verstehe unter der *positiven* Normale von $D\omega$ diejenige, welche zur festgesetzten Umlaufsrichtung des Ringes ebenso liegt, wie die $z$-Axe zur $xy$-Richtung.

die Elemente $Ds$, $Ds_1$ gegen ihre Verbindungslinie $r\,(Ds_1 \rightarrow Ds)$ geneigt sind, und $\varepsilon$ der Neigungswinkel der beiden Elemente gegen einander. Alsdann drückt der *Satz* sich aus durch die Formel:

$$\text{(I)} \qquad \Sigma\Sigma \frac{\cos\varepsilon}{r}\, Ds\, Ds_1 = -\,\Sigma\Sigma \frac{\partial^2 (r^{-1})}{\partial\nu\,\partial\nu_1}\, D\omega\, D\omega_1,$$

die Integrationen $\Sigma\Sigma$ ausgedehnt gedacht über alle $Ds$, $Ds_1$, respective über alle $D\omega$, $D\omega_1$. Dabei bezeichnet $r$ die Entfernung zwischen $Ds$, $Ds_1$, respective zwischen $D\omega$, $D\omega_1$.

*Zweiter Satz**). — Wir wollen annehmen, die beiden Ringe seien *starr* (d. i. von unveränderlicher Gestalt), und im Raume *frei beweglich*. Zugleich mag $dr$ derjenige Zuwachs genannt werden, welchen die Entfernung $r$ zweier Elemente $Ds$, $Ds_1$ bei irgend einer Bewegung der Ringe während des Zeitelementes $dt$ erfährt. Aldann lautet der *Satz* folgendermassen: — *Sollen zwei noch unbekannte Functionen* $\varphi = \varphi(r)$ *und* $\psi = \psi(r)$ *von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral*

$$\text{(II)} \qquad \Sigma\Sigma(\varphi \cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \psi \cos\varepsilon)\, dr\, Ds\, Ds_1$$

*für zwei starre Ringe von beliebiger Gestalt und beliebiger Bewegung jederzeit verschwindet, so ist dazu erforderlich und ausreichend, das* $\varphi$ *und* $\psi$ *identisch Null sind.*

*Bemerkung.* — Schliesslich sei noch erinnert an die bekannten Formeln:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial s} &= \cos\vartheta, & \frac{\partial (r^2)}{\partial s} &= 2r\cos\vartheta, \\ \frac{\partial r}{\partial s_1} &= -\cos\vartheta_1, & \frac{\partial (r^2)}{\partial s_1} &= -2r\cos\vartheta_1, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s_1} &= \frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - \cos\varepsilon}{r}, & \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s\,\partial s_1} &= -2\cos\varepsilon, \end{aligned}$$

so wie auch an die hieraus entspringende Formel:

$$\text{(III}^a\text{)} \qquad \frac{\partial^2 (r^{-1})}{\partial s\,\partial s_1} = \frac{\cos\varepsilon - 3\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r^3}.$$

Hier bezeichnen $\vartheta$, $\vartheta_1$, $\varepsilon$ die Ampère'schen Winkel, nämlich $\vartheta$ und $\vartheta_1$ die Neigungswinkel der Elemente $Ds$ und $Ds_1$ gegen die Linie $r$ $(Ds_1 \rightarrow Ds)$, und $\varepsilon$ den Neigungswinkel der beiden Elemente gegen einander.

## § 2.

### Die Ersetzbarkeit elektrischer Ströme durch magnetische Flächen.

Zu den am besten constatirten Vorstellungen der Elektrodynamik gehört: *die Ersetzbarkeit geschlossener elektrischer Ströme durch magnetische Flächen*, oder genauer ausgedrückt die Vorstellung, dass die

---

*) Man findet den Beweis dieses Satzes in meinem Aufsatz in den Abh. d. Kgl. Sächs. Ges., 1873, p. 440.

ponderomotorische Einwirkung zweier elektrischer Stromringe auf einander identisch sei mit der gegenseitigen Einwirkung zweier magnetischer Flächen, deren jede durch einen der beiden Ringe begrenzt ist.

Aus dieser Vorstellung folgt, dass für zwei elektrische Stromringe ein Potential $P$ existirt von der Form:

$$(IV) \qquad P = JJ_1 Q = A^2 JJ_1 \cdot \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 (r^{-1})}{\partial\nu\partial\nu_1} D\omega D\omega_1 .$$

Dieses Potential kann mit Hülfe des Satzes (I) auch so dargestellt werden:

$$(V) \qquad P = JJ_1 Q = -A^2 JJ_1 \cdot \Sigma\Sigma \frac{\cos\varepsilon}{r} DsDs_1 .$$

Hier bezeichnet $A^2$ eine Constante, während $J$, $J_1$ die beiden Stromstärken sind. Zugleich bemerkt man, dass $Q$ das auf die Strom*einheiten* bezogene Potential, nämlich denjenigen Werth repräsentirt, welchen $P$ annimmt für $J = J_1 = 1$.

Aus der genannten Vorstellung der Ersetzbarkeit geschlossener Ströme durch magnetische Flächen folgt nun ferner, dass die von den beiden Stromringen bei beliebiger Bewegung auf einander ausgeübte ponderomotorische Arbeit gleich dem negativen Zuwachs des Potentials ist. Bezeichnet man also jene Arbeit mit $dL$, so ist:

$$(VI) \qquad dL = -JJ_1 dQ,$$

oder falls man für $Q$ seinen Werth aus (V) substituirt:

$$(VII) \qquad dL = +A^2 JJ_1 \cdot \Sigma\Sigma d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) DsDs_1,$$

wo $dQ$ und $d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right)$ die dem betrachteten Zeitelement $dt$ entsprechenden Zuwüchse von $Q$ und $\frac{\cos\varepsilon}{r}$ bezeichnen.

Nun ist

$$d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = -\frac{(\cos\varepsilon)\,dr}{r^2} + \frac{1}{r}\,d(\cos\varepsilon),$$

oder mit Rücksicht auf (III):

$$d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = -\frac{(\cos\varepsilon)\,dr}{r^2} - \frac{1}{2r} d\left(\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s\partial s_1}\right),$$

oder weil die den Bogenlängen $s$, $s_1$ entsprechenden Differentiationen $\partial$, $\partial$ und die der Zeit entsprechende Differentiation $d$ von einander unabhängig sind:

$$d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = -\frac{(\cos\varepsilon)\,dr}{r^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (r\,dr)}{\partial s\partial s_1},$$

oder was dasselbe ist:

$$d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = -\frac{(\cos\varepsilon)\,dr}{r^2} - \left\{\frac{\partial^2 (r^{-1})}{\partial s\partial s_1} r\,dr + \frac{\partial G}{\partial s_1} - \frac{\partial F}{\partial s}\right\},$$

wo es auf die Bedeutungen von $F$ und $G$ nicht weiter ankommt*). Hieraus folgt weiter mit Rücksicht auf (III$^a$):

$$d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = -\frac{(\cos\varepsilon)dr}{r^2} - \frac{(\cos\varepsilon - 3\cos\vartheta\cos\vartheta_1)dr}{r^3} - \frac{\partial G}{\partial s_1} + \frac{\partial F}{\partial s},$$

oder was dasselbe ist:

$$d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = \frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2}dr - \frac{\partial G}{\partial s_1} + \frac{\partial F}{\partial s}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (VII), so folgt schliesslich:

$$\text{(VIII)} \qquad dL = A^2 JJ_1 \cdot \Sigma\Sigma \frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2} dr\, Ds\, Ds_1;$$

denn die Glieder $\frac{\partial G}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial F}{\partial s}$ verschwinden bei Ausführung der Integrationen, weil die Ströme *geschlossen* sind**).

Das durch die Formeln (VI), (VII), (VIII) ausgedrückte allgemeine Gesetz***) ist durch sorgfältige experimentelle Untersuchungen bestätigt worden, und kann daher als unbedingt zuverlässig angesehen werden.

Doch giebt dieses Gesetz nur Auskunft über die Wirkungen *geschlossener* Ströme, nicht aber über die gegenseitige Einwirkung der einzelnen Strom*elemente*. Um letztere zu ermitteln ist die Herbeiziehung irgend welcher *hypothetischen* Annahmen unumgänglich erforderlich. Wir wollen zunächst diejenigen Hypothesen uns vergegenwärtigen, deren Ampère sich hierbei bediente.

## § 3.

## Die Ampère'schen Hypothesen.

Diese lassen sich folgendermassen aussprechen:

(1) *Erste Hypothese. Die ponderomotorische Kraft $R$, welche zwei Stromelemente $JDs$ und $J_1 Ds_1$ aufeinander ausüben, ist proportional mit*

---

*) Es ergiebt sich die letzte Formel der vorhergehenden Seite aus der vorletzten vermittelst der identischen Relation:

$$U\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial s_1} - V\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s_1}\left(U\frac{\partial V}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(V\frac{\partial U}{\partial s_1}\right);$$

es ist nämlich im vorliegenden Fall: $U = r^{-1}$, $V = rdr$, mithin:

$$F = rdr\frac{\partial(r^{-1})}{\partial s_1} \text{ und } G = r^{-1}\cdot\frac{\partial(rdr)}{ds}.$$

**) Die Transformation der Formel (VII) in (VIII) ist von Heine ausgeführt worden in G. Wiedemann's Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus, Zweite Auflage, Bd. 2, p. 708—711. Uebrigens ist diese Transformation auch schon enthalten als specieller Fall in einem von mir aufgestellten allgemeinen Satz, Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. 1873, p. 447.

***) An andern Orten habe ich dieses Gesetz als *Potentialgezetz* oder als *ponderomotorisches Integralgesetz* bezeichnet.

$$JJ_1 DsDs_1,$$

*und schlägt daher in ihr Gegentheil um, sobald in einem der beiden Elemente die Stromrichtung umgekehrt wird.*

(2) *Zweite Hypothese. Abgesehen vom Factor* $JJ_1 DsDs_1$ *ist die Kraft* $R$ *nur noch abhängig von der relativen Lage der beiden Elemente.* Denkt man sich also z. B. von den Linien $JDs$, $J_1 Ds_1$, $R$ das Spiegelbild $JD\sigma$, $J_1 D\sigma_1$, P entworfen in Bezug auf irgend eine Ebene, so wird, ebenso wie $R$ die zwischen $JDs$ und $J_1 Ds_1$ vorhandene Wirkung vorstellt, ebenso auch P die Wirkung zwischen $JD\sigma$ und $J_1 D\sigma_1$ repräsentiren.

(3) *Dritte Hypothese. Die Kraft* $R$ *ist ersetzbar durch diejenigen Kräfte, welche die Componenten von* $JDs$ *und die Componenten von* $J_1 Ds_1$ *auf einander ausüben.*

(4) *Vierte Hypothese. Die Kraft* $R$ *fällt ihrer Richtung nach zusammen mit der Verbindungslinie der beiden Elemente.*

(5) *Fünfte Hypothese. Die Kraft* $R$ *variirt, falls man die Winkel* $\vartheta$, $\vartheta_1$, $\varepsilon$ *constant erhält, umgekehrt proportional mit dem Quadrate der Entfernung.* Dabei sollen $\vartheta$, $\vartheta_1$ die Winkel bezeichnen, unter welchen $Ds$, $Ds_1$ gegen die Linie $r(Ds_1 \rightarrow Ds)$ geneigt sind, und $\varepsilon$ den Neigungswinkel der beiden Elemente gegen einander, — ebenso wie in (III).

(6) *Sechste Hypothese. Die ponderomotorische Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein einzelnes Stromelement steht gegen letzteres senkrecht.*

Ich werde nun im Folgenden nur die Hypothesen (1), (2), (3), (4) benutzen, und zeigen, dass dieselben zur Ableitung des Ampère'schen Gesetzes ausreichend sind. Mit andern Worten: Ich werde nachweisen, dass die Hypothesen (5) und (6) *überflüssig* sind.

## § 4.

### Ableitung des Ampère'schen Gesetzes, abgesehen von zwei noch unbekannt bleibenden Functionen.

Es sei $E$ eine gegebene Ebene, ferner seien $l$, $m$ irgend zwei Stromelemente*), und $\lambda$, $\mu$ ihre Spiegelbilder in Bezug auf $E$. Die zwischen $l$, $m$ stattfindende Kraft $R$ wird alsdann, nach Hypothese (2), gleich gross sein mit der Kraft zwischen $\lambda$, $\mu$; was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$R(l, m) = R(\lambda, \mu).$$

Denken wir uns nun das Linienelement $m$ seiner ganzen Länge nach in die Ebene $E$ hineinfallend, so wird offenbar $\mu$ identisch mit $m$; so dass wir erhalten:

*) Ausführlicher würden dieselben etwa zu bezeichnen sein mit $JDs$, $J_1 Ds_1$; sodass also $l$ zur Abkürzung steht für $JDs$, und $m$ für $J_1 Ds_1$.

$$R(l, m) = R(\lambda, m).$$

Denken wir uns ferner $l$ senkrecht gegen $E$, und von $E$ halbirt, so erhalten wir für $\lambda$ ein Linienelement $l'$, welches mit $l$ zusammenfällt, und von $l$ nur durch *entgegengesetzte Richtung* sich unterscheidet. Hiedurch nimmt unsere Formel die Gestalt an:

$$R(l, m) = R(l', m).$$

Andererseits folgt nun aber aus der Hypothese (1), dass die Kraft $R(l, m)$ in ihr Gegentheil umschlägt, sobald man in einem der beiden Elemente, z. B. in $l$ die Stromrichtung umkehrt; und es ist also

$$R(l, m) = -R(l', m).$$

Aus den beiden letzten Formeln folgt durch Addition sofort:

$$R(l, m) = 0.$$

D. h.: Die Wirkung zwischen zwei Stromelementen $l$ und $m$ ist immer Null, wenn $m$ in einer Ebene liegt, welche durch $l$ senkrecht hindurchgeht. Mit andern Worten:

(7) *Bezeichnet $r$ die Verbindungslinie zweier Stromelemente, so wird die ponderomotorische Einwirkung der beiden Elemente auf einander stets Null sein, sobald das eine senkrecht steht gegen die durch das andere und $r$ sich bestimmende Ebene.*

Solches vorangeschickt wollen wir nun die zwischen zwei Stromelementen $JDs$ und $J_1 Ds_1$ stattfindende Kraft

$$R(Ds, Ds_1)$$

näher zu bestimmen suchen. Diese Kraft fällt nach Hypothese (4) mit der Verbindungslinie $r$ zusammen, und besitzt nach den Hypothesen (1), (2) einen Werth von folgender Form:

$$(8) \qquad R(Ds, Ds_1) = JJ_1 Ds Ds_1 f(r, \vartheta, \vartheta_1, \varepsilon),$$

wo $\vartheta, \vartheta_1, \varepsilon$ die Ampère'schen Winkel bezeichnen [vergl. (III)]. Führen wir nun ein rechtwinkliges Axensystem ein, dessen $x$-Axe mit $r$ zusammenfällt, und bezeichnen wir die diesem System entsprechenden Componenten von $Ds$ und $Ds_1$ respective mit $Dx$, $Dy$, $Dz$ und $Dx_1$, $Dy_1$, $Dz_1$, so folgt aus Hypothese (3) sofort:

$$(9) \quad R(Ds, Ds_1) = R(Ds, Dx_1) + R(Ds, Dy_1) + R(Ds, Dz_1),$$

und hieraus durch nochmalige Anwendung derselben Hypothese:

$$\begin{aligned}(10) \quad R(Ds, Ds_1) = {} & R(Dx, Dx_1) + R(Dx, Dy_1) + R(Dx, Dz_1) \\ & + R(Dy, Dx_1) + R(Dy, Dy_1) + R(Dy, Dz_1) \\ & + R(Dz, Dx_1) + R(Dz, Dy_1) + R(Dz, Dz_1).\end{aligned}$$

Die 9 Kräfte rechter Hand sind aber, mit Ausnahme der in der Diagonale stehenden, sämmtlich *Null*, zufolge des Satzes (7). Somit erhalten wir:

(11) $R(Ds, Ds_1) = R(Dx, Dx_1) + R(Dy, Dy_1) + R(Dz, Dz_1)$.

Nun ist aber nach (8):

$$R(Dx, Dx_1) = JJ_1 Dx Dx_2 f(r, 0^0, 0^0, 0^0),$$
$$R(Dy, Dy_1) = JJ_1 Dy Dy_1 f(r, 90^0, 90^0, 0^0),$$
$$R(Dz, Dz_1) = JJ_1 Dz Dz_1 f(r, 90^0, 90^0, 0^0).$$

Substituiren wir diese Werthe in (11), und führen wir dabei die Bezeichnungen ein:

$$f(r, 0^0, 0^0, 0^0) = \Phi(r),$$
$$f(r, 90^0, 90^0, 0^0) = \Psi(r),$$

so folgt:

(12) $R(Ds, Ds_1) = JJ_1[Dx Dx_1 \Phi(r) + (Dy Dy_1 + Dz Dz_1)\Psi(r)]$,

oder was dasselbe ist:

(13) $R(Ds, Ds_1) = JJ_1 Ds\, Ds_1 [\alpha\alpha_1 \Phi(r) + (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)\Psi(r)]$.

Hier bezeichnen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ die Richtungscosinus von $Ds$ und $Ds_1$; und es ist also:

$$\alpha = \cos\vartheta, \qquad \alpha_1 = \cos\vartheta_1,$$
$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \cos\varepsilon,$$

mithin:

$$\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \cos\varepsilon - \cos\vartheta\cos\vartheta_1.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in (13) ergiebt sich, falls wir die Kraft $R(Ds, Ds_1)$ weiterhin kurzweg mit $R$ bezeichnen, der Werth:

(14) $R = JJ_1 Ds Ds_1 [\cos\vartheta\cos\vartheta_1 \Phi(r) + (\cos\varepsilon - \cos\vartheta\cos\vartheta_1)\Psi(r)]$,

oder schliesslich, falls man $\Phi(r) - \Psi(r)$ mit $\Lambda(r)$ bezeichnet:

(15) $R = JJ_1 Ds Ds_1 [\Lambda(r)\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \Psi(r)\cos\varepsilon]$.

Es handelt sich also jetzt nur noch um die Ermittelung der beiden unbekannten Functionen $\Lambda(r)$ und $\Psi(r)$.

## § 5.

### Bestimmung der noch unbekannt gebliebenen Functionen.

Denken wir uns die Kraft $R$ (15) *repulsiv* gerechnet, so wird die ponderomotorische Arbeit, welche die beiden Elemente $JDs$, $J_1 Ds_1$ während einer beliebigen Bewegung auf einander ausüben, dargestellt sein durch $R\,dr$, wo $dr$ den Zuwachs der Entfernung bezeichnet während des betrachteten Zeitelementes $dt$. Die ponderomotorische Arbeit $dL$, welche zwei gegebene *Stromringe* während der Zeit $dt$ auf einander ausüben, hat daher den Werth:

(16) $$dL = \Sigma\Sigma R dr,$$

die Integration $\Sigma\Sigma$ ausgedehnt über alle Elemente $Ds$, $Ds_1$ der beiden Ringe. Hieraus folgt durch Substitution des Ausdruckes (15):

$$(17)\quad dL = JJ_1 \cdot \Sigma\Sigma[\Lambda(r)\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \Psi(r)\cos\varepsilon]dr\,Ds\,Ds_1.$$

Andererseits aber kann die ponderomotorische Arbeit $dL$ auf Grund des früher besprochenen allgemeinen Gesetzes [vergl. (VI) und (VIII)] auch so ausgedrückt werden:

$$(18)\quad dL = -JJ_1 dQ$$

oder:

$$(19)\quad dL = A^2JJ_1 \cdot \Sigma\Sigma\frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2}dr\,Ds\,Ds_1.$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (17) und (19) gelangen wir zu der Formel:

$$(20)\quad \Sigma\Sigma\left\{\left(\Lambda(r) - \frac{3A^2}{r^2}\right)\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \left(\Psi(r) + \frac{2A^2}{r^2}\right)\cos\varepsilon\right\}dr\,Ds\,Ds_1 = 0.$$

Aus dieser Formel aber, welche (ebenso wie die angestellten Betrachtungen) gültig ist für *beliebige* Bewegungen der beiden Ringe, erkennen wir mit Rücksicht auf den Satz (II) sofort, dass die Functionen $\Lambda(r)$, $\Psi(r)$ folgende Werthe besitzen müssen:

$$(21)\quad \Lambda(r) = \frac{3A^2}{r^2},$$

$$\Psi(r) = -\frac{2A^2}{r^2};$$

somit gewinnt die Formel (15) folgendes Aussehen:

$$(22)\quad R = A^2JJ_1\,Ds\,Ds_1\,\frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2};$$

dies aber ist das Ampère'sche *Gesetz*.

Somit ist dargethan, dass zur Ableitung dieses Gesetzes nur die Hypothesen (1), (2), (3), (4) erforderlich, die Hypothesen (5), (6) hingegen überflüssig sind.

---

Nachträgliche Bemerkung. — Wollte man *sämmtliche* Hypothesen vermeiden [nicht blos (5), (6), sondern auch (1), (2), (3), (4)], so würde allerdings immer noch die Formel (VIII):

$$(23)\quad dL = A^2JJ_1\,\Sigma\Sigma\frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2}dr\,Ds\,Ds_1$$

übrig bleiben, — als Ausdruck der Thatsache, dass geschlossene elektrische Ströme durch magnetische Flächen ersetzbar sind. Und auf Grund dieser Formel würde man behaupten können, *die gegenseitige Einwirkung geschlossener Ströme sei von solcher Art, als ob die einzelnen Stromelemente mit einer Kraft*

$$(24)\quad R = A^2JJ_1\,\frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2}\,Ds\,Ds_1$$

*aufeinander einwirkten.* — Dies ist das Verfahren von Heine*), welches an und für sich vollständig correct ist, leicht aber zu Missverständnissen führen kann, wenn man dasselbe als eine *„Ableitung"* des Ampère'schen Gesetzes bezeichnet.

Denn aus der Formel (23) darf man nicht schliessen auf die *Nothwendigkeit* der Formel (24), sondern nur auf ihre *Möglichkeit.* Oder was dasselbe ist: Aus der Thatsache der Ersetzbarkeit geschlossener elektrischer Ströme durch magnetische Flächen darf man nicht schliessen auf die *Nothwendigkeit* des Ampère'schen Gesetzes, sondern nur auf seine *Möglichkeit.* Oder noch schärfer ausgedrückt: Man darf nicht behaupten, dass das Ampère'sche Gesetz aus jener Thatsache *ableitbar,* sondern nur, dass es mit derselben *verträglich* sei.

*) L. c. pag. 711.

## Inhaltsverzeichniss.


| | | Seite |
|---|---|---|
| § 1. | Zwei mathematische Hülfssätze | 309 |
| § 2. | Die Ersetzbarkeit elektrischer Ströme durch magnetische Flächen | 310 |
| § 3. | Die Ampère'schen Hypothesen | 312 |
| § 4. | Ableitung des Ampère'schen Gesetzes, abgesehen von zwei noch unbekannt bleibenden Functionen | 313 |
| § 5. | Bestimmung dieser Functionen | 315 |

# Ueber die gegen das Weber'sche Gesetz erhobenen Einwände.

Von

C. Neumann in Leipzig.

Gegen das Weber'sche Gesetz sind im Ganzen *drei* Einwände erhoben worden, einer von Tait und Thomson, zwei andere von Helmholtz. Zur bequemeren Unterscheidung sind letztere von Helmholtz selber mit (*A.*) und (*B.*) bezeichnet worden. Ich beabsichtige diese Einwände im Folgenden der Reihe nach zu besprechen, und darzuthun, dass denselben, wenigstens vorläufig, ein entscheidendes Gewicht *nicht* beizumessen ist.

## § 1.

### Der Tait-Thomson'sche Einwand gegen das Weber'sche Gesetz.

Zum ersten Male scheint dieser Einwand von Tait ausgesprochen zu sein in seinem *Sketch of Thermodynamics* (1868, pag. 57 und 76). Sodann findet man denselben Einwand in etwas grösserer Ausführlichkeit in *Thomson and Tait's Natural Philosophy*, und in der von Helmholtz und Wertheim veranstalteten deutschen Uebersetzung dieses Werkes (Braunschweig, 1871). Am letzteren Ort (S. 350) heisst es:

> Weber nimmt an, dass ein elektrischer Strom aus der Bewegung von Theilchen zweier Elektricitätsarten besteht, die den Leitungsdraht in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen, und dass diese Theilchen, wenn sie in relativer Bewegung sind, auf andere solche Elektricitätstheilchen Kräfte ausüben, die von denjenigen verschieden sind, welche sie im Zustande relativer Ruhe ausüben würden. Diese Annahme ist bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft auf keine Weise zu rechtfertigen, da wir uns die Hypothese, es existirten zwei elektrische Fluida, unmöglich als richtig denken können, und da die Schlüsse ausserdem *im Widerspruch mit der „Erhaltung der Energie" stehen*, die wir aus unzähligen experimentellen Gründen als ein allgemeines Naturprincip ansehen. Solche Theorien sind um so gefährlicher, wenn sie zufällig weitere Erscheinungen erklären, wie Weber's Theorie die inducirten Ströme erklärt.

Obwohl nun aus Weber's Schriften*), sowie auch aus meinen eigenen Abhandlungen**) über diesen Gegenstand deutlich hervorgeht, dass von einem Widerspruch des Weber'schen Gesetzes gegen das Princip der Erhaltung der Energie nicht die Rede sein kann, so wird es dennoch angemessen sein, hier von Neuem auf die Sache einzugehen.

Es seien $e$, $\eta$ zwei elektrische Massenpunkte mit den Trägheitszahlen $m$, $\mu$ und den Coordinaten $x$, $y$, $z$, $\xi$, $v$, $\zeta$, so dass also die die lebendige Kraft $T$ dieser beiden Punkte den Werth hat:

$$T = \tfrac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \tfrac{1}{2}\mu(\xi'^2 + v'^2 + \zeta'^2),$$

wo die Accente Differentiationen nach $t$, d. i. nach der Zeit andeuten. Wir wollen nun annehmen, dass diese beiden Massenpunkte $e$ und $\eta$ durch die dem Weber'schen Gesetz entsprechende repulsive Kraft

$$R = \frac{e\eta}{r^2}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2} + \frac{2rr''}{c^2}\right),$$

und ausserdem durch beliebige *äussere* Kräfte sollicitirt seien. Dabei bezeichne $r$ die gegenseitige Entfernung beider Punkte und $c$ die Weber'sche Constante.

Bekanntlich ist für jedes Zeitelement $dt$ die Zunahme der lebendigen Kraft eines materiellen Systems ebenso gross, wie die Summe aller während dieses Zeitelementes auf das System ausgeübten (innern und äussern) Arbeiten. Nach diesem allgemeinen Satze***) der Mechanik ist im gegenwärtigen Fall:

$$dT = Rdr + dS, \tag{1}$$

falls man nämlich unter $dS$ die von den *äussern* Kräften ausgeübte Arbeit versteht. Diese Formel erfährt eine bedeutende Vereinfachung durch die Bemerkung, dass der Ausdruck $Rdr$ ein vollständiges Differential ist. Setzt man nämlich:

$$W = \frac{e\eta}{r}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right),$$

so folgt durch Differentiation:

---

*) Poggendorff's Annalen Bd. 73, S. 229 (vom Jahre 1848).

**) C. Neumann: *Die Principien der Elektrodynamik*, Tübingen, 1868, Verlag von H. Laupp. Man vergl. auch: Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 101.

***) Die Differentialgleichungen für die Bewegung eines materiellen Punktsystems sind sämmtlich von der Form:

$$mx'' = X.$$

Denkt man sich jede solche Gleichung in die Form versetzt:

$$d\left(\frac{mx'^2}{2}\right) = Xdx,$$

und hierauf sämmtliche Gleichungen addirt, so entsteht der obige Satz.

$$dW = -e\eta\left[\left(1-\frac{r'^2}{c^2}\right)\frac{dr}{r^2}+\frac{2r'dr'}{rc^2}\right].$$

Es ist aber*): $r'dr' = r''dr$. Somit folgt:

$$dW = -\frac{e\eta}{r^2}\left[1-\frac{r'^2}{c^2}+\frac{2rr''}{c^2}\right]dr,$$

oder was dasselbe ist:

$$dW = -Rdr.$$

Es ist also $Rdr$ in der That ein *vollständiges Differential*, nämlich $= -dW$. Substituiren wir diesen Werth in die für $dT$ aufgestellte Formel (1), so erhalten wir:

$$d(T+W) = dS. \tag{2}$$

Nennen wir also (mit Weber) $W$ das *Potential* der beiden Punkte, so haben wir folgenden Satz:

*Bei einem System von zwei Punkten wird die Summe von lebendiger Kraft und Potential in jedem Zeitelement und folglich auch in jedem endlichen Zeitraum um ebensoviel anwachsen, als die dem System während des betreffenden Zeitraumes von Aussen zugeführte Arbeit beträgt***).

*Ist mithin das System sich selber überlassen, so wird jene Summe von lebendiger Kraft und Potential fortdauernd constant bleiben.*

Offenbar werden wir denselben Satz in derselben Weise auch dann abzuleiten im Stande sein, wenn das System aus *beliebig vielen* Punkten besteht. Somit erkennen wir, *dass das unsern Betrachtungen zu Grunde gelegte Weber'sche Gesetz mit dem allgemeinen Axiom oder Princip der Energie in bestem Einklange steht.* Denn dieses Princip verlangt, dass für jedes materielle System eine *Energiefunction* existire, d. i. eine vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängende Function, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um ebensoviel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraums von Aussen zugeführte Arbeit beträgt. Zugleich erkennen wir, dass diese Energiefunction (welche man kurzweg die *Energie* des Systems zu nennen pflegt) bei Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes durch die Summe von lebendiger Kraft und Potential dargestellt ist.

Das Vorurtheil, dass das Weber'sche Gesetz mit dem Princip der Energie im Widerspruch stehe, dürfte wohl allmählig sich verlieren.

---

*) Man erhält nämlich successive:

$$r'dr' = r'(r''dt) = r''(r'dt) = r''dr.$$

**) Unter der einem materiellen System von *Aussen* zugeführten Arbeit soll diejenige Arbeit verstanden werden, welche auf das System ausgeübt wird von den auf dasselbe einwirkenden *äussern* Kräften.

Auch sagt z. B. Maxwell in seinem bekannten Werke (*Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford 1873, Vol. II., p. 432) mit vollem Recht:

> *Weber's law is — — consistent with the principle of the conservation of energy in so far that a potential exists, and that is all that is required for the application of the principle by Helmholtz and Thomson.*

Helmholtz selber nimmt indessen dieser Frage gegenüber eine etwas andere Stellung ein, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden.

## § 2.

### Die betreffenden Aeusserungen von Helmholtz.

In seinem Aufsatz über „die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper" bemerkt Helmholtz (Borchardt's Journal Bd. 72, S. 63), dass das *Weber'sche Gesetz* dem *Princip der Energie* insofern sich füge, als es keinen Kreisprocess zulasse, bei welchem Arbeit aus Nichts erzeugt werde, dass es aber diesem Princip widerspreche insofern, als zwei elektrische Theilchen, die nach jenem Gesetz sich bewegen und mit endlicher Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen, und also eine unendlich grosse Arbeit leisten würden.

Mit grösserer Ausführlichkeit äussert sich Helmholtz über die vorliegende Frage in einem späteren Aufsatz (Monatsber. d. Berl. Akad., 18. April 1872); es heisst dort:

> Es war durch die Weber'sche Hypothese eine für die Principien der Naturwissenschaft höchst bedeutende Frage zum ersten Mal zur Prüfung an thatsächlichen Problemen gelangt, nämlich die, ob elementare, nicht weiter zerlegbare Kräfte angenommen werden müssen, die nicht blos von der Lage, sondern auch von der Bewegung der wirkenden Punkte abhängig sind. Ich selbst hatte schon in meiner Schrift: „über die Erhaltung der Kraft" hervorgehoben, dass Kräfte, die nur von der Entfernung und den Geschwindigkeiten, d. h. also von den Coordinaten der Punkte und deren ersten Differentialquotienten abhängen, das allgemeine Naturgesetz von der Erhaltung der Energie, welches sich auch in den elektrodynamischen Erscheinungen durchaus bestätigt, nothwendig verletzen müssen. Dagegen diesen noch complicirteren Fall, welchen das Weber'sche Gesetz aufstellt, wo die Kräfte von den Coordinaten und den ersten und zweiten Differentialquotienten derselben abhängen, hatte ich damals nicht berücksichtigt, und dieser Fall ist mit einer etwas erweiterten Form des Gesetzes von der Erhaltung der Energie allerdings vereinbar.

Diese Vereinbarkeit wird nun näher explicirt, nämlich dargelegt, dass bei Annahme Weber'scher Kräfte kein Kreisprocess möglich sei, durch welchen Arbeit gewonnen oder vernichtet werde.

In ganz ähnlicher Weise äussert sich Helmholtz bei einer andern Gelegenheit (Borch. J. Bd. 75, S. 36), fährt sodann aber fort:

Man hat sich bei den Untersuchungen darüber, ob das Gesetz der Erhaltung der Energie für gewisse Naturprocesse gültig sei oder nicht, meist damit begnügt, zu untersuchen, ob, wenn ich das analytische Resultat praktisch ausdrücken darf, ein immer wiederholter Cirkelprocess in das Unendliche Arbeit erzeugen oder zerstören kann.

In diesem Sinne nun verletzt die Weber'sche Annahme das Gesetz der Erhaltung der Energie *nicht*; aber sie thut es in einem anderen Sinne — — — —

Der nun folgende Einwand betrifft indessen nicht mehr das *gewöhnliche* Princip der Energie, sondern ein vollkommen *neues* hier zum ersten Mal ausgesprochenes Princip*).

Während nämlich das gewöhnliche Princip der Energie für jedes materielle System die Existenz einer Energiefunction, d. i. die Existenz einer Function verlangt, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um ebensoviel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraumes von Aussen zugeführte Arbeit beträgt, — verlangt jenes neue Princip nicht allein die *Existenz* einer solchen Function, sondern zugleich eine gewisse specielle *Beschaffenheit* derselben, indem es behauptet, der kinetische Theil**) dieser Function müsse *stets positiv* sein.

Ein so vollständig neues und seiner Natur nach hypothetisches Princip kann in hypothetischen Dingen unmöglich als Stütze dienen. Und es wird also der Helmholtz'sche Einwand nur in soweit zu beachten sein, als er etwa, auch *ohne* jenes Princip, einen bestimmten Inhalt noch darbieten sollte.

---

*) Es unterliegt keinem Zweifel und ist von mir in meinen Schriften auch hin und wieder angedeutet, dass die physikalischen Principien einer festen Formulirung unfähig, mithin ihrer Natur nach dehnbar und biegsam sind. Das *Princip der lebendigen Kraft* hat sich allmählig zum *Princip der Energie* ausgedehnt, und ist möglicherweise einer noch weiteren Ausdehnung fähig. — Demgemäss ist es *a priori* keineswegs unmöglich, dass dieses *Princip der Energie* sich allmählig zu jenem *neuen Helmholtz'schen Princip* erweitere. Nur scheint es mir zweckmässig, vorläufig wenigstens, die beiden Principien mit verschiedenen Namen zu bezeichnen.

**) Unter dem *kinetischen* Theil der Energiefunction ist derjenige Theil derselben zu verstehen, welcher von den Geschwindigkeiten abhängt. — In dem vorher behandelten Beispiel (S. 319) ist die ganze Energiefunction durch $T + W$, d. i. durch

$$T + \frac{e\eta}{r}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right)$$

dargestellt. Der *kinetische* Theil dieser Function ist also:

$$T - \frac{e\eta}{r}\frac{r'^2}{c^2};$$

während andererseits ihr noch übriger Theil $\frac{e\eta}{r}$ der *statische* Theil zu nennen sein würde.

Dies ist in der That der Fall. Denn wir können, unter Beiseitesetzung jenes Princips, über den Inhalt des Einwandes uns folgendermassen ausdrücken:

> *Helmholtz betrachtet die in einem System elektrischer Massenpunkte durch ihre gegenseitigen Einwirkungen entstehenden Beschleunigungen, und zeigt, dass diese Beschleunigungen für gewisse singuläre Zustände des Systems (d. i. für gewisse singuläre Werthe der Coordinaten und Geschwindigkeiten) unter Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes unendlich gross sein würden**); *— hieraus schliesst Helmholtz auf die Unzulässigkeit des Weber'schen Gesetzes.*

Einer solchen Schlussfolgerung können wir *nicht* beipflichten. Vielmehr werden wir aus dem von Helmholtz hervorgehobenen Umstande des Eintretens unendlich grosser Beschleunigungen *entweder* auf die Unzulässigkeit des Weber'schen Gesetzes, *oder aber* auf die Unmöglichkeit jener singulären Zustände zu schliessen haben. Entscheiden wir uns für die letztere Alternative, so tritt allerdings die Frage heran, *woher es komme*, dass einige Zustände des elektrischen Punktsystems möglich, andere unmöglich sind.

Auskunft über diese Frage wird man indessen, weil die elektrische Materie niemals allein, sondern stets in Verbindung mit der ponderablen Materie auftritt, nur von einem *universalen* Gesetz verlangen dürfen, welches alle Eigenschaften, Kräfte und Beziehungen *beider* Materien umfasst, und die aufeinanderfolgenden Zustände derselben mit souveräner Gewalt beherrscht. Unmöglich aber darf man eine solche Auskunft von einem Gesetze erwarten, welches, wie das Weber'sche, von all' jenen Eigenschaften, Kräften und Beziehungen nur einen kleinen Theil enthält, und den übrigen Theil (z. B. die Beziehungen zwischen Elektricität und ponderabler Materie, zwischen Elektricität und Wärme, Elektricität und Licht) mehr oder weniger im Dunklen lässt, — von einem Gesetz, welches seiner ganzen Natur nach nur ein *particulares* sein kann**).

---

*) Besteht das System aus beliebig vielen *festen* und $n$ *beweglichen* Massenpunkten, so erhält man, unter Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes, im Ganzen $3n$ Differentialgleichungen, deren jede die $3n$ Beschleunigungen $x''$, $y''$, $z''$ in linearer Weise enthält. Diese Beschleunigungen können daher unendlich gross werden, sobald die aus ihren Coefficienten gebildete Determinante Null wird. Und in der That dürften die in Rede stehenden singulären Zustände, wenn man sie möglichst allgemein angeben will, charakterisirt sein durch das Verschwinden dieser Determinante.

**) Dass das Weber'sche Gesetz *den letzten Grund der elektrischen Erscheinungen vollständig aussprechen solle,* ist meines Wissens niemals behauptet worden;

Um die Hauptsache zusammenzufassen: Aus dem von Helmholtz hervorgehobenen Umstande des Eintretens unendlich grosser Beschleunigungen kann nach Belieben *entweder* auf die Unzulässigkeit des Weber'schen Gesetzes, *oder aber* auf die Unmöglichkeit der betreffenden singulären Zustände geschlossen werden. Und es würde also übereilt sein, wenn man ohne hinreichende Gründe die eine Alternative vor der andern bevorzugen und in jenem Umstande ein Argument gegen das Weber'sche Gesetz erblicken wollte.

In der That würde ein Argument gegen dieses Gesetz nur dann vorliegen, wenn sich an irgend einem Beispiel nachweisen liesse, dass jene singulären Zustände *wirklich eintreten können.* Wie wenig ein solcher Nachweis bisher gelungen, werden wir später (in § 5.) erkennen.

## § 3.

### Der Helmholtz'sche Einwand (*A.*) gegen das Weber'sche Gesetz.

Kirchhoff hat zwei Abhandlungen veröffentlicht (Pogg. Ann. Bd. 100 u. Bd. 102), in denen er unter Zugrundelegung des *Weber'schen Gesetzes* und unter Herbeiziehung gewisser *accessorischer Annahmen* bestimmte Differentialgleichungen aufzustellen versuchte für die Bewegung der Elektricität in dünnen Drähten, sowie auch in körperlichen Leitern von beliebiger Gestalt. Die Art und Weise, in welcher Kirchhoff zu seinen accessorischen Annahmen gelangte, und die Bedeutung, welche er denselben beilegte, erkennen wir deutlich aus einzelnen Stellen seiner ersten Abhandlung. So heisst es z. B. dort gleich zu Anfang (S. 103):

> Ich habe versucht, eine allgemeine Theorie der Bewegung der Elektricität in einem unendlich dünnen Draht aufzustellen, *indem ich gewisse Thatsachen, welche bei constanten elektrischen Strömen und Strömen, deren Intensität sich nur langsam ändert, stattfinden, als allgemein geltend angenommen habe.* Ich erlaube mir hier diese Theorie zu entwickeln, und ihre Anwendung auf einige einfache Fälle auseinander zu setzen.

Weiterhin bemerkt Kirchhoff bei Ableitung einer gewissen Gleichung ausdrücklich (S. 201, Note):

> Der Ableitung dieser Gleichung liegt die *Voraussetzung* zu Grunde, dass auch bei dem *nicht* stationären Strom durch jeden Querschnitt

---

und es ist mir daher unverständlich, wenn Helmholtz (in Borchardt's Journal Bd. 75, S. 45) sich folgendermassen äussert:

„Wenn wir aber das Weber'sche Gesetz als ein wirklich elementares anerkennen sollen, als ein solches, *welches den letzten Grund der betreffenden Erscheinungen vollständig ausspricht*; und nicht nur als einen angenäherten Ausdruck der Thatsachen für gewisse engere Grenzen: so müssen wir verlangen, dass es auch, auf Objecte von den denkbar grössten Dimensionen angewendet, Folgerungen gebe, die physikalisch möglich sind."

des Leiters gleichzeitig gleiche Mengen der beiden Elektricitäten in entgegengesetzter Richtung sich bewegen. *Wollte man diese Vorstellung nicht festhalten*, so würde aber die Gleichung doch noch gelten; man müsste dann nur die Stromintensität definiren als das arithmetische Mittel aus den Mengen beider Elektricitäten, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters in entgegengesetzter Richtung gehen.

Wir erkennen aus diesen Bemerkungen, dass Kirchhoff jene von ihm eingeführten accessorischen Annahmen als ein ziemlich schwankendes Fundament betrachtete, dass er eine bestimmte Formulirung und Consolidirung derselben vorläufig kaum für möglich erachtete, vielmehr solches der fortschreitenden Zeit zu überlassen die Absicht hatte. Auch werden wir gern zugeben, dass es in der That besser war, jene accessorischen Annahmen in *dehnbarer und biegsamer* Form zu erhalten, als denselben durch voreiliges und willkührliches Eingreifen ein vielleicht verfehltes Gepräge aufzudrücken.

Solches vorangeschickt, — wenden wir uns nun zu unserm eigentlichen Gegenstande.

Der von Helmholtz (Borch. Journ. Bd. 72, S. 61 und Bd. 75, S. 38) gegen das Weber'sche Gesetz erhobene Einwand (*A.*) besteht darin, dass die aus diesem Gesetz entspringenden Kirchhoff'schen Differentialgleichungen ein *labiles* Gleichgewicht der in einem Körper vorhandenen Elektricität ergeben, mithin unhaltbar seien. Mit Rücksicht hierauf ist von mir schon früher (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. October 1871, S. 477) betont worden, dass die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen, ausser auf dem Weber'schen Gesetz, noch auf mancherlei andern *accessorischen Annahmen* beruhen. Hieraus folgt, dass das Weber'sche Gesetz durch ein gegen die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen geäussertes Bedenken nicht erschüttert werden kann, — um so weniger, als jene *accessorischen Annahmen* ziemlich complicirter Natur sind und wenig Sicherheit darbieten. Es bestehen nämlich jene *accessorischen Annahmen* in folgenden acht Voraussetzungen.

[*A.*] *Befindet sich die Elektricität des betrachteten ponderablen (linearen oder körperlichen) Leiters in irgend welcher (gleichförmigen oder ungleichförmigen) Bewegung, so fliessen in jedem Volumelement des Leiters gleiche Quanta positiver und negativer Elektricität mit gleichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen.*

[*B.*] *In jedem Volumelement ist ausser den gleich grossen Quantitäten strömender Elektricität im Allgemeinen auch noch ein gewisses Quantum ruhender Elektricität vorhanden. Diese ruhende Elektricität steht mit der strömenden in einem gewissen Tauschverkehr, der Art, dass bald Theilchen der einen in die Bewegung der anderen hineingerissen werden, bald umgekehrt Theilchen der letzteren aus der Bewegung ausscheiden, um der ersteren sich beizugesellen.*

[*C.*] *Bei einem homogenen Leiter ist die Dichtigkeit der strömenden Elektricität nicht nur für die beiderlei Elektricitäten, sondern auch an allen Stellen und zu allen Zeiten ein und dieselbe, — also eine dem Leiter eigenthümliche Constante.*

[*D.*] *Aus der Voraussetzung* [*A.*] *folgt, wie noch besonders zu betonen ist, dass die sogenannte freie Elektricität stets in Ruhe ist. Trotzdem kann der Vertheilungszustand der freien Elektricität sich ändern durch ihren Tauschverkehr mit der strömenden Elektricität.*

[*E.*] *Sind* $+\eta$, $-\eta$ *die in einem Volumelement vorhandenen Mengen strömender Elektricität, ist ferner* $\eta^{(f)}$ *das daselbst vorhandene Quantum freier Elektricität, und sind endlich* $R_p$, $R_n$, $R_f$ *die auf diese Massen* $+\eta$, $-\eta$, $\eta^{(f)}$ *in ein und derselben Richtung einwirkenden Kräfte, so besitzen die aus diesen Kräften resultirende ponderomotorische Einwirkung* $R$ *und die aus denselben resultirende elektromtorische Einwirkung* $\mathfrak{R}$ *folgende Werthe:*

$$R = R_p + R_n + R_f,$$

$$\mathfrak{R} = \frac{R_p - R_n}{2\eta}.$$

[*F.*] *Die Geschwindigkeit der strömenden Elektricität ist stets sehr klein gegen* $c$, *also sehr klein gegen eine Geschwindigkeit von etwa* 59000 *Meilen in der Sekunde.*

[*G.*] *Die Componenten der elektrischen Strömung sind stets ebenso gross wie die Componenten der einwirkenden elektromotorischen Kraft, letztere noch multiplicirt mit einer gewissen Constanten* $k$ (*der sogenannten Leitungsfähigkeit*).

[*H.*] *Ist der betrachtete Conductor von einem isolirenden Medium umgeben, und bezeichnet man die in ihm vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten mit* $u$, $v$, $w$, *andererseits die Dichtigkeit der freien Elektricität an seiner Oberfläche mit* $e$, *so findet die Relation statt:*

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma),$$

*wo* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *die Richtungswinkel der inneren Normale bezeichnen**).

Ich will gern einräumen, dass eine gewisse Willkühr, eine gewisse Wahl**) zwischen vielleicht gleichberechtigten, gleichgut sich eignenden

---

*) Man möge sich nicht wundern, diese Formel mitaufgenommen zu sehen unter die Zahl der hypothetischen Voraussetzungen. In der That knüpfen sich (wie ich im folgenden § zeigen werde) an diese Formel sehr ernstliche Bedenken; *und diese Bedenken sind um so schwerwiegender, als sie nicht nur den ungleichförmigen, sondern auch den gleichförmigen Zustand betreffen.*

**) Hinsichtlich der *Erwägungen*, welche bei dieser Auswahl maassgebend waren, sowie auch hinsichtlich der *Willkühr*, welche dabei hin und wieder nicht

Vorstellungen bei Formulirung dieser Voraussetzungen [*A.*], [*B.*], ··· [*H.*] nicht zu vermeiden gewesen ist; und hiedurch erklärt sich, dass dieselben von denen, welche Weber und später Lorberg angedeutet haben, in wesentlichen Punkten abweichen*). — — Mag man nun aber jene accessorischen Voraussetzungen so oder so formuliren, — immer wird man einräumen müssen, dass dieselben nicht minder hypothetisch sind, als das Weber'sche Gesetz selber; *und es bleibt daher stets die Frage, ob der von Helmholtz gegen die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen erhobene Einwand dem Weber'schen Gesetz oder jenen accessorischen Voraussetzungen aufzubürden sei.* Und die Expositionen des folgenden § dürften in der That zeigen, dass einige von diesen accessorischen Voraussetzungen *recht bedenklicher* Natur sind.

## § 4.

## Einige Bemerkungen zum Vorhergehenden.

### I. Ueber die Voraussetzung [*A.*].

Wollte man in der Hydrodynamik bei Einführung der bekannten Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

die gleichzeitige Einführung der entsprechenden Kräfte

$$\frac{\partial p}{\partial x},\quad \frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{\partial p}{\partial z}$$

*unterlassen*, so würde man zu Formeln gelangen, die mit sich selber in Widerspruch sind. Aus diesem und andern Beispielen (vgl. diese Annalen, Bd. VI, S. 335—336) resultirt der allgemeine Satz:

> *Soll die Bewegung eines materiellen Systems einer bestimmten Bedingungsgleichung unterworfen gedacht werden, so ist (falls man innere Widersprüche vermeiden will) nicht nur die Einführung der Bedingungsgleichung selber, sondern gleichzeitig auch die Einführung gewisser Kräfte erforderlich, welche für die Aufrechterhaltung jener Bedingungsgleichung Sorge tragen.*

Adoptirt man also z. B. die in [*A.*] genannte Voraussetzung, dass in einem elektrischen Strom stets *gleiche* Quanta der beiderlei Elektricitäten mit *gleichen* Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen

---

zu vermeiden war, verweise ich auf eine meiner letzten Arbeiten (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 128—151). In der That sind die dort mit [*A.*], [*B.*], ···· [*G.*] bezeichneten Annahmen, abgesehen von [*F.*], vollkommen identisch mit denjenigen, welche hier in gleicher Weise bezeichnet sind.

*) Näheres hierüber findet man in dem schon genannten Aufsatz (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 149).

fliessen, so wird man gezwungen sein, daneben auch gewisse *Kräfte* zu adoptiren, welche für ein solches Gleichsein Sorge tragen. — — Dies ist bisher noch *niemals* geschehen, auch wird man die analytischen Ausdrücke jener hinzuzufügenden Kräfte nicht gut angeben können, so lange man über jene Voraussetzung [*A.*] keine deutlicheren Vorstellungen als bisher sich gebildet hat.

## II. Ueber die Voraussetzung [*F.*].

Es mag hier beiläufig gestattet sein, eine kurze Andeutung zu geben über die *Gründe*, durch welche die Voraussetzung [*F.*] geboten ist*). Die Kraft $R$, mit welcher zwei Elektricitätstheilchen $e$ und $\eta$ in der Entfernung $r$ auf einander wirken, kann bekanntlich, falls man $\sqrt{r} = \psi$ setzt, dargestellt werden durch folgenden Ausdruck:

$$R = e\eta\left[\frac{1}{r^2} + \frac{8}{c^2}\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right].$$

Mit Hülfe dieser Formel wollen wir diejenige elektromotorische Wirkung zu berechnen suchen, welche ein in dem betrachteten Körper vorhandenes Theilchen *e freier* Elektricität hervorbringt in irgend einem Volumelement des Körpers. Die in diesem Volumelement vorhandenen Quantitäten *strömender* Elektricität seien bezeichnet mit $\eta$ und $-\eta$. Jenes Theilchen $e$ befindet sich, nach der Voraussetzung [*D.*], im Zustande der *Ruhe*; die Entfernung $r$ zwischen $e$ und $\eta$ wird daher *nur* deshalb eine Function der Zeit sein, weil $\eta$ in Bewegung ist. Bezeichnen wir also die Bahn der Masse $\eta$ mit $\sigma$, ferner ihre Geschwindigkeit und Beschleunigung mit $\sigma'$ und $\sigma''$, so hat die von $e$ auf $\eta$ ausgeübte Kraft $R_p$ den Werth:

$$R_p = e\eta\left[\frac{1}{r^2} + \frac{8}{c^2}\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}\sigma'^2 + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\sigma''\right)\right].$$

Da es sich hier nur um Andeutungen handeln soll, so wollen wir einen möglichst einfachen Fall annehmen, nämlich vorraussetzen, dass die Massen $\eta$ und $-\eta$ nicht nur entgegengesetzte Geschwindigkeiten, sondern auch entgegengesetzte Beschleunigungen besitzen**). Alsdann ergiebt sich die von $e$ auf $-\eta$ ausgeübte Kraft $R_n$ aus dem vorstehenden Ausdruck unmittelbar dadurch, dass man $\eta$, $\sigma'$, $\sigma''$ mit $-\eta$, $-\sigma'$, $-\sigma''$ vertauscht. Also:

$$R_n = -e\eta\left[\frac{1}{r^2} + \frac{8}{c^2}\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}\sigma'^2 - \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\sigma''\right)\right].$$

*) Schon deswegen, weil die Voraussetzung [*F.*] abweichend ist von der früher von mir proponirten (vergl. die zweite Note S. 326).

**) Im Allgemeinen ist solches *keineswegs* der Fall, vergl. den schon genannten Aufsatz (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 137).

Die von $e$ auf das betrachtete Volumelement ausgeübte elektromotorische Wirkung $\mathfrak{R}$ hat, nach Voraussetzung [*E.*], den Werth:

$$\mathfrak{R} = \frac{R_p - R_n}{2\eta};$$

und hieraus folgt durch Substitution der für $R_p$, $R_n$ gefundenen Ausdrücke sofort:

$$\mathfrak{R} = e\left[\frac{1}{r^2} + 8\frac{d\psi}{dr}\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\sigma'}{c}\right)^2\right].$$

Diese Formel aber reducirt sich auf die von Kirchhoff angewandte Formel:

$$\mathfrak{R} = e\frac{1}{r^2}$$

offenbar nur dann, wenn man $\frac{\sigma'}{c}$ als sehr klein betrachtet, also nur dann, wenn man die Geschwindigkeit $\sigma'$ der elektrischen Strömung als sehr klein betrachtet im Vergleich mit $c$.

## III. Ueber die Voraussetzung [*H.*].

Denken wir uns eine isolirt und fest aufgestellte Metallkugel, um welche ein elektrischer Massenpunkt mit *constanter Geschwindigkeit* im Kreise herumläuft, so wird im Innern der Metallkugel allmählig ein stationärer Zustand eintreten. Zur Zeit dieses stationären Zustandes ist die Strömung $u$, $v$, $w$ in solchen Punkten der Kugel, die dicht an der Oberfläche liegen, offenbar *tangential*, also senkrecht zur Normale $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Somit folgt aus der (auf S. 326 angegebenen) Formel [*H.*]:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

d. i.

$e$ unabhängig von der Zeit.

Dies aber ist unmöglich; denn es unterliegt keinem Zweifel, dass die elektrische Dichtigkeit $e$ an einer gegebenen Stelle der Kugelfläche in Folge der Bewegung des elektrischen Massenpunktes fortwährend (und zwar periodisch) variirt.

*Hieraus folgt, dass die Formel* [*H.*] *mit irgend welchem Fehler behaftet ist.* Und dieser Fehler liegt offenbar darin, dass an der Oberfläche des (von einem isolirenden Medium umgebenen) Conductors im Allgemeinen *zwei* Processe stattfinden, nämlich *erstens* eine elektrische Communication zwischen jedem Oberflächenelement und dem angrenzenden Volumelement, und *zweitens* eine elektrische Communication zwischen je zwei aneinander grenzenden Oberflächenelementen; — während doch bei Ableitung jener Formel nur der *erste* Process berücksichtigt ist*).

*) Vergl. meinen Aufsatz (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 135).

Um diesen Fehler zu vermeiden, eröffnen sich, wie es scheint, zwei verschiedene Wege. Der *eine* besteht darin, dass man neben den Strömungen $u$, $v$, $w$ der *innern* Elektricität noch besondere Strömungen der *Oberflächen*-Elektricität in die Rechnung einführt; so dass man alsdann im Ganzen *zweierlei* Strömungen hat, ebenso wie ja schon längst *zweierlei Dichtigkeiten* ($\varepsilon$ und $e$, nach Kirchhoff) im Gebrauch sind.

Ein *zweiter* Weg würde darin bestehen, dass man die Annahme der *unendlich dünnen* elektrischen Oberflächenschichten überhaupt fallen lässt, diese Annahme also für eine mathematische Abstraction erklärt, welche in der Elektro*statik* gute Dienste leiste, in der Elektro*dynamik* aber unbrauchbar sei.

## § 5.

### Der Helmholtz'sche Einwand (*B.*) gegen das Weber'sche Gesetz.

Dieser Einwand (Borchardt's Journal, Bd. 72, S. 63) bestand in seiner ursprünglichen Form darin, dass die Beschleunigungen, welche zwei elektrische Massenpunkte nach dem Weber'schen Gesetz einander zuertheilen, bei einer gewissen sehr kleinen Entfernung *unendlich gross* sein würden. Ein solcher Einwand kann indessen beseitigt werden durch die schon vor fünfzehn Jahren bei meinen Untersuchungen über die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes von mir gemachte Annahme*), dass das Weber'sche Gesetz, ähnliche wie das Newton'sche, für *sehr kleine* Entfernungen einer gewissen Modification bedürfe. Es werden alsdann, falls man das Weber'sche Gesetz durch die Formel ausdrückt:

$$R = e\,\eta\left[\frac{d\varphi}{dr} + \frac{8}{c^2}\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right],$$

unter $\varphi$ und $\psi$ Functionen von $r$ zu verstehen sein, welche nur für *beträchtliche* Entfernungen mit $\frac{1}{r}$ und $\sqrt{r}$ identisch, hingegen für *sehr kleine* Entfernungen von noch unbekannter Beschaffenheit sind.

Um nun diesen Fall *sehr kleiner* Entfernungen zu vermeiden, hat Helmholtz (Borchardt's Journal, Bd. 75, S. 39) zu zeigen versucht, dass der von ihm erhobene Einwand *bestehen bleibe*, wenn man den einen der beiden elektrischen Massenpunkte durch eine elektrische Kugelfläche ersetzt.

Man denke sich einen elektrischen Massenpunkt, welcher im Innern einer gleichmässig mit Elektricität belegten Kugelfläche eine beliebige

---

*) Vergl. meine Habilitationsschrift Halle 1858, namentlich aber meine ausführlichere Schrift über diesen Gegenstand: „*Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes*" Halle 1863. Weitere Bemerkungen hierüber findet man in meinem letzten Aufsatz (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 113).

Lage besitzt, und von dieser Kugelfläche nach dem Weber'schen Gesetz sollicitirt wird. Der Helmholtz'sche Einwand (*B.*) in seiner zweiten Form besteht alsdann darin, dass dieser Punkt in einem gewissen idealen Falle durch die Einwirkung der Kugelfläche eine *unendlich grosse* Beschleunigung erhalten müsste. Ich nenne jenen Fall einen idealen, weil seine Realisirbarkeit vorläufig in Frage steht. In der That scheint ein ungefährer Ueberschlag zu ergeben, dass der Fall nur dann eintreten könnte, wenn der Radius der Kugelfläche über 400 Sonnenweiten beträgt*).

*Nach meinem Dafürhalten sind nun aber als Controle eines noch hypothetischen physikalischen Gesetzes nur solche Fälle anwendbar, deren Wirklichkeit oder Realisirbarkeit ausser Zweifel steht.* Denn wollte man *ideale* Fälle (d. i. solche, deren Realisirbarkeit noch *nicht* dargethan ist) als Controle gelten lassen, so würde man selbst das Newton'sche Gesetz für unzulässig erklären müssen, weil daselbe zu absurden Folgerungen führt, sobald man sich den ganzen Weltraum mit Materie erfüllt denkt, welche mit überall gleicher Dichtigkeit nach allen Seiten ins Unendliche reicht**).

Demgemäss kann nach meiner Ansicht dem in Rede stehenden Helmholtz'schen Einwande eine ernstliche Bedeutung nicht früher beigemessen werden, als bis die Realisirbarkeit des dabei als Prüfstein benutzten Falles wirklich dargethan sein wird.

## § 6.

## Ueber die in neuerer Zeit an Stelle des Weber'schen Gesetzes in Vorschlag gebrachten Theorien.

Es sind hier namentlich diejenigen Theorien zu erwähnen, welche Helmholtz proponirt hat, daneben auch diejenige, welche von mir selber aufgestellt worden ist.

Die ursprünglich (1870) von Helmholtz angegebene Theorie geht bekanntlich aus von der Existenz eines elementaren Potentiales***)

---

*) Ich verstehe hier unter Sonnenweite den Abstand zwischen Sonne und Erde. Uebrigens findet man Näheres über die hier gemachten Angaben in meinem mehrfach erwähnten Aufsatz (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 91—97). Ich benutze diese Gelegenheit, um ein kleines Versehen zu corrigiren. In jenem Aufsatze sind nämlich auf S. 95 die beiden ersten Zeilen des zweiten Absatzes durch folgende zu ersetzen:

*Nach Weber ist* $c > 59000$ *Meilen; ferner ist* $g < 31$ *Fuss, d. i.* $g < \frac{1}{770}$ *Meilen. Somit folgt etc. etc.*

Im Uebrigen bleibt Alles ungeändert, so dass also diese Verbesserung auf die dort erhaltenen Resultate keinerlei Einfluss hat.

**) L. c. S. 97, 98.

***) Ich verstehe hier unter *elementarem Potential* einen von den betrachteten Stromelementen abhängenden Ausdruck, welcher durch seine Differentiation

und leugnet das Ampère'sche Gesetz. Neben dieser Theorie (und ohne dieselbe einstweilen aufzugeben) ist dann später (1874) von Helmholtz eine zweite Theorie angedeutet worden, welche umgekehrt das Ampère'sche Gesetz als Grundlage benutzt, und die Existenz eines elementaren Potentiales aufgiebt.

## I. Die ursprüngliche Helmholtz'sche Theorie, von 1870.

Borchardt's Journal Bd. 72.

Dass diese ursprüngliche Theorie mit den elektrodynamischen Rotationserscheinungen in diametralem Widerspruch stehe*), und unter dem Gewicht dieser experimentellen Thatsachen zusammenbrechen werde, ist von mir bereits mehrfach bemerkt worden. Und dass ich auf die etwas künstlichen und wenig ansprechenden Stützen, welche — diesen Bemerkungen gegenüber — von Herrn Helmholtz zur Rettung seiner Theorie hervorgesucht wurden, mich näher einzulassen, *nicht für nöthig erachtete*, dürfte um so mehr gerechtfertigt sein, als Herr Helmholtz schliesslich seine ganze Theorie *zurückgezogen* hat. Denn dass die Worte, mit denen Herr Helmholtz in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 17. Juli 1875 (S. 412) über diesen Gegenstand sich explicirt, eine *vollständige Zurücknahme* seiner Theorie involviren, — darüber dürfte wohl Niemand in Zweifel sein.

## II. Die spätere Helmholtz'sche Theorie, von 1874.

Borchardt's Journal Bd. 78.

Diese spätere Theorie ist nahe verwandt mit derjenigen, welche schon einige Jahre früher von mir selber entwickelt wurde, in meinem Werk: „*Die elektrischen Kräfte*“. Um näher hierauf eingehen zu

---

nach der räumlichen Lage die zwischen den beiden Elementen stattfindenden ponderomotorischen Wirkungen ergiebt.

*) Etwas *später* wurde Aehnliches auch von Riecke bemerkt, nur in weniger bestimmten Umrissen. Denn während mein Einwand gegen die Helmholtz'sche Theorie auf *bereits bekannten Thatsachen* (den elektrodynamischen Rotationserscheinungen) basirte, machte Riecke seine Entscheidung zu Gunsten oder Ungunsten jener Theorie abhängig vom Ausfall eines gewissen *erst noch anzustellenden* Experimentes, dessen Einrichtung er näher beschrieb. Wenn man daher *meinen* Einwand nur beiläufig zu erwähnen, und hauptsächlich vom Riecke'schen Einwande zu sprechen pflegt, so dürfte diese Ausdrucksweise als eine (absichtliche oder unabsichtliche) *Entstellung der Thatsachen* zu bezeichnen sein. — Man findet meine betreffenden Aeusserungen in den Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 3. Aug. 1872, S. 149 und 157 (S. 8 und 16 der Separatabzüge), ferner in den Mathem. Annalen Bd. V, S. 607 und 614, endlich in meinem Werke „*Die elektrischen Kräfte*“, S. X der Einleitung und S. 78, 79. Andererseits findet man die Aeusserungen von Riecke in den Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, vom 14. August 1872.

können, sei zunächst erinnert an die von mir bei früherer Gelegenheit mit *Delta* und *Epsilon* bezeichneten Voraussetzungen. Dieselben lauten:

*Voraussetzung Delta. — Bezeichnet Dv ein Volumelement eines körperlichen Inducenten, und denkt man sich die in Dv vorhandene (der Richtung und Stärke nach variable) Strömung i in Componenten u, v, w zerlegt nach drei aufeinander senkrechten mit der ponderablen Masse des Inducenten starr verbundenen Axen, so kann die von i auf irgend ein äusseres Object ausgeübte elektromotorische Kraft ersetzt werden durch die von u, v, w auf jenes Object ausgeübten Kräfte.*

*Voraussetzung Epsilon. — Ein Stromelement Dv, welches in Bezug auf Ort, Stromrichtung und Stromintensität constant bleibt, kann in einem ruhenden Leiterelement Ds keine elektromotorische Kraft hervorbringen.*

Wenn Herr Helmholtz diese beiden Voraussetzungen als richtig anerkennen wollte, so würde er gezwungen sein, die in seinen Formeln enthaltene Constante $k$ gleich $-1$ zu setzen; wodurch seine Theorie vollkommen identisch werden würde mit der von mir in den *„Elektrischen Kräften"* entwickelten. Auch unterliegt es keinem Zweifel, dass Herr Helmholtz der Voraussetzung *Delta* wircklich beipflichtet.

*Der einzige Unterschied zwischen beiden Theorien besteht also in der Hypothese Epsilon.* Nun kann man allerdings über diese Hypothese *Epsilon* verschiedener Ansicht sein. Eine absolute Nöthigung zu ihrer Annahme liegt nicht vor. Wenigstens sind solche Theorien, welche, wie z. B. die Weber'sche, die elektrodynamischen Kräfte nicht von den *localen Geschwindigkeitszuwüchsen* des elektrischen Fluidums, sondern von den *Beschleunigungen* der elektrischen Theilchen abhängig machen, dieser Hypothese von selber überhoben. Wie aber gerade Herr Helmholtz, ohne seiner Theorie eine *neue unerwartete Wendung* zu geben, die Annahme dieser Hypothese wird vermeiden können, — ist vorläufig schwer zu begreifen. Entschliesst sich aber Herr Helmholtz zu diesem Schritt, so wird seine Theorie mit der meinigen identisch.

Um die Hauptsache zusammenzufassen: Durch Verbesserung gewisser Uebereilungen (nämlich durch Berücksichtigung gewisser zu Anfang übersehener experimenteller Thatsachen) ist Herr Helmholtz von seiner *ursprünglichen* Theorie (1870) zu seiner *spätern* Thorie (1874) hingedrängt worden; wodurch bereits eine *bedeutende Annährerung* an die von mir entwickelte Theorie stattgefunden hat. Und aller Wahrscheinlichkeit nach wird Herr Helmholtz *allmählig* durch weitere Berichtigungen schliesslich zu einer Theorie gedrängt werden, welche mit der meinigen *völlig identisch* ist.

Diese letztere*) giebt für das ponderomotorische und elektromotorische Elementargesetz *einfachere* Ausdrücke**), als die Weber'sche Theorie, steht aber der Weber'schen insofern nach, als es mir bisher nicht gelungen ist, jene einfacheren Elementargesetze auf eine gemeinschaftliche Quelle zurückzuführen.

*Will man also für die elektrostatischen und elektrodynamischen Erscheinungen eine Theorie haben, welche in all' ihren Betrachtungen von einer gemeinschaftlichen Quelle ausgeht, und welche gleichzeitig in den experimentellen Thatsachen kein handgreifliches Veto findet, so scheint bis zum heutigen Tage die Weber'sche die einzige zu sein, welche diesen Anforderungen entspricht.*

## § 7.

## Ueber die Anzahl der elektrischen Materien.

Thomson und Tait bemerken in dem oben (S. 318) mitgetheilten Citat, dass man die Hypothese, es existirten zwei elektrische Fluida, unmöglich als richtig ansehen könne. Obwohl nun eine weitere Discussion dieser Frage, in Ermangelung fester Anhaltpunkte, sehr unfruchtbar ausfallen würde, so möchte ich doch die Gelegenheit benutzen zu Erörterung einer *verwandten* Frage, indem ich dabei ausgehe von den bekannten Thatsachen der sogenannten *unipolaren Induction.*

Wollen wir die elektromotorische Einwirkung eines um seine Axe drehbaren cylindrischen Magneten auf ein *fest aufgestelltes* lineares Leiterelement $Ds$ näher angeben, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

*Erster Fall. Der Magnet steht still. — Alsdann ist die von ihm in Ds inducirte elektromotorische Kraft stets gleich Null.*

*Zweiter Fall. Der Magnet rotirt. — Alsdann wird die von ihm in Ds inducirte elektromotorische Kraft einen Werth besitzen, der* (bei geeigneter Aufstellung des Elementes $Ds$) *von Null verschieden ist.*

Man wird schwerlich bezweifeln, dass diese Sätze auch dann noch gültig bleiben, wenn man den Magneten durch ein *Solenoid* (von end-

*) Man findet diese von mir entwickelte Theorie *in ihren Hauptumrissen kurz angedeutet* in den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. August 1872, S. 157—164 (S. 16—23 der Separatabdrücke), ferner in den Mathem. Annalen Bd. VI, S. 614—624; sodann aber *ausführlicher entwickelt* theils in meinem Werke: „*Die elektrischen Kräfte*" (Leipzig, 1873), theils in den Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. 1873, S. 419—503. — Ausserdem habe ich die Beziehung dieser Theorien zu der in Rede stehenden Helmholtz'schen Theorie (von 1874) näher dargelegt in den Ber. d. Kgl. Sächs. Ges., August 1874, S. 145, 146.

**) Genauer gesprochen, wird nur der Ausdruck des *elektromotorischen* Elementargesetzes ein einfacherer, während der des *ponderomotorischen* für beide Theorien derselbe ist, nämlich der von Ampère gegebene.

lichem Durchmesser), resp. durch einen *einzelnen Stromring* ersetzt. Denken wir uns also einen kreisförmigen Metallring, welcher drehbar ist um seine geometrische Axe (d. i. um die in seinem Mittelpunkt auf seiner Ebene errichtete Normale), und denken wir uns diesen Metallring von einem constanten elektrischen Strom durchflossen, so werden hinsichtlich der elektromotorischen Wirkung dieses Ringes auf ein *fest aufgestelltes* Leiterelement $Ds$ wiederum zwei Fälle zu unterscheiden sein:

($\alpha$) .... *Erster Fall. Der Ring steht still. — Alsdann ist die von ihm in Ds inducirte elektromotorische Kraft gleich Null.*

($\beta$) .... *Zweiter Fall. Der Ring rotirt. — Alsdann wird die von ihm in Ds inducirte elektromotorische Kraft einen Werth besitzen, der* (bei geeigneter Aufstellung des Elementes $Ds$) *von Null verschieden ist.*

Wollte man nun annehmen, dass die Wirkungen des elektrischen Stromes von *einer einzigen* Materie herrühren, die mit einer gewissen Geschwindigkeit in der Strombahn dahinfliesst, so würde aus dem *ersten* Falle folgen, dass diese Materie bei einer constanten kreisförmigen Bewegung in dem linearen Leiter keine elektromotorische Kraft erzeugt, und sie dass also auch im *zweiten* Falle, wo sie offenbar wiederum eine constante kreisförmige Bewegung, nur von etwas anderer Winkelgeschwindigkeit, besitzt*), eine elektromotorische Kraft zu induciren unfähig sei, — was dem Satze ($\beta$) widerspricht. Somit folgt, dass jene Annahme, die Wirkung eines elektrischen Stromes rühre nur von *einer einzigen* Materie her, unzulässig ist; und wir gelangen daher zu folgendem Resultat:

> *Ist überhaupt die Vorstellung richtig, dass die Wirkungen des elektrischen Stromes irgend welchen Materien zuzuschreiben sind, die mit gewissen Geschwindigkeiten in der Strombahn dahinfliessen, so sind, falls man einen offenbaren Conflict mit den Sätzen* ($\alpha$), ($\beta$) *vermeiden will, mindestens zwei solche Materien anzunehmen.*

In der That überzeugt man sich leicht davon, dass jener Conflict vermieden wird, wenn man (im Einklange mit der gewöhnlichen *dualistischen* Anschauungsweise) zwei Materien sich vorstellt, welche in der Strombahn mit gleichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen dahinfliessen, und dass derselbe andererseits auch dann vermieden wird, wenn man (der von mir proponirten *unitarischen* Anschauungs-

---

*) Die Winkelgeschwindigkeit dieser kreisförmigen Bewegung würde nämlich im *ersten* Fall $= \frac{v}{r}$, im *zweiten* $= \frac{v}{r} + \Omega$ sein, falls $v$ die Strömungsgeschwindigkeit der Materie, $r$ den Radius der kreisförmigen Strombahn, und $\Omega$ die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, mit welcher diese Bahn rotirt.

weise Folge leistend) zwei Materien annimmt, von welchen nur die eine in Strömung begriffen, die andere aber mit der Strombahn unbeweglich verbunden ist.

## § 8.

## Ueber einige Bemerkungen des Herrn Helmholtz.

### I. Ueber einen dem Verfasser zur Last gelegten Rechnungsfehler.

Ich habe überall, wo ich mit Herrn Helmholtz verschiedener Ansicht war, die bei einer wissenschaftlichen Discussion gebotenen Grenzen mit grosser Sorgfalt einzuhalten mich bemüht; kann aber nicht behaupten, dass Herr Helmholtz seinerseits dasselbe Bestreben an den Tag gelegt hätte. Denn wenn Herr Helmholtz z. B. in Borchardt's Journal (Bd. 75, S. 55, Anmerkung) in Betreff eines von mir aufgestellten Satzes sagt:

> Ich *erstaunte* nicht wenig, als ich diesen Satz las, denn in den Hypothesen, von denen Herr C. Neumann ausging, und auf welche seine „Deduction" gegründet ist, war über die mechanischen Beziehungen zwischen der sich bewegenden — — Elektricität und der Materie des Leiters nichts weiter angenommen, als dass die Elektricität der Reibung des Leitungswiderstandes — — — unterworfen sei. Dass nun durch blosse Rechnung eine neue mechanische Beziehung zwischen beiden, zu welcher in den Prämissen kein Grund gelegt war, erzeugt werden sollte, machte mich *neugierig*, das Verfahren kennen zu lernen, welches so etwas leisten konnte. *Der Fehler ist einfach folgender:* Die Gleichung — — —

## II. Ueber das Energie- und Potentialgesetz.

Im Verlaufe meiner elektrodynamischen Untersuchungen habe ich gelegentlich (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. October 1871) die Consequenzen des Weber'schen Gesetzes unter Zugrundelegung einer gewissen unitarischen Anschauungsweise zu entwickeln gesucht. Dabei gelangte ich zu dem Resultat, dass das Princip der lebendigen Kraft im Gebiet der elektrischen Kräfte nicht durch *einen*, sondern durch *zwei* Sätze dargestellt sei, welche ich zur bequemern Unterscheidung als *Energie* und *Potentialgesetz* bezeichnete. Zugleich bemerkte ich (l. c. p. 472), dass diese beiden Gesetze genau in derselben Form auch aus der Helmholtz'schen Theorie (von 1870) sich ableiten liessen, nur mit dem Unterschiede, dass das Potentialgesetz aus der Helmholtz'schen Theorie sich als *allgemein gültig* ergebe, während seine Ableitung aus *meiner* Theorie bis zu jener Zeit nur für gewisse specielle Fälle gelungen wäre. Mit Bezug hierauf hat nun Herr Helmholtz (Borchardt's Journal, Bd. 75, p. 39) folgende Bemerkung gemacht:

> Gegen meinen Einwand (*A.*) hat Herr C. Neumann nur im Allgemeinen geltend gemacht, die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen seien noch auf andere, nicht genau präcisirte Hypothesen gegründet, ohne aber die ihm hypothetisch erscheinenden Punkte näher zu bezeichnen. Was ich aus diesen gefolgert hätte, gelte nicht gegen das Weber'sche Gesetz. Uebrigens hat er selbst aus seiner eignen neuen Annahme keine Differentialgleichungen der elektrischen Bewegung hergeleitet, sondern erklärt nur auf S. 472 seines Aufsatzes, dass das zur Aufstellung dieser Gleichungen nöthige „Potentialgesetz" bisher für andere als geschlossene lineare Strömungen noch nicht eruirt worden sei. Demgemäss ist denn Herr C. Neumann auch den Beweis schuldig geblieben, dass seine neue Modification des Weber'schen Gesetzes zu stabilem Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in Leitern führe.

Dass die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen ausser auf das Weber'sche Gesetz noch auf andere bisher nicht genau präcisirte Hypothesen gegründet sind, ist durch die Expositionen des gegenwärtigen Aufsatzes (vgl. S. 325 ff.) hinreichend constatirt, zugleich also auch constatirt, dass ein Einwand gegen jene Differentialgleichungen noch nicht als ein Einwand gegen das Weber'sche Gesetz anzusehen ist.

Andererseits ist es wohl möglich, dass die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen ein labiles Gleichgewicht der Elektricität in leitenden Körpern ergeben, mithin unhaltbar seien*). Auch will ich gern ein-

*) Eine *bestimmte* Aeusserung hierüber möchte ich vorläufig vermeiden, aus Gründen, die ich an einer andern Stelle näher entwickelt habe (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., August 1874, S. 147—150).

räumen, dass Herr Helmholtz sich mit Scharfsinn und Erfolg bemüht habe, andere Differentialgleichungen aufzufinden, die von diesem Uebelstande frei sind. Desgleichen will ich anerkennen, dass ich selber mit der Aufstellung solcher Differentialgleichungen bisher mich *nicht* beschäftigt habe. — Nur bitte ich, aus diesem letztern Umstande, der eine nothwendige Consequenz des von mir verfolgten wissenschaftlichen Planes ist, mir keinen Vorwurf zu machen.

Wir haben nämlich im Gebiet der elektrischen Erscheinungen zu unterscheiden zwischen solchen Wirkungen, die in *beträchtlichen* Entfernungen stattfinden, und zwischen solchen, bei denen die Entfernungen *äusserst klein* sind; wobei zu bemerken, dass zur Aufstellung der Differentialgleichungen für die Bewegung der Elektricität in einem gegebenen Leiter sowohl die Kenntniss der Wirkungen *erster* Art, als auch diejenige der Wirkungen *zweiter* Art erfordert wird.

Je schwieriger nun aber die Erforschung eines wissenschaftlichen Gebietes ist, desto nothwendiger erscheint es, *planmässig* vorzugehen, mit dem Leichteren zu beginnen, und erst, wenn man hier festen Fuss gefasst hat, zum Schwierigeren überzugehen. Da nun im gegenwärtigen Fall der leichtere Theil des zu erforschenden Gebietes durch die Wirkungen *erster* Art, der schwierigere durch die Wirkungen *zweiter* Art repräsentirt ist, so wird es gut sein — und dies ist der von mir verfolgte Plan — mit den Wirkungen *erster* Art zu beginnen, und zu den Wirkungen *zweiter* Art, mithin auch zur Aufstellung der in Rede stehenden Differentialgleichungen, falls irgend möglich, nicht früher überzugehen, als bis die Theorie jener Wirkungen *erster* Art zu *einiger Festigkeit* gediehen ist, — was bis jetzt offenbar noch nicht der Fall.

Dass ich übrigens, wie Herr Helmholtz in seiner obigen Bemerkung ausspricht, erklärt haben solle, zur Aufstellung jener Differentialgleichungen *bedürfe es des Potentialgesetzes*, beruht auf *Irrthum*. Denn man wird eine derartige Aeusserung in meinem Aufsatz vergeblich suchen.

Ein zweiter *Irrthum* des Herrn Helmholtz besteht darin, dass er von einer *neuen* Modification des Weber'schen Gesetzes spricht, welche nach seiner Ansicht (Borchardt's Journal, Bd. 75. S. 39) von mir nur eingeführt sei, um seine gegen das Weber'sche Gesetz erhobenen Einwände zu beseitigen. Denn jene angeblich *neue* Modification (welche sich auf die Form des Weber'schen Gesetzes für *sehr kleine* Entfernungen bezieht) ist bereits im Jahre 1858 von mir eingeführt worden, in meiner Habilitationsschrift: *Explicare tentatur, quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur. Halis Saxonum* 1858.

## III. Ueber die Beziehung des Energiegesetzes zum Inductionsgesetz.

Wollte man in der Hydrodynamik bei Einführung der bekannten Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

die gleichzeitige Einführung der entsprechenden Kräfte

$$\frac{\partial p}{\partial x},\quad \frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{\partial p}{\partial z}$$

unterlassen, so würde man zu Formeln gelangen, die mit sich selber in Widerspruch sind. Hieraus resultirt (wie bereits auf S. 327 bemerkt wurde) der allgemeine Satz:

> *Soll die Bewegung gegebener Massen einer bestimmten Bedingungsgleichung unterworfen gedacht werden, so ist (zur Vermeidung innerer Widersprüche) die Einführung von Kräften erforderlich, welche für die Aufrechterhaltung jener Bedingungsgleichung Sorge tragen.*

Hieraus folgt, dass die Annahme *constanter* Magnete oder *constanter* Molecularströme theorisch unzulässig ist, falls man nicht gleichzeitig Kräfte einführt, die für jene Constanz Sorge tragen; und hierin liegt (wie ich in diesen Annalen Bd. VI, S. 330—340 weiter ausgeführt habe) der Grund derjenigen innern Widersprüche, welche die Theorie der Elektrodynamik bei ihrer Anwendung auf sogenannte *constante* Magnete in der That darbietet.

So z. B. ist es bei Annahme *constanter* Magnete unmöglich, das Energiesetz und die übrigen Gesetze der Elektrodynamik mit einander in Einklang zu bringen. Ein derartiger Einklang aber ist von Helmholtz bis in die neueste Zeit behauptet worden. Denn nach seiner Ansicht soll gerade für den Fall *constanter* Magnete das Inductionsgesetz aus dem Energiegesetz *ableitbar* oder wenigstens mit demselben *in Einklang* sein. So äussert sich z. B. Helmholtz in Borchardt's Journal, Bd. 75. S. 62 folgendermassen:

> Der Streit darüber, ob die Existenz der elektrodynamischen Induction aus dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft „deducirt" werden könne, hat für mich nur den Werth eines *Wortstreites*. Meine Aufgabe in der „Erhaltung der Kraft" war, die sämmtlichen damals bekannten Thatsachen durchzugehen, und zu prüfen, ob sie mit dem betreffenden allgemeinen Gesetze in Uebereinstimmung wären, oder ob sich vielleicht im Gegentheil irgendwo Lücken oder Widersprüche zeigten. Als *Form der Darstellung* ist es bei solcher Aufgabe oft anschaulicher, die Richtigkeit des allgemeinen Gesetzes vorauszusetzen, die Folgen zu deduciren, nicht aber um sie durch eine solche Deduction

als bewiesen zu betrachten, sondern um sie mit den Thatsachen zu vergleichen, und dadurch die Zulässigkeit des allgemeinen Gesetzes zu prüfen, was den Ausgangspunkt bildete. Will man alle bei der elektrodynamischen Induction in Betracht kommenden Thatsachen bis auf eine als bekannt voraussetzen, so wird man diese eine immer noch aus dem Gesetz von der Constanz der Energie „deduciren" können, so z. B. den Werth der Inductionsconstante. Aber als Beweismittel von thatsächlichen Wahrheiten kenne ich nur den Weg der *Induction*.

Die Ansicht, welche Herr Helmholtz theils in seiner Schrift über die Erhaltung der Kraft (Berlin 1847), theils in den eben wiederholten Worten, theils auch an einer anderen Stelle (Borchardt's Journal Bd. 72, S. 69) vertritt, geht offenbar dahin, *dass das Gesetz der Energie und die Annahme constanter Magnete mit den gewöhnlichen und für richtig geltenden Gesetzen der Elektrodynamik in Einklang gebracht werden können*. Dies aber gerade ist es, was von mir bestritten wird. Mag man nämlich den von der Induction *constanter* Magnete handelnden Abschnitt jener Helmholtz'schen Schrift (von 1847) corrigiren wie man will, immer werden daselbst noch Widersprüche zurückbleiben, — es sei denn, dass man sich entschlösse, die Vorstellung *constanter* Magnete aufzugeben; womit dann aber selbstverständlich ein Aufgeben jenes ganzen Abschnittes verbunden sein würde.

Leipzig, September 1876.

---

## Inhaltsverzeichniss.


| | | Seite |
|---|---|---|
| § 1. | Der Tait-Thomson'sche Einwand gegen das Weber'sche Gesetz | 318 |
| § 2. | Die betreffenden Aeusserungen von Helmholtz | 321 |
| § 3. | Der Helmholtz'sche Einwand (*A.*) gegen das Weber'sche Gesetz | 324 |
| § 4. | Einige Bemerkungen hierüber | 327 |
| § 5. | Der Helmholtz'sche Einwand (*B.*) gegen das Weber'sche Gesetz | 330 |
| § 6. | Ueber einige in neuerer Zeit an Stelle des Weber'schen Gesetzes in Vorschlag gebrachte Theorien. (Wenn der Verfasser die neuerdings von Clausius aufgestellte Theorie in diesem § unerwähnt lässt, so hat das einfach darin seinen Grund, dass derselbe diese Theorie bis jetzt noch nicht mit der erforderlichen Sorgfalt studirt hat.) | 331 |
| § 7. | Ueber die Anzahl der elektrischen Materien | 334 |
| § 8. | Ueber einige Bemerkungen des Herrn Helmholtz | 336 |


---

# Ein paar allgemeine metrische Sätze für algebraische Curven*).

Von Elling Holst in Christiania.

Bekanntlich hat die sogenannte *Hesse'sche Normalform* der Gleichung einer geraden Linie

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

die Eigenschaft, dass die linke Seite, durch Einsetzen der Coordinaten eines willkürlichen Punktes, unmittelbar die senkrechte Entfernung dieses Punktes von der Geraden darstellt.

Eine analoge Normalform kann ganz allgemein für jede algebraische ebene Curve aufgestellt werden, wie ich zeigen werde**).

Sei

(1) $$F(x,y)=0$$

die Gleichung einer algebraischen Curve $n^{ter}$ Ordnung und

$$A_1x^n+A_2x^{n-1}y+\cdots+A_nxy^{n-1}+A_{n+1}y^n$$
$$=A_1(x+\alpha_1y)(x+\alpha_2y)\cdots(x+\alpha_ny)=\mathfrak{A}(x,y)$$

der Inbegriff der in ihr enthaltenen Terme der $n^{ten}$ Dimension. So soll als *Normalform der Gleichung* (1) die folgende bezeichnet werden:

(2) $$F_N(x,y)=\frac{F(x,y)}{A_1\sqrt{(1+\alpha_1^2)(1+\alpha_2^2)\cdots(1+\alpha_n^2)}}=\frac{F(x,y)}{\sqrt{\mathfrak{A}(1,i)\cdot\mathfrak{A}(1,-i)}}$$
$$=\frac{F(x,y)}{\sqrt{(A_1-A_3+A_5+\cdots)^2+(A_2-A_4+A_6-\cdots)^2}}=0.$$

Die Glieder höchster Dimension können bei ihr in folgende Form gesetzt werden:

$$(\sin u_1\cdot x+\cos u_1\cdot y)(\sin u_2\cdot x+\cos u_2\cdot y)\cdots(\sin u_n\cdot x+\cos u_n\cdot y);$$

*) Eine vollständigere Entwickelung wird im norwegischen „Archiv for Mathematik og Naturvidenskaber" erscheinen.

**) Ich habe verschiedene Punkte mit meinem hochgeehrten Freunde Herrn L. Sylow besprochen.

umgekehrt, wenn bei einer Gleichung die Glieder höchster Dimension in dieser Gestalt erscheinen, so hat die Gleichung die Normalform. Von dieser normirten Gleichung werde ich nun beweisen:

*Wenn man in die linke Seite der Normalform die Coordinaten eines willkürlichen Punktes der Ebene einsetzt, so ist der entstehende Ausdruck gleich dem Producte der Längen derjenigen Normalen, die von dem Punkte auf die Curve gefällt werden können, dividirt durch das Product der Entfernungen, welche die reellen Brennpunkte der Curve von dem angenommenen Punkte besitzen.*

Ist die Classe der Curve $m$, so ist die Anzahl der von einem beliebigen Punkte ausgehenden Normalen bekanntlich $n+m$. Es mögen $\alpha$, $\beta$ die Coordinaten des willkürlichen Punktes, $x_i$, $y_i$ die Coordinaten der Fusspunkte der von ihm fällbaren Normalen bedeuten. Dann ist das Product der Normalen — unter Normale die Entfernung des Punktes $(\alpha, \beta)$ vom Normalenfusspunkte verstanden —:

$$P_N = \sqrt{[(\alpha-x_1)^2+(\beta-y_1)^2]\cdot[(\alpha-x_2)^2+(\beta-y_2)^2]\cdots[(\alpha-x_{n+m})^2+(\beta-y_{n+m})^2]}.$$

Dieses Product verzchwindet nur, wenn einer seiner Factoren verschwindet:

$$(\alpha-x_i)^2+(\beta-y_i)^2=0;$$

das aber geschieht auf zwei wesentlich verschiedene Weisen; nämlich

1) wenn

$$\alpha=x_i,\quad \beta=y_i,$$

d. h. wenn

$$F(\alpha,\beta)=0$$

2) wenn

$$(\alpha-x_i)\pm i(\beta-y_i)=0,$$

also, wenn $(\alpha, \beta)$ so gegeben ist, dass eine der Normalen durch einen der zwei unendlich fernen Kreispunkte geht, in welchem Falle diese Normale auch beliebig als Tangente angesehen werden kann und durch einen der *reellen Brennpunkte* hindurchgeht. Wenn die letzteren mit $\xi_i$, $\eta_i$ bezeichnet werden $(i=1, 2, \cdots m)$, erhält man somit, weil $P_N$ *nur* für

$$F(\alpha,\beta)=0$$

und für

$$(\alpha-\xi_i)\pm i(\beta-\eta_i)=0$$

verschwindet und im Allgemeinen *nur* für unendliche Werthe von $\alpha$ und $\beta$ unendlich wird:

$$P_N = k[F(\alpha,\beta)]^p \cdot\left\{[(\alpha-\xi_1)^2+(\beta-\eta_1)^2]\cdot[(\alpha-\xi_2)^2+(\beta-\eta_2)^2]\cdots[(\alpha-\xi_m)^2+(\beta-\eta_m)^2]\right\}^q,$$

wo $k$ eine von $\alpha$, $\beta$ unabhängige Constante, $p$ und $q$ näher zu bestimmende Exponenten sind, die der Gleichung genügen:

$$m+n=pn+2qm.$$

Man findet leicht, z. B. durch eine Reihenentwicklung, $p = 1$, woraus $q = \frac{1}{2}$, und die Formel wird:

$$P_N = k \cdot F(\alpha, \beta) \cdot P_B,$$

wenn man das Product aller Entfernungen des Punktes $(\alpha, \beta)$ von den reellen Brennpunkten $P_B$ nennt.

Um $k$ zu bestimmen lasse man $(\alpha, \beta)$ in einer willkürlichen Richtung, die nur nicht mit der Richtung einer Asymptote zusammenfällt, unendlich weit rücken. Von den Normalen nähern sich jetzt $n$ den $n$ Perpendikeln, welche von $(\alpha, \beta)$ auf die Asymptoten gefällt werden können; das Product der $m$ übrigen Normalen nähert sich dem Producte $P_B$, in $F(\alpha, \beta)$ endlich kommen (immer mehr) nur die Glieder höchster Dimension in Betracht. So findet man

$$k = \frac{1}{\sqrt{(A_1 - A_3 + A_5 - \cdots)^2 + (A_2 - A_4 + A_6 - \cdots)^2}} \tag{3}$$

und somit die zu beweisende Formel:

$$F_N(\alpha, \beta) = \frac{P_N}{P_B}. \tag{4}$$

Das doppelte Vorzeichen, welches $k$ nach (3) haben kann, findet seine Erklärung darin, dass $P_N$ allemal sein Vorzeichnen ändert, wenn $F(\alpha, \beta)$ den Werth Null überschreitet; das Zeichen hat also die Bedeutung, dass es die Punkte $(\alpha, \beta)$ unterscheidet, welche auf der einen oder anderen Seite der Curve liegt. Die imaginären Factoren in $P_N$ kommen paarweise conjugirt vor und haben also keinen Einfluss auf das Zeichen, in Bezug auf welches auch $P_B$ ganz indifferent ist.

*Die Formel* (4), die ich jetzt so schreiben will

$$P_N = F_N(\alpha, \beta) \cdot P_B, \tag{5}$$

*kann nun noch folgendermassen verallgemeinert werden.*

Man kann, in bekannter Weise, auf der Curve $F$, resp. auf allen Zügen derselben eine Bewegungsrichtung als positiv festsetzen. Zieht man nun durch $(\alpha, \beta)$ alle diejenigen Geraden, welche die Curve unter demselben Winkel $\Theta$ schneiden, dieses $\Theta$ von der positiven Bewegungsrichtung aus in positivem Sinne herumgerechnet, so ist die Anzahl solcher Geraden, für jedes $\Theta$, $n+m$. Das Product der Strecken ($\Theta$-Strecken), welche auf diesen Geraden von $(\alpha, \beta)$ und bez. dem ausgezeichneten Schnittpunkte*) mit $F$ begrenzt werden, jede Strecke mit ihrem Vorzeichen genommen**), sei $P_\Theta$. *Man findet dann:*

$$P_\Theta = \frac{F_N(\alpha, \beta) \cdot P_B}{\sin^n \Theta} = P_{\pi - \Theta}. \tag{6}$$

*) Ein solcher Punkt soll ein $\Theta$-Punkt genannt werden.

**) Dasselbe ist nach der nämlichen Regel zu bestimmen, wie das Vorzeichen der Normale.

Für $\Theta = \frac{\pi}{2}$ geht diese Formel in Formel (5) über. Für $\Theta = 0$ erhält man auf der rechten Seite $\infty^n$. In der That werden auf der linken Seite $n$ der $\Theta$-Strecken unendlich gross, diejenigen nämlich, die sich von $(\alpha, \beta)$ bis zu den unendlich fernen Punkten der Curve $F$ erstrecken. Um die Formel in diesem Falle in bestimmter Weise umzuändern, ist nur nöthig, in (6) mit $\sin^n\Theta$ hinüberzumultipliciren. Dann kann man $P_\Theta \sin^n\Theta$ betrachten als ein Product, gebildet aus $m$ beliebigen $\Theta$-Strecken und den $n$ Entfernungen des Punktes $(\alpha, \beta)$ von den $n$ Tangenten in den $n$ übrigen $\Theta$-Punkten. Wenn sich jetzt $\Theta$ der Null nähert und man lässt diese $n$ $\Theta$-Punkte eben diejenigen sein, welche auf den Asymptotenzweigen der Curve ins Unendliche rücken, so kommt:

$$P_T \cdot P_A = F_N(\alpha, \beta) \cdot P_B.$$

wo $P_T$ das Product der Längen der *Tangenten* ist, die vom Punkte $(\alpha, \beta)$ an die Curve gehen, $P_A$ das Product der Entfernungen des Punktes $(\alpha, \beta)$ von den Asymptoten. *Man hat also für das Product der Tangenten:*

$$P_T = \frac{F_N(\alpha, \beta) \cdot P_B}{P_A}. \tag{7}$$

Man bemerkt, dass $F_N$ und $P_A$ durch denselben Factor $k$ in die Normalform gebracht sind, insofern in $F_N$ und $P_A$ die Glieder höchster Dimension übereinstimmen. Hält man nur an dieser Uebereinstimmung fest, so kann man in (7) von der strengen Normalform absehen. Weiter sieht man, dass $P_T$ sein Zeichen ändert, sowohl wenn $(\alpha, \beta)$ die Curve als wenn es eine der Asymptoten überschreitet (jede Tangentenrichtung ist dabei entweder im Sinne der auf der Curve angenommenen Bewegungsrichtung oder im entgegengesetzten zu nehmen). Man hat also hier ein neues Mittel, um das betr. auf alle Züge ausgedehnte Richtungsgesetz zu untersuchen und zu controliren.

*Aus* (5), (6), (7) *zieht man noch folgende Formel, die allgemein für algebraische Curven gilt:*

$$P_N = P_\Theta \cdot \sin^n\Theta = P_T \cdot P_A. \tag{8}$$

— Die hier entwickelten Sätze, die zu mehreren ähnlichen Anlass geben und ein gewisses Licht verbreiten über die Bedeutung der Anzahl $n + m$ der $\Theta$-Strecken, werden für besondere Curven unbestimmt, nämlich für diejenigen, welche die unendlich ferne Gerade berühren oder dieselbe in den Kreispunkten schneiden, resp. berühren. Für solche Curven geben die meisten unserer Formeln $\infty = \infty$.

Was die ersteren betrifft, so wird eine Parabel, als ein Typus derselben, sowohl die Frage als die Lösung illustriren. Es wird bei ihr $P_\Theta$ (resp. $P_N$) unendlich ($\infty^1$), indem der Berührungspunkt mit den unendlich fernen Geraden ein $\Theta$-Fusspunkt ist; gleichzeitig wird aber

$P_B$ unendlich ($\infty^1$), indem derselbe Punkt auch als ein Brennpunkt auftritt. Die Formeln (5) und (6) behalten also im Wesentlichen ihre Bedeutung; man hat die $P$ auf die *im Endlichen gelegenen* $\Theta$-Fusspunkte und Brennpunkte zu beschränken. Für die Formel (7) gilt es dagegen, das Verhältniss zwischen dem einen unendlich grossen Factor in $P_B$ und dem unendlich grossen Nenner $P_A$ zu suchen. Wenn man die Parabel ($y^2 - 2px = 0$) als Grenzübergang zwischen Hyperbel und Ellipse betrachtet, findet man das betr. Verhältniss $= -\frac{2}{p}$ und desshalb:

$$P_T = -\frac{2F_N(\alpha, \beta) \cdot B}{p},$$

wo $B$ die Entfernung des Punktes $(\alpha, \beta)$ von dem im Endlichen befindlichen Brennpunkte ist — eine Formel, die man leicht controlirt.

Hat nun eine Curve $n^{ter}$ Ordnung $r$ einfache (gewöhnliche) Asymptoten und $s$ parabolische Bögen, wo $r + 2s = n$, so ist ihre Gleichung von der Form:

$$F_N(x, y) = A_1 A_2 \cdots A_r (B_1^2 - 2p_1 C_1)(B_2^2 - 2p_2 C_2) \cdots (B_s^2 - 2p_s C_s) + f_{n-2}(x, y) = 0,$$

wo $A_i = 0$, $B_i = 0$, $C_i = 0$ Gerade vorstellen, die in der Normalform gegeben sind. Dann wird:

$$P_T = (-2)^s \cdot \frac{F_N(\alpha, \beta) \cdot P_{B(m-s)}}{A_1 A_2 \cdots A_r \cdot p_1 p_2 \cdots p_s},$$

einfach analog mit der Parabel.

Ist die unendlich ferne Gerade *Inflexionstangente* (ein- oder mehrmal), so treten auf ähnliche Weise Formeln auf, die zuerst bei den Curven dritter Ordnung, die diese Singularitäten besitzen, zum Vorschein kommen etc.

Als Typus für Curven, die durch die Kreispunkte gehen, mag der Kreis selbst gewählt werden. Bekanntlich hat der Kreis eine Art Normalform unmittelbar, wenn die Coefficienten von $x^2$ und $y^2$ gleich 1 sind. Unsere Formel (3) giebt dagegen $k = \frac{1}{1-1} = \infty$. Formel (6) nimmt (den Mittelpunkt des Kreises als Anfangspunkt genommen) die Gestalt an:

$$P_\Theta = \frac{F(\alpha, \beta)}{1-1} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sin^2 \Theta}.$$

Wenn man nun überlegt, dass die Strecken, die von $(\alpha, \beta)$ nach den Kreispunkten laufen, als zwei von den vier $\Theta$-Strecken anzusehen sind, und bemerkt, dass dieselben in gewissem Sinne die Werthe besitzen*):

---

*) Wenn die Tangente im $\Theta$-Fusspunkte ist:

$$Ax + By + C = 0,$$

$$\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\alpha+i\beta}{\sqrt{1-1}},\quad \frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\alpha-i\beta}{\sqrt{1-1}},$$

so bekommt man für das Product der beiden *endlichen* Θ-Strecken

$$P=F(\alpha,\beta).$$

Analoges gilt für höhere Curven. — Curven, die sowohl allgemeine als Kreisasymptoten besitzen, bieten ebenfalls keine wesentlichen Schwierigkeiten.

Als eine bemerkenswerthe Eigenschaft dieser Art von Sätzen erscheint namentlich die Fähigkeit der Formeln (5) und (6), sich immer auf das endliche Gebiet beschränken zu lassen. — Dass die Sätze eine Reihe bekannter Wahrheiten als Corollare in sich schliessen, braucht kaum erwähnt zu werden.

Auch im Raume gelten ähnliche Normalformen. Näheres hierüber verspare ich für eine spätere Gelegenheit.

Christiania im December 1876.

---

so ist die Θ-Strecke des Punktes $(\alpha,\beta)$ durch

$$\frac{A\alpha+B\beta+C}{\sin\Theta\cdot\sqrt{A^2+B^2}}$$

bestimmt; für die nach den Kreispunkten hingehenden Θ-Strecken erhält man somit

$$\frac{\alpha\pm i\beta}{\sin\Theta\cdot\sqrt{1-1}}.$$

# Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche.

Von

H. Schubert in Hamburg.

Ich beabsichtige durch diese Abhandlung dreierlei:

erstens die von Clebsch in Crelle's Journal Bd. 63, pag. 14 (Salmon-Fiedler's Raumgeometrie II. Th., II. Aufl., Art. 463) berechnete Zahl zu berichtigen (vergl. hier § 7.), welche angiebt, in wieviel Punkten einer allgemeinen Ordnungsfläche $F_n$ die beiden Haupttangenten vierpunktig berühren,

zweitens durch die Bestimmung dieser und anderer ihr verwandter Singularitätenzahlen die Untersuchungen fortzusetzen, welche ich in den Gött. Nachr., Februarheft 1876, und in § 27. meiner „Beiträge zur abzählenden Geometrie“*) (Math. Annalen Bd. X) durch die Lösung der 5 Salmon'schen Probleme $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$ (Salmon-Fiedler, Artikel 462) begonnen habe,

drittens hierdurch die Vorzüge zu zeigen, welche die von mir angewandte *Abzählungsmethode* vor der bei den geometrischen Anzahlbestimmungen hergebrachten algebraischen besitzt.

Die Lösung der Salmon'schen Probleme, sowie derer, welche hier gelöst werden sollen, wurde bisher von dem rein algebraischen Standpunkte aus als schwierig und complicirt angesehen. Jedoch erhält man die in diesen Problemen gesuchten Functionen von $n$ mit überraschender Leichtigkeit, sobald man die handlichen Formeln anwendet, in welche ich im III. Abschnitt meiner Beitr. die dem Chasles'schen Correspondenzprincipe und seinen Erweiterungen zu Grunde liegende algebraische Wahrheit gekleidet habe. Von diesen Formeln habe ich, auf Wunsch einiger Mathematiker, die hier zur Anwendung kommenden nicht blos in den Symbolen der Beitr. (§ 14.), sondern auch *in Worten* ausgesprochen (§ 1. dieser Abh.).

Ausser diesem mir durch das Chasles'sche Correspondenzprincip dargebotenen Hülfsmittel, werde ich für meine folgenden Untersuchungen

*) Für diese oft citirte Abhandlung gebrauche ich immer die Abkürzung „Beitr.“

nur noch zwei auch in § 1. angegebene Hülfsmittel gebrauchen, welche beide auf dem fundamentalen Satze von der Zahl der gemeinsamen Punkte dreier Flächen beruhen. Mit Anwendung dieser schliesslich nur auf dem Correspondenzprincip und dem Princip der speciellen Lage (Beitr. § 7.) fussenden Hülfsmittel kann man, nach meiner Ansicht, nach und nach alle Singularitätenzahlen der $F_n^\bullet$ — wie überhaupt jede geometrische Anzahl, — rein geometrisch herleiten. Man hat hier nur von der Definition der $F_n$ als eines Punktsystems, das mit jeder Geraden $n$ Punkte gemein hat, auszugehen. Deshalb habe ich im Folgenden nicht blos unbekannte Zahlen, sondern auch viele *bekannte Zahlen* nach meiner Abzählungsmethode abgeleitet, indem ich die Definition der $F_n$ als einzigen Ausgangspunkt betrachtete.

Aus redactionellen Gründen habe ich die Zahl der Problemgruppen etwas eingeschränkt. Es wird immer leicht sein, die Probleme aufzustellen und zu lösen, welche sich an die hier gelösten anschliessen.

Bei dem Bestreben, die Leser mit *möglichst wenigen Symbolen* zu belästigen, habe ich es nicht vermeiden können, bisweilen bei der Angabe leicht ableitbarer Resultate mehr *Worte* zu machen, als die Sache vielleicht verdient.

Endlich möchte ich noch darauf aufmerksam machen, dass die hier abgeleiteten, bisher unbekannten Zahlen noch weit davon entfernt sind, Resultate zu liefern für diejenige allgemeine Fläche, welche Herr Zeuthen in seiner „Théorie des surfaces réciproques“ (Math. Ann. Bd. X, pag. 446, und auch Bd. IV) seinen tiefen Untersuchungen zu Grunde legt. Bei Voraussetzung einer solchen Fläche würde jede der im Folgenden entwickelten Zahlen gewisse von den hinzugetretenen Singularitäten abhängige Reductionen erfahren. Die Multiplicitäten solcher Reductionen würden im Allgemeinen schwierig zu bestimmen sein, in einigen Fällen freilich a posteriori dadurch berechnet werden können, dass man ein und dieselbe Anzahl meist auf mehreren verschiedenen Wegen abzuleiten vermag.

## § 1.

## Die zur Anwendung kommenden Hülfsmittel.

Aus dem Satze, dass die Zahl der gemeinsamen Punkte dreier Flächen gleich dem Producte ihrer Ordnungen ist (Beitr. § 26.), fliessen die folgenden beiden, später immer kurz mit I. und II. bezeichneten *Hülfsmittel:*

I. *Wenn die Fläche $n^{ter}$ Ordnung $F_n$ durch zwei andere Flächen in Curven von den Ordnungen $p$ und $q$ geschnitten wird, so ist die Zahl der gemeinsamen Punkte dieser beiden Curven gleich*

$$\frac{1}{n} \cdot p \cdot q .$$

II. *Wenn eine Gerade, welche $F_n$ an einer Stelle $\alpha$-punktig berührt, an einer andern Stelle $\beta$-punktig berührt u. s. w., eine Regelfläche vom Grade $\nu$ erzeugt, so ist:*

$$n \cdot \nu = 1 \cdot \nu_1 + \alpha \cdot \nu_\alpha + \beta \cdot \nu_\beta + \cdots$$

(cf. Beitr. § 27., pag. 101 oben), *wo $\nu_1$, $\nu_\alpha$, $\nu_\beta$, $\cdots$ die Ordnung der Curven ist, welche bezüglich von den einfachen Schnittpunkten, den Stellen $\alpha$-punktiger Berührung, den Stellen $\beta$-punktiger Berührung u. s. w. gebildet werden.*

Als *Zusatz* folgt aus I. mit Benutzung von Satz 3) in § 2. namentlich auch das bekannte (Salmon-Fiedler, Art. 438, V) Resultat, dass *durch jeden Punkt des Raums an $F_n$ $p(n-1)$ Tangentialebenen gelegt werden können, welche in Punkten einer aus $F_n$ ausgeschnittenen Curve $p^{ter}$ Ordnung berühren.*

Als *drittes Hülfsmittel* werde ich das *Correspondenzprincip* benutzen, und zwar meist als Formel zwischen den einfachen Grundbedingungen eines Punktepaars oder Strahlenpaars und der Zahl der Coincidenzen dieses Paars (Beitr. § 16. I. und § 20. I.).

Diese Formel lautet für das *Punktepaar* in den in den Beitr. eingeführten, nachher auch hier benutzten Symbolen, wenn $c$ und $d$ die Punkte des Paars, $g$ seine Verbindungsgerade, $\varepsilon$ seine Coincidenz ist:

III a) $$c + d - g = \varepsilon;$$

d. h. in Worten:

III a) *In einem Systeme von $\infty^1$ Punktepaaren ist die Zahl derjenigen Punktepaare, deren beide Punkte unendlich nahe sind, gleich der Zahl derjenigen Punktepaare, welche ihren ersten Punkt auf einer gegebenen Ebene haben, vermehrt um die Zahl derjenigen Punktepaare, welche ihren zweiten Punkt auf einer gegebenen Ebene haben, vermindert um die Zahl derjenigen Punktepaare, welche ihren Verbindungsstrahl durch eine gegebene Gerade schicken.*

Für das *Strahlenpaar*, dessen beide Strahlen $g$ und $h$ sich schneiden, und zwar im Punkte $c$ und in der Ebene $\mu$, und dessen Coincidenz $\varepsilon$ ist, heisst die Correspondenzformel erster Dimension:

III b) $$g + h - c - \mu = \varepsilon;$$

d. h. in Worten:

III b) *In einem Systeme von $\infty^1$ Paaren sich schneidender Strahlen ist die Zahl derjenigen Paare, deren beide Strahlen unendlich nahe liegen, gleich der Zahl derjenigen, welche ihren ersten Strahl durch eine gegebene Gerade schicken, vermehrt um die Zahl derjenigen, welche ihren zweiten Strahl durch eine gegebene Grade schicken, vermindert um die Zahl derjenigen, welche ihren Schnittpunkt in eine gegebene Ebene schicken, vermindert um die Zahl derjenigen, welche ihre Schnittebene durch einen gegebenen Punkt schicken.*

Der entsprechende Satz für das *Ebenenpaar* geht aus IIIa) durch dualistische Uebertragung hervor.

Wie in den Beitr. gezeigt ist, erhält man aus diesen Correspondenzformeln alle von höherer Dimension durch blosse *symbolische Multiplication*, sobald man die allgemeinen Beziehungen anwendet, welche zwischen den Grundbedingungen zweier Hauptelemente bestehen, von denen das eine in dem andern liegt. Die letzterwähnten Beziehungen gipfeln in dem durch das *Princip der speciellen Lage* leicht beweisbaren Satze (Beitr. § 9., I.):

*In einem beliebigen Systeme von $\infty^2$ Gebilden, deren jedes aus einem Strahle und einem darauf liegenden Punkte besteht, ist die Zahl derjenigen Gebilde, welche ihren Punkt in eine gegebene Ebene und zugleich ihren Strahl durch eine gegebene Gerade schicken, gleich der Zahl derjenigen Gebilde, welche ihren Punkt auf eine gegebene Gerade schicken, vermehrt um die Zahl derjenigen, welche ihren Strahl in eine gegebene Ebene schicken.*

Mit Hülfe dieses Satzes erhält man aus der *Punktepaar*-Formel erster Dimension für die einfachen Grundbedingungen der Coincidenz die folgenden beiden Formeln:

$$\text{IIIc)} \qquad cd - g_e = \varepsilon b,$$

$$\text{IIId)} \qquad c^2 + d^2 + g_e - g_p = \varepsilon g;$$

d. h. in Worten:

IIIc) *In einem Systeme von $\infty^2$ Punktepaaren ist die Zahl derjenigen Punktepaare, deren beide Punkte in einer gegebenen Ebene unendlich nahe liegen, gleich der Zahl derjenigen Punktepaare, welche jeden ihrer beiden Punkte in je eine gegebene Ebene schicken, vermindert um die Zahl derjenigen, welche ihren Verbindungsstrahl in eine gegebene Ebene schicken.*

IIId) *In einem Systeme von $\infty^2$ Punktepaaren ist die Zahl derjenigen, welche ihre beiden Punkte unendlich nahe haben und dabei ihren Verbindungsstrahl durch eine gegebene Gerade schicken, gleich der Zahl derjenigen, welche ihren ersten Punkt auf eine gegebene Gerade schicken, vermehrt um die Zahl derjenigen, welche ihren zweiten Punkt auf eine gegebene Gerade schicken, vermehrt um die Zahl derjenigen, welche ihren Verbindungsstrahl in eine gegebene Ebene schicken, vermindert um die Zahl derjenigen, welche ihren Verbindungsstrahl durch einen gegebenen Punkt schicken.*

Aus diesen beiden Sätzen folgen durch dualistische Uebertragung zwei Sätze für das *Ebenenpaar* IIIc′ und IIId′.

Aus dem *Strahlenpaar* erster Dimension erhält man drei Formeln zweiter Dimension, nämlich:

III e) $$gh - c^2 - \mu^2 = \varepsilon k,$$

III f) $$g_e + h_e + c^2 - \mu c = \varepsilon c,$$

III f') $$g_p + h_p + \mu^2 - \mu c = \varepsilon \mu;$$

d. h. in Worten:

III e) *In einem Systeme von $\infty^2$ Paaren sich schneidender Strahlen ist die Zahl derjenigen Paare, deren beide Strahlen unendlich nahe liegen und eine gegebene Gerade schneiden, gleich der Zahl derjenigen Strahlenpaare, welche jeden ihrer beiden Strahlen je durch eine gegebene Gerade schicken, vermindert um die Zahl derjenigen, welche ihren Schnittpunkt auf eine gegebene Gerade schicken, vermindert um die Zahl derjenigen, welche ihre Schnittebene durch eine gegebene Gerade schicken.*

III f) *In einem Systeme von $\infty^2$ Paaren sich schneidender Strahlen ist die Zahl derjenigen, deren beide Strahlen unendlich nahe liegen und dabei ihren Schnittpunkt auf eine gegebene Ebene schicken, gleich der Zahl derjenigen, welche ihren ersten Strahl in eine gegebene Ebene schicken, vermehrt um die Zahl derjenigen, welche ihren zweiten Strahl in eine gegebene Ebene schicken, vermehrt um die Zahl derjenigen, welche ihren Schnittpunkt auf eine gegebene Gerade schicken, vermindert um die Zahl derjenigen, welche ihren Schnittpunkt auf eine gegebene Ebene und dabei ihre Schnittebene durch einen gegebenen Punkt schicken.*

III f') entspricht III f) dualistisch.

Die bisher angeführten Correspondenzsätze würden zur Beantwortung aller im Folgenden auftretenden Fragen ausreichen, sobald man die auf die *Haupttangenten* und die *Doppeltangenten* bezüglichen Zahlen als bekannt voraussetzt. Der Verfasser möchte jedoch auch die letztgenannten Zahlen durch die nämliche Methode, wie die noch unbekannten Zahlen ableiten, indem er nichts weiter als die Definitionseigenschaft der $F_n$ voraussetzt, dass sie nämlich von jeder Geraden in $n$ Punkten geschnitten wird; da es ihm weniger auf die Mittheilung unbekannter Zahlen, als auf die Mittheilung seiner, complicirte algebraische Betrachtungen vermeidenden *Methode* ankommt. Deshalb fügen wir noch die *Punktepaarformeln dritter* und *vierter* Dimension hinzu, durch welche wir die bekannten auf Tangenten, Haupttangenten, Doppeltangenten bezüglichen Anzahlen ableiten werden.

Die drei Punktepaarformeln dritter Dimension, welche wir anwenden werden, ergeben sich aus der Punktepaarformel erster Dimension durch symbolische Multiplication mit der Bedingung, dass der erste der beiden Punkte in einer gegebenen Geraden liegen soll, mit der Bedingung, dass der Verbindungsstrahl in einer gegebenen Ebene liegen soll, und mit der Bedingung, dass der Verbindungsstrahl durch einen gegebenen Punkt gehen soll; und zwar im letzten Falle bei zweimaliger Benutzung der Formel $cg_p = c^3 + g_e$ (Beitr. § 9., pag. 27):

III g) $$c^3 + c^2 d - c^2 g = \varepsilon b^2,$$

III h) $$c g_e + d g_e - g_s = \varepsilon g_e,$$

III i) $$c^3 + d^3 + g_s = \varepsilon g_p;$$

d. h. in Worten:

III g) *In einem Systeme von $\infty^3$ Punktepaaren ist die Zahl derjenigen, deren beide Punkte in einer gegebenen Geraden unendlich nahe liegen, gleich der Zahl derjenigen, deren erster Punkt ein gegebener ist, vermehrt um die Zahl derjenigen, welche ihren ersten Punkt in eine gegebene Gerade und zugleich ihren zweiten Punkt in eine gegebene Ebene schicken, vermindert um die Zahl derjenigen, welche ihren ersten Punkt auf eine gegebene Gerade und dabei ihren Verbindungsstrahl durch eine gegebene Gerade schicken.*

III h) *In einem Systeme von $\infty^3$ Punktepaaren ist die Zahl derjenigen, welche ihre beiden Punkte unendlich nahe haben und dabei ihren Verbindungsstrahl in eine gegebene Ebene schicken, gleich der Zahl derjenigen, welche mit ihrem Verbindungsstrahle dasselbe thun und dabei ihren ersten Punkt in eine gegebene Ebene schicken, vermehrt um die Zahl derjenigen, welche mit ihrem Verbindungsstrahle dasselbe thun und dabei ihren zweiten Punkt in eine gegebene Ebene schicken, vermindert um die Zahl derjenigen, welche ihren Verbindungsstrahl in einen gegebenen Strahlbüschel schicken.*

III i) *In einem Systeme von $\infty^3$ Punktepaaren ist die Zahl derjenigen, welche ihre beiden Punkte unendlich nahe haben und dabei ihren Verbindungsstrahl durch einen gegebenen Punkt schicken, gleich der Zahl derjenigen, deren erster Punkt ein gegebener ist, vermehrt um die Zahl derjenigen, deren zweiter Punkt ein gegebener ist, vermehrt um die Zahl derjenigen, deren Verbindungsstrahl in einem gegebenen Strahlbüschel liegt.*

Endlich führen wir hier diejenigen beiden Punktepaarformeln *vierter* Dimension an, welche im Folgenden angewendet werden:

III k) $$c^2 d^2 - G = \varepsilon b^2 g,$$

III l) $$c^3 g + d^3 g + G = \varepsilon g_s = \varepsilon b g_p - \varepsilon b^3;$$

d. h. in Worten:

III k) *In einem System von $\infty^4$ Punktepaaren ist die Zahl derjenigen, welche ihre beiden Punkte in einer gegebenen Geraden unendlich nahe haben und dabei ihren Verbindungsstrahl durch eine gegebene Gerade schicken, gleich der Zahl derjenigen, welche jeden ihrer beiden Punkte je auf eine gegebene Gerade schicken, vermindert um die Zahl derjenigen, deren Verbindungsstrahl ein gegebener Strahl ist.*

III l) *In einem Systeme von $\infty^4$ Punktepaaren ist die Zahl derjenigen, welche ihre beiden Punkte unendlich nahe haben und dabei ihren*

*Verbindungsstrahl in einen gegebenen Strahlbüschel schicken, gleich der Zahl derjenigen, welche ihren ersten Punkt in einem gegebenen haben und dabei ihren Verbindungsstrahl durch eine gegebene Gerade schicken, vermehrt um die Zahl derjenigen, welche ihren zweiten Punkt in einem gegebenen haben und dabei ihren Verbindungsstrahl durch eine gegebene Gerade schicken, vermehrt um die Zahl derjenigen, deren Verbindungsstrahl gegeben ist.*

## § 2.

## Beziehungen der $F_n$ zu den $\infty^4$ Geraden des Raumes und zu ihren $\infty^3$ Tangenten.

Alle im vorstehenden Paragraphen zusammengestellten Hülfsmittel fliessen aus nur *zwei algebraischen Quellen*, erstens dem Chasles'schen Correspondenzprincip und zweitens dem Princip der speciellen Lage (Beitr. § 7.), einer einfachen Consequenz des *Continuitätsprincips. Ausser diesen beiden Principien hat man bei der von mir seit einigen Jahren cultivirten Untersuchungsmethode nichts weiter aus der Algebra zu entlehnen.* Auch bei der vorliegenden Untersuchung werden wir ausser den voranstehenden Hülfsmitteln weder algebraische noch geometrische Sätze nöthig haben. Um dies zu zeigen, gehen wir hier von der Definition der Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung aus, als eines Punktorts, der mit jeder Geraden $n$ Punkte gemein hat, leiten hieraus in diesem Paragraphen zunächst die altbekannten Zahlen ab, die sich auf die *Tangenten, Haupttangenten* und *Doppeltangenten* beziehen, und aus diesen Zahlen später die meist *unbekannten* auf gewisse *höhere Singularitäten* bezüglichen Zahlen.

Jede der $\infty^4$ Geraden des Raumes schneidet die $F_n$ in $n$ Punkten. Je zwei solcher $n$ Punkte fassen wir zu einem Punktepaare $(c, d, g)$ zusammen. Dann erhält man ein System vierter Stufe von Punktepaaren, dessen Coincidenzen *Tangenten* genannt werden. Da nun für dieses Punktepaarsystem:

$$c^2 d^2 = n^2, \quad G = n(n-1), \quad c^3 g = 0, \quad d^3 g = 0, \quad \varepsilon b^3 = 0$$

zu setzen ist, so erhalten wir aus III k) und III l):

$$\varepsilon b^2 g = 1 \cdot n, \bullet \varepsilon g_s = \varepsilon b g_p = n(n-1).$$

Daraus folgt:

1) *Die in einem Punkte einer $F_n$ berührenden Tangenten bilden einen Strahlbüschel.*

2) *Jeder Strahlbüschel des Raums enthält $n(n-1)$ Tangenten einer $F_n$.*

3) *Die Berührungspunkte der von einem Punkte des Raums an eine $F_n$ gezogenen Tangenten bilden eine Curve $n(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.*

Da ferner die beiden Curven $n(n-1)^{ter}$ Ordnung der Berührungspunkte der von zwei Punkten des Raums aus gezogenen Tangenten nach Hülfsmittel I. $n(n-1)^2$ gemeinsame Punkte haben, so lassen sich durch die Verbindungsgerade der beiden Punkte $n(n-1)^2$ Ebenen legen, deren jede *zwei* in demselben Punkte berührende, also nach 1) *alle* in diesem Punkte berührende Tangenten enthält. Daraus folgt:

4) *Durch jede Gerade des Raums gehen $n(n-1)^2$ Ebenen — Tangentialebenen —, deren jede den Strahlbüschel aller in demselben Punkte einer $F_n$ berührenden Tangenten enthält.*

Wir besprechen zunächst einige auf die einfachen Schnittpunkte der $F_n$ mit den Geraden des Raums bezügliche Zahlen. Jeder Strahlbüschel enthält $n$ Gerade, welche einen Schnittpunkt mit $F_n$ auf einer gegebenen Ebene haben, d. h. die durch einen Punkt gehenden Geraden, welche einen Schnittpunkt auf einer gegebenen Ebene haben, beschreiben eine Regelfläche $n^{ten}$ Grades. Daher gehen nach I. durch jeden Punkt $n^2$ Gerade, welche auf 2 gegebenen Ebenen Schnittpunkte besitzen. Unter diesen befinden sich $n$ Gerade, welche nach den $n$ Punkten gehen, die der $F_n$ und den beiden Ebenen gemeinsam sind. Also:

5) *Durch jeden Punkt des Raums gehen $n^2-n$ Gerade, welche von ihren Schnittpunkten mit $F_n$ einen in einer gegebenen Ebene und einen andern in einer andern gegebenen Ebene haben.*

Von solchen Geraden befinden sich in jeder Ebene natürlich $n^2$. Durch Addition dieser beiden Zahlen erhält man, dass $2n^2-n$ Gerade existiren, welche 2 gegebene Gerade schneiden und dabei von ihren Schnittpunkten mit $F_n$ zwei verschiedene in zwei gegebenen Ebenen haben. Hieraus folgt wieder mit Anwendung von Hülfsmittel I.:

6) *Es giebt $n(2n^2-n)-2\cdot n^2 = n^2(2n-3)$ Gerade, welche eine gegebene Gerade schneiden und dabei von ihren Schnittpunkten mit $F_n$ drei verschiedene in drei gegebenen Ebenen haben.*

Analog erhält man endlich mit Benutzung von 5):

7) *Es giebt $n\cdot n^2(2n-3)-3\cdot n\cdot(n^2-n) = n^2(2n^2-6n+3)$ Gerade, welche von ihren Schnittpunkten mit $F_n$ vier verschiedene in vier gegebenen Ebenen haben.*

Jetzt sind wir im Besitze der Mittel, um noch einige andere auf Tangenten bezügliche Anzahlen zu bestimmen.

Es giebt $\infty^1$ Gerade, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen Schnittpunkt mit $F_n$ auf einer gegebenen Ebene haben. Auf jeder solchen Geraden fassen wir je zwei der $n-1$ übrigen Schnittpunkte zu einem Punktepaar zusammen. Auf das so entstehende einstufige System von Punktepaaren $(c, d, g)$ wenden wir die Punkte-

paarformel erster Dimension, also Hülfsmittel IIIa) an. Dann hat man zu setzen:

$$c = d = (n^2 - n)(n-2) \text{ nach } 5), \quad g = n(n-1)(n-2).$$

Also ist:

$$\varepsilon = n(n-1)(n-2),$$

d. h. in Worten:

8) *Die einfachen Schnittpunkte der von einem Punkte ausgehenden Tangenten bilden auf $F_n$ eine Curve von der Ordnung $n(n-1)(n-2)$.*

Durch analoges Verfahren, oder auch mit Benutzung von 2) erhält man:

9) *In jeder Ebene liegen $n(n-2)(n+1)$ Tangenten, welche einen einfachen Schnittpunkt in einer auf der Ebene gelegenen Geraden haben.*

Von analogen Sätzen erwähnen wir nebenbei:

10) *Jede $F_n$ besitzt $n^2(n-4)(2n^2-3n-3)$ Tangenten, welche drei verschiedene einfache Schnittpunkte in drei gegebenen Ebenen haben.*

Aus 2) folgt, dass durch jeden Punkt der $F_n$ $n(n-1)$ eine gegebene Gerade schneidende Tangenten gehen. Unter diesen ist doppelt zu zählen die in dem Punkte selbst berührende Tangente. Also erhält man:

11) *Die von einem Punkte der $F_n$ ausgehenden und an einer andern Stelle berührenden Tangenten bilden eine Regelfläche vom Grade $n(n-1)-2 = (n-2)(n+1)$.*

Diese Regelfläche schneidet die $F_n$ erstens in den Berührungspunkten der Tangenten, zweitens in den sonstigen einfachen Schnittpunkten. Daher erhält man durch Hülfsmittel I.:

12) *Die sonstigen einfachen Schnittpunkte der von einem Punkte der $F_n$ ausgehenden, anderswo berührenden Tangenten, bilden eine Curve von der Ordnung $n^2(n-1) - 2n - 2n(n-1) = n^2(n-3)$.*

Es giebt $\infty^2$ Gerade, welche zwei verschiedene Schnittpunkte mit $F_n$ in zwei gegebenen Ebenen haben. Auf jeder Geraden fassen wir je zwei der übrigen $n-2$ Schnittpunkte zu einem Punktepaar zusammen. So entsteht ein zweistufiges System von Punktepaaren, auf welches wir die Correspondenzformel III c) anwenden. Dann ist zu setzen:

$$cd = 2n^4 - 6n^3 + 3n^2 \text{ (nach 7)}); \quad g_e = n^2(n-2)(n-3).$$

Also ist:

$$\varepsilon b = n^2(n^2 - n - 3),$$

oder in Worten:

13) *Es giebt $n^2(n^2-n-3)$ Tangenten, welche ihren Berührungspunkt auf einer gegebenen Ebene, und zwei verschiedene einfache Schnittpunkte auf zwei andern gegebenen Ebenen haben.*

Wir gehen weiter zu den von den $\infty^3$ Tangenten der $F_n$ erzeugten Punktepaaren.

Zuerst fassen wir auf jeder Tangente den Berührungspunkt mit einem der $n-2$ sonstigen Schnittpunkte zu einem Punktepaar $(c, d, g)$ zusammen. Dann erhalten wir ein dreistufiges System von Punktepaaren, dessen Coincidenzen die *dreipunktig* berührenden Geraden, d. h. die *Haupttangenten* der $F_n$ sind. Für dieses Punktepaarsystem ist nach den voranstehenden Resultaten 1), 2), 3), 9):

$$c^3 = 0, \quad c^2 d = n^2, \quad d^3 = 0, \quad c^2 g = n(n-2), \quad c g_e = n(n-2),$$
$$d g_e = n(n-2)(n+1), \quad g_e = n(n-1)(n-2).$$

Daraus folgt nach Hülfsmittel III g), III h), III i):

$$\varepsilon b^2 = 2n, \quad e g_e = 3n(n-2), \quad \varepsilon g_p = n(n-1)(n-2).$$

Diese 3 Formeln enthalten die bekannten Resultate:

14) *In jedem Punkte einer $F_n$ berühren zwei Haupttangenten.*

15) *In jeder beliebigen Ebene liegen $3n(n-2)$ Haupttangenten einer $F_n$.*

16) *Durch jeden beliebigen Punkt gehen $n(n-1)(n-2)$ Haupttangenten einer $F_n$.*

Zweitens fassen wir auf jeder Tangente je zwei der $n-2$ einfachen Schnittpunkte zu einem Punktepaar $(c, d, g)$ zusammen. Dann erhalten wir ein dreistufiges System von Punktepaaren, dessen Coincidenzen auf den *Doppeltangenten* der $F_n$ liegen, und zwar so, dass jede Doppeltangente 2 Coincidenzen enthält. Für dieses Punktepaarsystem erhält man aus 12), 11), 9), 2):

$$\begin{aligned} c^3 &= 0; \\ c^2 d &= n^3(n-3); \\ c^2 g &= n(n-2)(n+1)(n-3); \\ c g_e &= n(n-2)(n+1)(n-3) = d g_e; \\ g_e &= n(n-1)(n-2)(n-3); \\ d^3 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Hülfsmittel III g), III h), III i):

$$\begin{aligned} \varepsilon b^2 &= n(n-3)(n+2); \\ \varepsilon g_e &= n(n-2)(n-3)(n+3); \\ \varepsilon g_p &= n(n-1)(n-2)(n-3). \end{aligned}$$

Diese 3 Formeln enthalten die bekannten Resultate:

17) *In jedem Punkte einer $F_n$ berühren $(n-3)(n+2)$ Doppeltangenten.*

18) *In jeder beliebigen Ebene liegen* $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$ *Doppeltangenten einer* $F_n$.

19) *Durch jeden beliebigen Punkt gehen* $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ *Doppeltangenten einer* $F_n$.

## § 3.

## Aufzählung der zu behandelnden, auf Haupt- und Doppeltangenten mit gemeinsamem Berührungspunkte bezüglichen Systeme von Paaren.

Wir beabsichtigen, zu den Zahlen zu gelangen, welche sich auf die in *einstufiger Mannigfaltigkeit* vorhandenen singulären Tangenten beziehen. Um diese Zahlen mit möglichst vielen Bestätigungen zu gewinnen, müssen wir die Correspondenzformeln erster oder zweiter Dimension, also die in § 1. mit IIIa) bis IIIf') bezeichneten Hülfsmittel, auf gewisse ein- oder zweistufige Systeme von Hauptelementenpaaren anwenden, welche in der folgenden *Tabelle* zusammengestellt sind. Um diese Systeme bequem charakterisiren zu können, schicken wir einige Definitionen voran.

Wir erinnern daran, dass in jedem Punkte $A$ einer $F_n$ 2 Haupttangenten und $(n-3)(n+2)$ Doppeltangenten berühren, dass jede Haupttangente noch $n-3$ einfache Schnittpunkte, jede Doppeltangente noch einen zweiten Berührungspunkt und $n-4$ einfache Schnittpunkte besitzt.

Für die folgenden Definitionen bezeichne der Ausdruck *„singuläre Tangente"* jede Haupttangente und jede Doppeltangente der $F_n$.

*Die Berührungspunkte und die einfachen Schnittpunkte einer singulären Tangente heissen ihr zugehörig und einander zugehörig.*

*Zwei verschiedene in demselben Punkte A berührende singuläre Tangenten heissen mit einander verwandt.*

Sind zwei singuläre Tangenten durch den gemeinsamen Berührungspunkt $A$ mit einander verwandt, so heisst *verwandt* auch erstens *jede dieser Tangenten mit jedem Punkte*, welcher der andern angehörig heisst, und nicht $A$ ist, zweitens *jeder der einen angehörige*, nicht mit $A$ identische *Punkt mit jedem der andern angehörigen*, nicht mit $A$ identischen *Punkte.*

Einem *Paare von Punkten* heisst *angehörig* jeder Strahl oder jeder Punkt, welcher *beiden* angehörig heisst.

Einem *Paare von Punkten oder Strahlen* heisst *verwandt* jeder Punkt oder Strahl, welcher *einem von beiden* verwandt heisst.

Diese Definitionen gestatten es, die zu betrachtenden 37 Systeme von Paaren so zu beschreiben, wie hier folgt.

## Tabelle der Systeme von Paaren.

a) Das zweistufige System, erzeugt durch das Punktepaar, welches von dem *Berührungspunkte einer Haupttangente und einem ihrer einfachen Schnittpunkte* gebildet wird;

b) das einstufige System, welches von demselben Punktepaare erzeugt wird, wenn

- b$\alpha$) ein zugehöriger einfacher Schnittpunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll,
- b$\beta$) die verwandte Haupttangente eine gegebene Gerade schneiden soll,
- b$\gamma$) ein verwandter Haupttangentenschnittpunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll,
- b$\delta$) eine verwandte Doppeltangente eine gegebene Gerade schneiden soll,
- b$\varepsilon$) ein verwandter Doppeltangentenberührungspunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll,
- b$\zeta$) ein verwandter Doppeltangentenschnittpunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll;

c) das zweistufige System, erzeugt durch das Punktepaar, welches *von zwei einfachen Schnittpunkten einer Haupttangente* gebildet wird;

d) das einstufige System, welches von demselben Punktepaare erzeugt wird, wenn

- d$\alpha$) der zugehörige Berührungspunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll,
- d$\beta$) ein zugehöriger einfacher Schnittpunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll,
- d$\gamma$) die verwandte Haupttangente eine gegebene Gerade schneiden soll,
- d$\delta$) ein verwandter Haupttangentenschnittpunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll,
- d$\varepsilon$) eine verwandte Doppeltangente eine gegebene Gerade schneiden soll,
- d$\zeta$) ein verwandter Doppeltangentenberührungspunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll,
- d$\eta$) ein verwandter Doppeltangentenschnittpunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll.

e) Das zweistufige System, erzeugt durch das Strahlenpaar, welches von *je zwei verwandten Haupttangenten* gebildet wird;

f) das einstufige System, welches von demselben Strahlenpaare erzeugt wird, wenn

- f$\alpha$) einer der $n-3$ auf einer der beiden Haupttangenten gelege-

nen einfachen Schnittpunkte in einer gegebenen Ebene liegen soll,

fβ) eine verwandte Doppeltangente eine gegebene Gerade schneiden soll,

fγ) ein verwandter Doppeltangentenberührungspunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll,

fδ) ein verwandter Doppeltangentenschnittpunkt auf einer gegebenen Ebene ligen soll.

g) Das zweistufige System, erzeugt durch das *Ebenenpaar*, welches von den *beiden Tangentialebenen in den beiden Berührungspunkten einer Doppeltangente erzeugt wird.*

h) Das einstufige System, welches von demselben Ebenenpaare erzeugt wird, wenn

hα) einer der Berührungspunkte in einer gegebenen Ebene liegen soll,

hβ) einer der einfachen Schnittpunhte der Doppeltangente in einer gegebenen Ebene liegen soll.

i) Das zweistufige System, erzeugt durch das Punktepaar, welches von den *beiden Berührungspunkten einer Doppeltangente* gebildet wird;

k) das einstufige System, welches von demselben Punktepaar erzeugt wird, wenn

kα) ein zugehöriger einfacher Schnittpunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll,

kβ) eine verwandte Haupttangente eine gegebene Gerade schneiden soll,

kγ) ein verwandter Haupttangentenschnittpunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll.

l) Das zweistufige System, erzeugt durch das Punktepaar, welches von *einem Berührungspunkte einer Doppeltangente und einem ihrer einfachen Schnittpunkte* gebildet wird;

m) das einstufige System, welches von demselben Punktepaar erzeugt wird, wenn

mα) der zugehörige Berührungspunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll,

mβ) ein zugehöriger einfacher Schnittpunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll,

mγ) eine verwandte Haupttangente eine gegebene Gerade schneiden soll,

mδ) ein verwandter Haupttangentenschnittpunkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll.

n) Das zweistufige System, erzeugt durch das Punktepaar, welches von *zwei einfachen Schnittpunkten einer Doppeltangente* gebildet wird.

o) Das zweistufige System, erzeugt durch das Strahlenpaar, welches von einer *Haupttangente und einer ihr verwandten Doppeltangente* gebildet wird;

p) das einstufige System, welches von demselben Strahlenpaare erzeugt wird, wenn

pα) die verwandte Haupttangente eine gegebene Gerade schneiden soll,

pβ) ein verwandter Haupttangentenschnittpunkt in einer gegebenen Ebene liegen soll.

q) Das zweistufige System, erzeugt durch das Strahlenpaar, welches von *zwei verwandten Doppeltangenten* gebildet wird.

Um für die eben zusammengestellten Systeme die Coincidenzen vermittelst der Correspondenzformeln berechnen zu können, haben wir die Kenntniss gewisser auf verwandte Haupt- und Doppeltangenten bezüglicher Zahlen nöthig, welche wir im folgenden Paragraphen bestimmen wollen.

## § 4.

### Bestimmung der auf Haupt- und Doppeltangenten mit gemeinsamem Berührungspunkte bezüglichen Zahlen.

Die Zahlen, welche wir für die 37 Systeme des vorigen Paragraphen nöthig haben, beziehen sich:

*erstens* auf eine Haupttangente und die ihr zugehörigen Punkte,
*zweitens* auf eine Doppeltangente und die ihr zugehörigen Punkte,
*drittens* auf zwei verwandte Haupttangenten und deren Schnittpunkte,
*viertens* auf eine Haupttangente und eine ihr verwandte Doppeltangente, sowie deren zugehörige Punkte,
*fünftens* auf zwei verwandte Doppeltangenten.

Es ist möglich, diese Zahlen *durch Correspondenzformeln direct* aus den Zahlen zu bestimmen, die sich auf gewöhnliche *Tangenten* beziehen. Der Bestätigung wegen sind viele der folgenden Zahlen wirklich so bestimmt. Diesem etwas umständlichen Wege ziehen wir hier einen Weg vor, bei welchem die *Hülfsmittel* I. *und* II. *vorzugsweise* zur Anwendung gelangen.

Von den auf eine Haupttangente bezüglichen Zahlen sind schon drei durch die Formeln 14), 15), 16) bestimmt.

Die Zahl der Strahlen, welche zwei gegebene Gerade schneiden, ist gleich der Summe der beiden Zahlen, welche angeben, wieviel solcher Strahlen durch einen gegebenen Punkt gehen und wieviel in einer gegebenen Ebene liegen (Princip der speciellen Lage, Beitr. § 8., p. 25). Daher erhält man durch Addition der Formeln 15) und 16) den Satz:

20) *Die eine gegebene Gerade schneidenden Haupttangenten bilden eine Regelfläche vom Grade*

$$n(n-2)(n+2).$$

Unter den $n(n-1)(n-2)$ von einem Punkte der Fläche ausgehenden Haupttangenten befinden sich die *beiden* Haupttangenten, deren jede in dem Flächenpunkte selbst *dreipunktig* berührt. Die übrigen Haupttangenten berühren an andern Stellen. Daher hat man:

21) *Von jedem Punkte der Fläche gehen*

$$n(n-1)(n-2)-6=(n-3)(n^2+2)$$

*anderswo berührende Haupttangenten aus.*

Um die Zahl der Haupttangenten zu bestimmen, welche ihren Berührungspunkt in einer gegebenen Ebene haben und dabei eine gegebene Gerade schneiden, lege man diese Gerade in diese Ebene, oder, m. a. W., man wende das in § 9. der Beitr. mit I. bezeichnete allgemeine Schema an. Dann erhält man aus 14) und 15):

22) *Die Berührungspunkte der eine gegebene Gerade schneidenden Haupttangenten bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$2n+3n(n-2)=n(3n-4).$$

Analog erhält man aus 15) und 21):

23) *Die einfachen Schnittpunkte der eine gegebene Gerade schneidenden Haupttangenten bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$n(n-1)(n-3)(n+4).$$

Für die Formeln 20), 22) und 23) erhält man eine Bestätigung durch das Hülfsmittel II.

Durch dasselbe Hülfsmittel erhält man aus 22) und 14) den Satz:

24) *Die einfachen Schnittpunkte der Haupttangenten, welche in Punkten eines ebenen Schnittes berühren, bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$n(3n^2-4n-6).$$

Nach 23) bilden die Haupttangenten, welche in einer gegebenen Ebene einfache Schnittpunkte besitzen, eine Regelfläche vom Grade $n(n-1)(n-3)(n+4)$. Daher liegen in einer beliebigen anderen gegebenen Ebene $n$-mal so viel Punkte, die zugleich dieser Regelfläche und $F_n$ angehören. Unter diesen Punkten befinden sich erstens dreifach diejenigen $n(3n^2-4n-6)$, wo Haupttangenten berühren, zweitens $(n-3)(n^2+2)$-fach diejenigen $n$, wo die beiden gegebenen Ebenen sich auf $F_n$ treffen. Die übrigen Punkte geben Veranlassung zu folgendem Satze:

25) *Die sonstigen einfachen Schnittpunkte derjenigen Haupttangenten,*

*welche in einer gegebenen Ebene einfache Schnittpunkte besitzen, bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3).$$

Wir entwickeln jetzt in ähnlicher Weise die auf eine Doppeltangente bezüglichen Zahlen. Von diesen sind uns drei durch die Formeln 17), 18), 19) gegeben.

Man erhält zunächst aus 18) und 19):

26) *Der Grad der Regelfläche der eine gegebene Gerade schneidenden Doppeltangenten ist:*

$$n(n-2)(n-3)(n+1).$$

Aus 19) und 17) erhält man, analog wie bei 21):

27) *Von jedem Punkte der Fläche gehen*

$$\tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$$

*anderswo berührende Doppeltangenten aus.*

Aus 17) und 18) erhält man, analog wie bei 22):

28) *Die Berührungspunkte der eine gegebene Gerade schneidenden Doppeltangenten bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$n(n-3)(n^2+2n-4).$$

Ebenso folgt aus 18) und 27):

29) *Die einfachen Schnittpunkte der eine gegebene Gerade schneidenden Doppeltangenten bilden eine Curve von der Ordnung*

$$n(n-3)(n-4)(n^2+n-2).$$

Die 3 noch fehlenden auf eine Doppeltangente bezüglichen Zahlen können nicht sämmtlich ohne Anwendung eines Correspondenzsatzes bestimmt werden, wohl aber zwei von ihnen, sobald die dritte vermittelst einer Correspondenzformel bestimmt ist. Als diese dritte wählen wir die Zahl der Doppeltangenten, welche ihre beiden Berührungspunkte auf zwei gegebenen Ebenen haben. Jede Tangente, welche ihren Berührungspunkt in einer gegebenen Ebene hat, schneidet noch in $n-2$ einfachen Schnittpunkten. Je zwei derselben fassen wir zu einem Punktepaare zusammen. Auf das von solchen Punktepaaren erzeugte zweistufige System wenden wir die Correspondenzformel III c) an. Dann ist zu setzen nach 13):

$$cd = n^2(n^2-n-3), \quad g_e = n(n-2)(n-3).$$

Also ist:

$$\varepsilon b = n(n^3-2n^2+2n-6),$$

d. h. in Worten:

30) *Die anderen Berührungspunkte der Doppeltangenten, welche ihren einen Berührungspunkt in einer gegebenen Ebene besitzen, bilden eine Curve von der Ordnung*

$$n(n^3-2n^2+2n-6).$$

Nun folgt hieraus und aus 28) und 17):

31) *Die einfachen Schnittpunkte der Doppeltangenten, welche in Punkten eines ebenen Schnittes berühren, bilden eine Curve von der Ordnung*

$$n(n-4)(n^3+n^2-4n-6),$$

Aus 29), 31) und 27) folgt endlich:

32) *Die sonstigen einfachen Schnittpunkte der Doppeltangenten, welche in einem ebenen Schnitte schon einfache Schnittpunkte besitzen, bilden eine Curve von der Ordnung*

$$\tfrac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(2n^2+5n+3).$$

Die übrigen im Anfange dieses Paragraphen angedeuteten Zahlen bestimmen sich am leichtesten aus den bis jetzt angegebenen durch das Hülfsmittel I.

Die Curve der Berührungspunkte der eine gegebene Gerade schneidenden Haupttangenten schneidet die Curve der Berührungspunkte der eine andere gegebene Gerade schneidenden Haupttangenten in $n(3n-4)(3n-4)$ Punkten. Unter diesen befinden sich auch die Berührungspunkte der die beiden gegeben Geraden schneidenden Haupttangenten. Die übrigen Schnittpunkte geben Veranlassung zu folgendem Satze:

33) *Die Zahl der Stellen auf einer $F_n$, in denen zwei Haupttangenten berühren, deren jede eine gegebene Gerade schneidet, beträgt*

$4n(2n^2-6n+5)$ (Voss, Math. Ann. Bd. IX, p. 244 oben).

Aehnlich erhält man aus 22), 24) und 23):

34) *Die Zahl der eine gegebene Gerade schneidenden Haupttangenten, welche einen verwandten Haupttangentenschnittpunkt in einer gegebenen Ebene besitzen, beträgt:*

$$n(8n^3-24n^2+11n+12).$$

Dieses kann man auch durch Hülfsmittel II. aus 33) und 22) erhalten.

Ebenso erhält man entweder aus 24) und 25) oder aus 34) und 24):

35) *Die verwandten Haupttangentenschnittpunkte derjenigen Haupttangentenschnittpunkte, welche in einer gegebenen Ebene liegen, bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$n(8n^4-24n^3+2n^2+24n+18).$$

Durch das Hülfsmittel I. erhält man unmittelbar aus 22) und 28), aus 22) und 30), aus 22) und 31), aus 24) und 28), aus 24) und 30), aus 24) und 31) die sechs Sätze:

36) *Die verwandten Doppeltangenten der eine gegebene Gerade schneidenden Haupttangenten, bilden eine Regelfläche vom Grade:*

$$n(3n-4)(n-3)(n^2+2n-4).$$

37) *Die verwandten Doppeltangentenberührungspunkte der eine gegebene Gerade schneidenden Haupttangenten bilden eine Curve von der Ordnung*

$$n(3n-4)(n^3-2n^2+2n-6).$$

38) *Die verwandten Doppeltangentenschnittpunkte der eine gegebene Gerade schneidenden Haupttangenten bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$n(3n-4)(n-4)(n^3+n^2-4n-6).$$

39) *Die verwandten Doppeltangenten derjenigen Haupttangenten, welche auf einer gegebenen Ebene einen einfachen Schnittpunkt haben, bilden eine Regelfläche vom Grade:*

$$n(3n^2-4n-6)(n-3)(n^2+2n-4).$$

40) *Die verwandten Doppeltangentenberührungspunkte derjenigen Haupttangenten, welche auf einer gegebenen Ebene einen einfachen Schnittpunkt haben, bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$n(3n^2-4n-6)(n^3-2n^2+2n-6).$$

41) *Die verwandten Doppeltangentenschnittpunkte derjenigen Haupttangenten, welche auf einer gegebenen Ebene einen einfachen Schnittpunkt haben, bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$n(3n^2-4n-6)(n-4)(n^3+n^2-4n-6).$$

Endlich finden wir, analog wie bei 33), aus 28) und 26) den Satz:

42) *Die verwandten Doppeltangenten der eine gegebene Gerade schneidenden Doppeltangenten, bilden eine Regelfläche vom Grade*

$$n(n-3)(n^5+n^4-16n^3-6n^2+66n-44).$$

## § 5.

## Die Zahlen für die in einstufiger Mannigfaltigkeit vorhandenen singulären Tangenten.

Die in § 4. angegebenen Zahlen reichen aus, um für die *in* § 3. *zusammengestellten Systeme* die linken Seiten der Correspondenzformeln IIIa) bis IIIf') des § 1. zu berechnen. Dadurch gewinnt man ohne Schwierigkeit die auf die Coincidenzen jener Systeme bezüglichen Zahlen. Die letztere geben wir hier an, indem wir bei einigen auch die ausführliche Ableitung hinzufügen. Es wird unnöthig sein, jedesmal anzugeben, welche von den Formeln des § 1. zur Anwendung kommen müssen. Die Buchstabennummern beziehen sich auf die Systeme des § 3. Jede hier neu erscheinende Zahl erhält sofort ein Symbol, welches beibehalten wird. Die Symbole sind so gewählt, dass immer zu beziehen ist:

der Buchstabe $a$ und der Index $a$ auf vierpunktige Tangenten,

der Buchstabe $b$ und der Index $b$ auf drei-zweipunktige Tangenten,

der Buchstabe $g$ auf dreipunktige Tangenten,
der Buchstabe $h$ auf zwei-zweipunktige Tangenten,
der Buchstabe $d$ auf die einfachen Schnittpunkte der Haupttangenten,
der Buchstabe $f$ auf die zweiten Berührungspunkte der Doppeltangenten,
der Buchstabe $e$ auf die einfachen Schnittpunkte der Doppeltangenten,
$\varkappa$ bezieht sich auf die Curve der parabolischen Punkte, $\tau$ auf die Doppeltangentialebenen, $c$ auf die dreifachen Tangenten. Aus jedem der beiden Systeme a) und i) folgen die bekannten Zahlen (Salmon, Cambr. a. Dubl. J. 1849; Clebsch, Crelles Journ. Bd. 58, p. 93; Sturm, Crelles Journ. Bd. 72; Schubert, Gött. Nachr. Februar 1876, Beitr. § 27.)*):

43) *Die vierpunktigen Tangenten bilden eine Regelfläche vom Grade*

$$a = 2n(n-3)(3n-2).$$

44) *Die Berührungspunkte der vierpunktigen Tangenten bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$a_4 = n(11n-24).$$

Aus b$\alpha$) und k$\alpha$) folgt:

45) *Die einfachen Schnittpunkte der vierpunktigen Tangenten bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$a_1 = 2n(n-4)(3n^2+n-12).$$

Auch jede der hier folgenden auf die drei-zweipunktigen Tangenten bezüglichen Zahlen $b$, $b_2$, $b_3$, $b_1$ folgt aus 2 Systemen, nämlich $b$ aus c) und l), $b_2$ aus c) und m$\alpha$), $b_3$ aus d$\alpha$) und l), $b_1$ aus d$\beta$) und m$\beta$). Wir erhalten so:

46) *Die drei-zweipunktigen Tangenten bilden eine Regelfläche vom Grade*

$$b = n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4), \text{ und}$$

47) *ihre Stellen zweipunktiger Berührung eine Curve von der Ordnung*

$$b_2 = n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12), \text{ und}$$

48) *ihre Stellen dreipunktiger Berührung einer Curve von der Ordnung*

$$b_3 = n(n-4)(3n^2+5n-24), \text{ und}$$

49) *ihre einfachen Schnittpunkte eine Curve von der Ordnung*

$$b_1 = n(n-4)(n-5)(n^3+6n^2-n-24).$$

Aus dem Systeme n) erhalten wir die beiden Sätze:

---

*) Diese Citate sind auch auf die Zahlen $b$, $b_2$, $b_3$, $c$, $c_2$ zu beziehen. In Salmon-Fiedler's Werke sind alle diese Zahlen in den Artikeln 447 bis 461 algebraisch abgeleitet.

50) *Die an drei Stellen zweipunktig berührenden Tangenten bilden eine Regelfläche vom Grade*

$$c = \tfrac{1}{3} n\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\,(n^2+3n-2), \text{ und}$$

51) *ihre Berührungspunkte eine Curve von der Ordnung*

$$c_2 = \tfrac{1}{2} n\,(n-2)\,(n-4)\,(n-5)\,(n^2+5n+12).$$

Aus dem Systeme e) erhalten wir die bekannten drei Sätze:

52) *Die parabolischen Punkte bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$\pi_3 = 4n\,(n-2), \text{ und}$$

53) *von den ihnen angehörigen Tangentialebenen gehen immer*

$$\pi_3\,(n-1) = 4n\,(n-1)\,(n-2)$$

*durch einen Punkt, und*

54) *die ihnen angehörigen Tangenten bilden eine Regelfläche vom Grade*

$$\pi = 2n\,(n-2)\,(3n-4)$$

Satz 53) folgt aus 52) auch unmittelbar durch den in § 1. ausgesprochenen Zusatz zum Hülfsmittel I.

Um ein Beispiel einer ausführlichen Ableitung zu geben, schalten wir hier die der Zahl $\pi$ ein.

Es ist anzuwenden Hülfsmittel III e). Dann ist zu setzen:

$gh$ nach 33) gleich $4n\,(2n^2-6n+5)$,
$c^2$ nach 14) gleich $2n$,
$\mu^2$ nach 4) und 14) gleich $2n(n-1)^2$.

Also ist:

$$\varepsilon k = 2n\,(n-2)\,(3n-4).$$

Dieses Resultat kann auch aus 22) und 52) durch Hülfsmittel I. gewonnen werden.

Aus System f$\alpha$) folgt:

55) *Die einfachen Schnittpunkte der parabolischen — d. h. in parabolischen Punkten dreipunktig berührenden — Tangenten bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$\pi_1 = 2n\,(n-2)\,(3n^2-4n-6).$$

Aus System g) folgt:

56) *Die Verbindungsstrahlen der Berührungspunkte der Doppeltangentialebenen bilden eine Regelfläche vom Grade:*

$$\tau = n\,(n-3)\,(n-2)\,(n^2+2n-4).$$

Diese Zahl ist $\frac{1}{4}$ von der Zahl der Schnittpunkte der parabolischen Curve mit der durch 28) angedeuteten Curve.

Aus System h$\alpha$) folgt das bekannte Resultat:

57) *Die Berührungspunkte der Doppeltangentialebenen bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$\tau_2 = n(n-2)(n^3-n^2+n-12).$$

Aus System h$\beta$) folgt:

58) *Die einfachen Schnittpunkte der Verbindungsstrahlen der Berührungspunkte der Doppeltangentialebenen bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$\tau_1 = n(n-2)(n-4)(n^3+n^2-4n-6).$$

Diese Zahl ist $\frac{1}{4}$ von der Zahl der Schnittpunkte der parabolischen Curve mit der durch Satz 31) angedeuteten Curve der Berührungspunkte derjenigen Doppeltangenten, welche einen einfachen Schnittpunkt auf einer gegebenen Ebene besitzen.

Wir behandeln jetzt das System o) ausführlich.

Von den Correspondenzsätzen des § 1. ist anzuwenden III e), III f) und III f'). Wir haben dann zu setzen:

$gh$ nach 36) gleich $n(n-3)(n^2+2n-4)(3n-4)$,

$c^2$ nach 14) und 17) gleich $2n(n-3)(n+2)$,

$\mu^2$ nach 4), 14) und 17) gleich $2n(n-1)^2(n-3)(n+2)$,

$g_e$ nach 15) und 17) gleich $3n(n-2)(n-3)(n+2)$,

$h_e$ nach 18) und 14) gleich $2n(n-2)(n-3)(n+3)$,

$g_p$ nach 16) und 17) gleich $n(n-1)(n-2)(n-3)(n+2)$,

$h_p$ nach 19) und 14) gleich $2n(n-1)(n-2)(n-3)$,

$\mu c$ nach 3), Zusatz zu I., 14) und 17) gleich $2n(n-1)(n-3)(n+2)$.

Hieraus folgt:

$$\varepsilon k = n(n-3)(n^3+2n^2-16n+8) = 2a + b,$$
$$\varepsilon c = n(n-2)(n-3)(3n+8) = 2a_4 + b_3.$$
$$\varepsilon\mu = n(n-1)(n-2)(n-3)(3n+8) = 2a_4(n-1) + b_3(n-1).$$

Das dritte Resultat bestätigt das zweite durch Satz 3). Der Zusammenhang dieser 3 Zahlen mit den schon oben bestimmten Zahlen $a$, $b$, $a_4$, $b_3$ erklärt sich dadurch, dass *eine Haupttangente, mit welcher eine verwandte Doppeltangente zusammengefallen ist, einmal eine drei-zweipunktige und zweimal eine vierpunktige Tangente ist.*

Bei dem Systeme q) sind dieselben Correspondenzsätze anzuwenden, und wir haben zu setzen:

$gh$ nach 42) gleich $n(n-3)(n^5+n^4-16n^3-6n^2+66n-44)$,

$c^2$ gleich $n(n^2-n-6)(n^2-n-7)$,

$\mu c$ gleich $n(n-1)(n^2-n-6)(n^2-n-7)$,

$\mu^2$ gleich $n(n-1)^2(n^2-n-6)(n^2-n-7)$,

$$g_e = h_e = n(n-2)(n-3)(n+3)(n^2-n-7).$$
$$g_p = h_p = n(n-1)(n-2)(n-3)(n^2-n-7).$$

Daher ist:

$$\varepsilon c = n(n-2)(n-3)(n^3+3n^2-11n-28) = 2c_2 + 3b_2 + \tau_2$$
$$\varepsilon\mu = n(n-1)(n-2)(n-3)(n^3+3n^2-11n-28)$$
$$= 2c_2(n-1) + 3b_2(n-1) + \tau_2(n-1),$$
$$\varepsilon k = n(n-3)(2n^4-7n^3-12n^2+56n-16) = 2\cdot 3\cdot c + 3b + 2\tau.$$

Der Zusammenhang, den diese Resultate mit den oben bestimmten Zahlen $c$, $c_2$, $b$, $b_2$, $\tau$, $\tau_2$ aufweisen, erklärt sich dadurch, dass die Gerade, in welche zwei in demselben Punkte $A$ berührende Doppeltangenten zusammenfallen, als zweifache in $A$ und in zwei andern Stellen berührende Tangente, ferner als dreifache in $A$ zweipunktig und wo anders dreipunktig berührende Tangente, und auch als Verbindungsstrahl von $A$ mit dem andern Berührungspunkte einer in $A$ berührenden Doppeltangentialebene aufgefasst werden muss.

Wir schliessen jetzt aus den Systemen b$\beta$), b$\gamma$), b$\delta$), b$\varepsilon$), b$\zeta$), d$\gamma$), d$\delta$), d$\varepsilon$), d$\zeta$), d$\eta$) nach einander die hier folgenden Zahlen 59) bis 68), welche so angeben sind, dass daraus zugleich ersichtlich ist, wie dieselben auch durch das Hülfsmittel I. aus den Zahlen $a_4$ und $b_3$ einerseits und den Zahlen 22), 24), 28), 30), 31) andererseits abgeleitet werden können.

59) *Die in den Berührungspunkten der vierpunktigen Tangenten nur dreipunktig berührenden Tangenten bilden eine Regelfläche vom Grade*

$$g_a = n(3n-4)(11n-24) - a, \text{ und}$$

60) *ihre einfachen Schnittpunkte eine Curve von der Ordnung*

$$d_a = n(3n^2-4n-6)(11n-24) - a_1 - a_4.$$

61) *Die Doppeltangenten, welche in der Curve vierpunktiger Berührung berühren, aber nicht vierpunktige Tangenten sind, bilden eine Regelfläche vom Grade:*

$$h_a = n(n-3)(n^2+2n-4)(11n-24) - a, \text{ und}$$

62) *ihre zweiten Berührungspunkte eine Curve von der Ordnung*

$$f_a = n(n^3-2n^2+2n-6)(11n-24) - a_4, \text{ und}$$

63) *ihre einfachen Schnittpunkte eine Curve von der Ordnung*

$$e_a = n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)(11n-24) - a_1.$$

64) *Die in den Stellen dreipunktiger Berührung der drei-zweipunktigen Tangenten berührenden, nicht mit diesen identischen Hauptangenten bilden eine Regelfläche vom Grade:*

$$g_b = n(3n-4)(n-4)(3n^2+5n-24) - b, \text{ und}$$

65) *ihre einfachen Schnittpunkte eine Curve von der Ordnung*

$$d_b = n(3n^2-4n-6)(n-4)(3n^2+5n-24) - b_1 - 2b_2.$$

66) *Die in den Stellen dreipunktiger Berührung der drei-zweipunktigen Tangenten berührenden, nicht mit diesen identischen Doppeltangenten bilden eine Regelfläche vom Grade:*

$$h_b = n(n-3)(n^2+2n-4)(n-4)(3n^2+5n-24)-b, \text{ und}$$

67) *ihre zweiten Berührungspunkte eine Curve von der Ordnung:*

$$f_b = n(n^3-2n^2+2n-6)(n-4)(3n^2+5n-24)-b_2, \text{ und}$$

68) *ihre einfachen Schnittpunkte eine Curve von der Ordnung:*

$$e_b = n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)(n-4)(3n^2+5n-24)-b_1-b_3.$$

Für die eben berechneten Zahlen $g_a$, $d_a$, $g_b$, $d_b$ erhält man Bestätigungen aus den Systemen $k\beta)$, $k\gamma)$, $m\gamma)$, $m\delta)$, $p\alpha)$, $p\beta)$. Man findet nämlich die Zahl der Coincidenzen in diesen Systemen bezüglich gleich

$$a+g_a, \quad a_1+a_4+d_a, \quad b+g_b, \quad b_1+2b_2+d_b, \quad 2g_a+g_b, \quad 2d_a+d_b.$$

Aus den Systemen $f\beta)$, $f\gamma)$, $f\delta)$ findet man endlich die folgenden Zahlen, welche auch durch das Hülfsmittel I. sehr leicht gewonnen werden können.

69) *Die in parabolischen Punkten berührenden Doppeltangenten bilden eine Regelfläche vom Grade:*

$$h_\pi = 4n(n-2)(n-3)(n^2+2n-4), \text{ und}$$

70) *ihre sonstigen Berührungspunkte eine Curve von der Ordnung:*

$$f_\pi = 4n(n-2)(n^3-2n^2+2n-6), \text{ und}$$

71) *ihre einfachen Schnittpunkte eine Curve von der Ordnung:*

$$e_\pi = 4n(n-2)(n-4)(n^3+n^2-4n-6).$$

Viele der eben gefundenen Zahlen erscheinen auch durch das Hülfsmittel II. von einander abhängig, und bestätigen sich also einander. Es sind dies folgende Gruppen:

$a$ mit $a_4$ und $a_1$,
$b$ mit $b_3$, $b_2$, $b_1$,
$\pi$ mit $\pi_3$ und $\pi_1$,
$g_a$ mit $a_4$ und $d_a$,
$g_b$ mit $b_3$ und $d_b$,
$h_a$ mit $a_4$, $f_a$, $e_a$,
$h_b$ mit $b_3$, $f_b$, $e_b$,
$h_\pi$ mit $\pi_3$, $f_\pi$, $e_\pi$.

Der Vollständigkeit wegen fügen wir noch hinzu, dass wir $c_1$ aus $c$ und $c_2$ durch das nämliche Hülfsmittel erhalten, nämlich:

$$c_1 = n \cdot c - 2c_2,$$

also:

72) *Die einfachen Schnittpunkte der dreifachen Tangenten bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$c_1 = \tfrac{1}{3}n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+3n^2-2n-12).$$

## § 6.

### Die Zahlen für die in endlicher Anzahl vorhandenen singulären Stellen der $F_n$.

Aus den im vorigen Paragraphen abgeleiteten Zahlen:

$a(43)^*)$, $a_4(44)$, $a_1(45)$, $g_a(59)$, $d_a(60)$, $h_a(61)$, $f_a(62)$, $e_a(63)$;

$b(46)$, $b_2(47)$, $b_3(48)$, $b_1(49)$, $g_b(64)$, $d_b(65)$, $h_b(66)$, $f_b(67)$, $e_b(68)$;

$c(50)$, $c_2(51)$, $c_1(72)$;

$\varkappa(54)$, $\varkappa_3(52$ und $53)$, $\varkappa_1(55)$, $h_\varkappa(69)$, $f_\varkappa(70)$, $e_\varkappa(71)$;

$\tau(56)$, $\tau_2(57)$, $\tau_1(58)$;

berechnen wir jetzt vermittelst der Correspondenzformeln erster Dimension IIIa), IIIb), IIIb') 11 Zahlen, von denen jede angiebt, wie viel Stellen von einer gewissen Singularität auf einer $F_n$ vorhanden sind. Während also die oben berechneten Zahlen auf solche singuläre Stellen Bezug nahmen, die auf einer $F_n$ in *unendlicher* Mannigfaltigkeit existiren, kommen wir hier zu 11 Zahlen, welche sich auf singuläre Stellen der $F_n$ beziehen, die nur in *endlicher* Mannigfaltigkeit vorhanden sein können. Diese 11 Zahlen folgen hier aus den Coincidenzzahlen von 31 einstufigen Systemen, die durch Punktepaare, Strahlenpaare und ein Ebenenpaar erzeugt werden. Daher ist es möglich, nicht blos viele Bestätigungen zu erhalten, sondern auch einige Male zweifelhafte Coefficienten a posteriori zu bestimmen. Um die Uebersicht zu erleichtern, geben wir hier *zuerst die Werthe der* 11 *Zahlen* mit den ihnen verliehenen Zeichen an, und besprechen *dann erst die* 31 *Systeme*, aus denen sie hervorgehen.

73) *Die Zahl der fünfpunktigen berührenden Tangenten ist:*

$$\beta = 5n(n-4)(7n-12)^{**}).$$

74) *Die Zahl der an einer Stelle vierpunktig, an einer andern zweipunktig berührenden Tangenten ist:*

$$\gamma = 2n(n-4)(n-5)(n+6)(3n-5).$$

75) *Die Zahl der an zwei Stellen dreipunktig berührenden Tangenten ist:*

$$\delta = \tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n^3+3n^2+29n-60).$$

---

*) Die jedem Zeichen in Klammer nachgestellte Nummer ist diejenige, welche im vorigen Paragraphen vor die durch dieses Zeichen dargestellte Zahl gesetzt ist, so dass jetzt jede Zahl dort leicht zu finden ist.

**) Die Zahlen $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$ habe ich schon in den Gött. Nachr. (Febr. 1876) und in den Math. Annalen (Bd. X, pag. 98) auf demselben Wege wie hier bestimmt.

76) *Die Zahl der an einer Stelle dreipunktig und an zwei Stellen zweipunktig berührenden Tangenten ist:*

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+9n^2+20n-60).$$

77) *Die Zahlen der an vier Stellen zweipunktig berührenden Tangenten ist:*

$$\xi = \tfrac{1}{12}n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n^3+6n^2+7n-30).$$

78) *Die Zahl der in parabolischen Punkten vierpunktig berührenden Tangenten ist:*

$$(a\pi) = 2n(n-2)(11n-24).$$

79) *Die Zahl der in parabolischen Punkten dreipunktig und noch anderswo berührenden Tangenten ist:*

$$(b\pi) = 2n(n-2)(n-4)(3n^2+5n-24).$$

80) *Die Zahl der an einer Stelle dreipunktig, an einer andern zweipunktig berührenden Tangenten, bei denen die Tangentialebenen der beiden Berührungspunkte zusammenfallen, oder,* was dasselbe ist, *die Zahl der Doppeltangentialebenen, bei denen der Verbindungsstrahl der beiden Berührungspunkte in einem dieser Berührungspunkte dreipunktig berührt ist:*

$$(b\tau) = n(n-2)(n-4)(n^3+3n^2+13n-48).$$

81) *Die Zahl derjenigen Punkte, in denen die beiden Haupttangenten vierpunktig berühren, ohne zusammenzufallen, ist**)*:*

$$(aa) = 5n(7n^2-28n+30).$$

82) *Die Zahl der Punkte, in denen die eine Haupttangente vierpunktig berührt, die andere nur dreipunktig aber noch anderswo zweipunktig berührt, ist:*

$$(ab) = n(n-4)(27n^3-13n^2-264n+396).$$

83) *Die Zahl derjenigen Punkte, in welchen nicht zusammenfallende Haupttangenten berühren, von denen jede noch anderswo berührt, ist:*

$$(bb) = n(n-4)(4n^5-4n^4-95n^3+99n^2+544n-840).$$

Wir haben jetzt die 31 Formeln anzugeben, aus welchen die eben zusammengestellten 11 Zahlen folgen. Da aus den in diesen Formeln vorkommenden Zeichen zugleich die Punktepaar-, Strahlenpaar- oder Ebenenpaarsysteme ersichtlich sind, welche diese Formeln hervorrufen, so werden wir uns meist auf die *blosse Angabe der Formeln* beschränken können.

Die Zahl $\beta$ folgt aus:

$$a_4(n-4) + a_1 - a(n-4) = \beta,$$

und aus:

$$b_3 + b_2 - b = \beta.$$

*) Cf. § 7.

Die Zahl $\gamma$ folgt aus:

$$2a_1(n-5) - a(n-4)(n-5) = \gamma,$$

und aus:

$$b_3(n-5) + b_1 - b(n-5) = \gamma,$$

und aus:

$$4c_2 - 6c = \gamma.$$

Die Zahl $\delta$ folgt aus:

$$b_2(n-5) + b_1 - b(n-5) = 2\delta.$$

Die Zahl $\varepsilon$ folgt aus:

$$2b_1(n-6) - b(n-5)(n-6) = 2\varepsilon,$$

und aus:

$$c_2(n-6) + 3c_1 - 3c(n-6) = \varepsilon.$$

Die Zahl $\zeta$ folgt aus:

$$2c_1(n-7) - c(n-6)(n-7) = 4 \cdot \zeta.$$

Um die Zahlen $(a\pi)$ und $(b\pi)$ zu finden, wenden wir die Punktepaarformel erster Dimension auf das einstufige System derjenigen Punktepaare an, deren jedes auf einer parabolischen Tangente entweder durch den Berührungspunkt und einen der $n-3$ einfachen Schnittpunkte, oder durch zwei einfache Schnittpunkte erzeugt wird. Wir erhalten so:

$$\pi_3(n-3) + \pi_1 - \pi(n-3) = (a\pi),$$
$$2\pi_1(n-4) - \pi(n-3)(n-4) = (b\pi).$$

Um die Zahl $(b\tau)$ zu finden, betrachten wir ebenso das Punktepaar, welches auf dem Verbindungsstrahle der Berührungspunkte einer Doppeltangentialebene durch einen der beiden Berührungspunkte und einen der $n-4$ einfachen Schnittpunkte gebildet wird. Dann bekommen wir nämlich:

$$\tau_2(n-4) + 2\tau_1 - 2\tau(n-4) = (b\tau).$$

Zur Bestimmung der Zahl $(aa)$ betrachten wir das Punktepaar, welches durch einen Punkt der Curve vierpunktiger Berührung und einen derjenigen $n-3$ einfachen Schnittpunkte erzeugt wird, die auf der in jenem Punkte nur dreipunktig berührenden Haupttangente liegen. Solcher Punktepaare existiren auf der $F_n$ $\infty^1$. Auf das von ihnen gebildete einstufige System wenden wir die Punktepaarformel erster Dimension an. Dadurch erhalten wir:

$$a_4(n-3) + d_a - g_a(n-3) = 2 \cdot (aa) + (a\pi).$$

Hinsichtlich der rechten Seite dieser Formel bemerken wir, dass jede Stelle einer $F_n$, wo *zwei* getrennt liegende Haupttangenten vierpunktig berühren, auch *zwei* Coincidenzen des eben betrachteten Punktepaars aufweist, und ausserdem noch jede Stelle der parabolischen Curve einer $F_n$, wo die Haupttangente vierpunktig berührt, eine Coincidenz dieses Punktepaars liefert.

Wir behandeln analog dasjenige Punktepaar, welches durch 2 einfache Schnittpunkte einer Haupttangente erzeugt wird, die auf der Curve vierpunktiger Berührung dreipunktig berührt. Dann kommt:

$$2 \cdot d_a \cdot (n-4) - g_a (n-3)(n-4) = (ab).$$

Um endlich auch die Zahl $(bb)$ zu bestimmen, behandele man ebenso das Punktepaar, welches von zwei einfachen Schnittpunkten einer Haupttangente gebildet wird, in deren Berührungspunkte eine von ihr verschiedene drei-zweipunktige Tangente dreipunktig berührt. Dann erhält man:

$$2d_b (n-4) - g_b (n-3)(n-4) = 2(bb) + (\pi b).$$

Hinsichtlich der Coincidenzen ist dasselbe, wie oben bei der Bestimmung von $(aa)$ zu bemerken.

Da die bis jetzt aufgestellten Formeln ausreichen, um die oben angegebenen 11 Zahlen abzuleiten, so erhalten wir durch *Betrachtung noch weiterer Systeme Bestätigungen oder Bestimmungen von etwa zweifelhaften Coefficienten.* Wir beschränken uns von jetzt an auf die Angabe der Formeln und der etwaigen daraus zu ziehenden Schlüsse.

$$\pi_3(n^2-n-6)^*) + f_\pi - h_\pi = 2 \cdot (a\pi),$$
$$\pi_3(n^2-n-6)(n-4) + e_\pi - h_\pi (n-4) = 2 \cdot (b\pi),$$
$$\pi (n^2-n-6) + h_\pi - \pi_3(n^2-n-6) - (n-1) \cdot \pi_3(n^2-n-6) = 2 \cdot (a\pi) + (b\pi).$$
$$2\tau_2 - 2\tau = (a\pi),$$

Die Behandlung des Ebenenpaares, erzeugt durch die beiden Tangentialebenen in den Berührungspunkten einer drei-zweipunktigen Tangente, ergiebt:

$$b_3(n-1) + b_2(n-1) - b = (b\tau) + \beta.$$

Man beachte, dass auch die Tangentialebene einer fünfpunktigen Tangente als eine Ebene zu betrachten ist, in welcher die beiden Tangentialebenen einer drei-zweipunktigen Tangente zusammenfallen.

Wir erhalten weiter aus den *auf vierpunktige Tangenten* bezüglichen Systemen:

$$a + g_a - a_4 - (n-1) \cdot a_4 = (a\pi),$$
$$a_4(n^2-n-7) + f_a - h_a = 2 \cdot (aa) + (a\pi) + \beta,$$
$$a_4(n^2-n-7)(n-4) + e_a - h_a(n-4) = (ab) + \beta + \gamma,$$
$$a (n^2-n-7) + h_a - a_4(n^2-n-7) - (n-1) a_4 (n^2-n-7) = (a\pi) + 3\beta + \gamma,$$
$$g_a(n^2-n-7) + h'_a - a_4(n^2-n-7) - (n-1) a_4 (n^2-n-7) = 4 \cdot (aa) + (ab) + (\pi a).$$

*) Diese Zahl bedeutet in dieser und den andern Formeln immer die Zahl der in einem Punkte der $F_n$ berührenden Doppeltangenten (Formel 17).

Aus diesen Formeln, deren Glieder zum Theil a posteriori bestimmt sind, kann man Folgendes ersehen:

*Unter den $n^2-n-6$ Doppeltangenten, welche in einem Punkte einer $F_n$ berühren, ist eine dort berührende vierpunktige Tangente als eine Doppeltangente mitzuzählen.*

*Im Berührungspunkte einer fünfpunktigen Tangente coincidirt der Berührungspunkt einer vierpunktigen Tangente sowohl mit dem zweiten Berührungspunkt einer der dort berührenden $n^2-n-7$ sonstigen Doppeltangenten, wie auch mit einem einfachen Schnittpunkte der letztgenannten Doppeltangenten.*

*In einer fünfpunktigen Tangente coincidirt dreimal eine vierpunktige Tangente mit einer der in ihrem Berührungspunkte berühenden $n^2-n-7$ sonstigen Doppeltangenten.*

*In einer vier-zweipunktigen Tangente coincidirt einmal eine vierpunktige Tangente mit einer der in ihrem Berührungspunkte berührenden $n^2-n-7$ sonstigen Doppeltangenten.*

Aus den Systemen, welche *auf die drei-zweipunktigen Tangenten* Bezug nehmen, ergeben sich folgende Formeln:

$$b_3(n-3)+d_b-g_b(n-3)=(ab),$$
$$b+g_b-b_3-(n-1)b_3=(b\pi),$$
$$b_3(n^2-n-7)+f_b-h_b=(ab)+\gamma+2\beta,$$
$$b_3(n^2-n-7)(n-4)+e_b-h_b(n-4)=2\cdot(bb)+\beta+6\delta+2\varepsilon+(b\tau),$$
$$b(n^2-n-7)+h_b-b_3(n^2-n-7)-(n-1)b_3(n^2-n-7)=3\beta+2\gamma+6\delta+2\varepsilon+(b\tau),$$
$$g_b(n^2-n-7)+h_b-b_3(n^2-n-7)-(n-1)b_3(n^2-n-7)=2(ab)+2(bb).$$

Von den Schlüssen, die sich aus diesen Formeln ziehen lassen, erwähnen wir nur folgende:

*In jedem Punkte einer $F_n$, wo eine drei-zweipunktige Tangente dreipunktig berührt, berühren noch $n^2-n-7$ sonstige Doppeltangenten.*

*In einer an zwei Stellen dreipunktig berührenden Tangente coincidirt 6mal eine drei-zweipunktige Tangente mit einer der $n^2-n-7$ in ihrem mehrfachen Berührungspunkt sonst noch berührenden Doppeltangenten.*

Weitere Bestätigungen erhält man durch die Bestimmung der gemeinsamen Punkte je zweier der drei durch die Zeichen

$$\pi_3,\quad a_4,\quad b_3$$

angedeuteten Curven. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{n}\cdot\pi_3\cdot a_4=2\cdot(a\pi),$$

$$\frac{1}{n} \cdot \pi_3 \cdot b_3 = 2 \cdot (b\pi),$$

$$\frac{1}{n} \cdot a_4 \cdot b_3 = (ab) + 2\beta + \gamma,$$

oder in Worten:

*Die Curve vierpunktiger Berührung trifft die parabolische Curve, und zwar immer zweipunktig in denjenigen parabolischen Punkten der $F_n$, welche vierpunktige Haupttangenten besitzen.* (Salmon-Fiedler, Artikel 457.)

*Ebenso berühren sich die parabolische Curve und die Curve der mehrfachen Berührungspunkte der drei-zweipunktigen Tangenten überall, wo sie sich treffen, und zwar in denjenigen parabolischen Punkten, deren Haupttangenten noch anderswo berühren.*

*Die Curve vierpunktiger Berührung berührt die Curve der mehrfachen Berührungspunkte der drei-zweipunktigen Tangenten in den Berührungspunkten der fünfpunktigen Tangenten, und schneidet sie einfach:*

*erstens in dem mehrfachen Berührungspunkte jeder vier-zweipunktigen Tangente,*

*zweitens in denjenigen Punkten der $F_n$, welche zwei Haupttangenten besitzen, von denen die eine dort vierpunktig berührt, die andere dort dreipunktig und anderswo zweipunktig berührt.*

## § 7.

### Die von Clebsch in Crelle's Journal Bd. 63 bestimmte Zahl.

Es ist schon in der Einleitung darauf aufmerksam gemacht, dass das Resultat

$$n(41n^2 - 162n + 162),$$

welches Clebsch in Crelle's Journal Bd. 63 (cf. auch Salmon-Fiedler, Art. 463) für unsere Zahl $(aa)$ erhält, mit dem von uns oben auf verschiedenen Wegen bestimmten Resultate:

$$(aa) = 5n(7n^2 - 28n + 30)$$

in *Widerspruch* steht. Deshalb wird es zweckmässig sein, eine möglichst einfache Ableitung dieser Zahl aus den voranstehenden Entwickelungen herauszuschälen, und, wenn möglich, diese Ableitung so einzurichten, dass daraus das Versehen, welches Clebsch bei seiner Herleitung macht, sofort erkannt werden kann. Diesen Zweck erfüllt die folgende Ableitung, bei der nur die *Ordnung der Curve vierpunktiger Berührung*

$$a_4 = n(11n - 24), \quad \text{(Salmon-Fiedler, Art. 447)},$$

*der Grad der Regelfläche der vierpunktigen Tangenten:*

$$a = 2n(n-3)(3n-2), \quad \text{(Salmon-Fiedler, Art. 458)}$$

und die *Ordnung der Curve der Berührungspunkte aller eine gegebene Gerade g schneidenden Haupttangenten*

$$n(3n-4), \quad \text{(Art. 438, II)}$$

als *bekannt* vorausgesetzt wird, und bei der nur das Chasles'sche Correspondenzprincip *in seiner ursprünglichen Form* zur Anwendung kommt.

Die Curve der Berührungspunkte der eine gegebene Gerade $g$ schneidenden Haupttangenten schneidet die Curve vierpunktiger Berührung in

$$(3n-4)\cdot a_4$$

Punkten. Unter diesen Punkten befinden sich die Berührungspunkte der die gegebene Gerade $g$ schneidenden vierpunktigen Tangenten. In allen übrigen Punkten berührt die eine Haupttangente vierpunktig, und die *andere* schneidet die gegebene Gerade $g$. Durch die Gerade $g$ gehen also

$$g_a = (3n-4)\cdot a_4 - a$$

Haupttangenten, welche mit einer vierpunktigen Tangente ein und denselben Berührungspunkt haben. Folglich giebt es nach dem Chasles'schen Correspondenzprincip in einem Strahlbüschel

$$a + g_a = (3n-4)\cdot a_4$$

Strahlen, deren jeder sowohl eine vierpunktige Tangente, wie auch die mit ihr denselben Berührungspunkt besitzende Haupttangente schneidet. Unter diesen Strahlen des Strahlbüschels befinden sich diejenigen, welche nach den $a_4$ Punkten gehen, in denen die Curve vierpunktiger Berührung die Ebene des Strahlbüschels schneidet, ferner auch diejenigen, welche in den durch den Scheitel des Strahlbüschels gehenden $(n-1)\cdot a_4$ Ebenen liegen, deren jede Tangentialebene einer vierpunktigen Tangente ist. Es bleiben also noch

$$(3n-4)\cdot a_4 - a_4 - (n-1)\cdot a_4 = 2(n-2)\cdot a_4$$

Strahlen übrig, welche auch die oben genannte Eigenschaft besitzen. Es müssen dies diejenigen sein, welche solche Tangenten schneiden, die in *parabolischen* Punkten vierpunktig berühren. Folglich besitzt die $F_n$

$$(a\pi) = 2(n-2)\cdot a_4$$

Punkte, in denen *zusammenfallende Haupttangenten vierpunktig* berühren, was auch in Salmon-Fiedler's Werk, Artikel 457, pag. 574 ausgesprochen ist.

Wir bestimmen jetzt die Ordnung $a_1$ der Curve der einfachen Schnittpunkte der Haupttangenten, welche mit vierpunktigen Tangenten denselben Berührungspunkt haben. Schon oben ist der Grad

$$g_a = (3n-4)\,a_4 - a$$

der Regelfläche der Haupttangenten bestimmt, welche mit vierpunktigen Tangenten denselben Berührungspunkt haben. Diese Regelfläche schneidet $F_n$ in einer Curve von der Ordnung

$$n \cdot g_a,$$

d. h. eine Ebene besitzt $n \cdot g_a$ der $F_n$ und jener Regelfläche angehörige Punkte. Unter diesen befindet sich *dreimal* jeder Punkt der Ebene, in dem eine vierpunktige Tangente berührt. Die übrigen

$$a_1 = n \cdot g_a - 3a_4$$

Punkte geben die *Ordnung der gesuchten Curve.*

Nun giebt es nach dem Correspondenzprincip in einem Ebenenbüschel

$$a_1 + a_4(n-3) = ng_a - 3a_4 + a_4(n-3) = ng_a + a_4(n-6)$$

Ebenen, deren jede von einer Haupttangente, die mit einer vierpunktigen Tangente denselben Berührungspunkt hat, sowohl diesen Berührungspunkt, wie auch einen der $n-3$ einfachen Schnittpunkte enthält. Unter diesen Ebenen des Ebenenbüschels befindet sich auch jede Ebene $(n-3)$mal, welche eine solche Haupttangente ganz enthält. Folglich bleiben im Ebenenbüschel noch

$$\begin{aligned} ng_a + a_4(n-6) - g_a(n-3) &= a_4(n-6) + 3g_a \\ &= a_4(n-6) + 3(3n-4)a_4 - 3a \\ &= a_4(10n-18) - 3a \end{aligned}$$

Ebenen von der geforderten Eigenschaft übrig. Unter diesen übrigbleibenden Ebenen befinden sich erstens diejenigen, welche nach den oben abgezählten

$$(a\pi) = 2(n-2) \cdot a_4$$

Punkten gehen, in denen *zusammenfallende* Haupttangenten vierpunktig berühren, zweitens gehört zu jenen übrigbleibenden Ebenen *zweimal* jede Ebene, welche nach einem der gesuchten $(aa)$ Punkte gehen, in denen *die beiden Haupttangenten, getrennt liegend, vierpunktig berühren.* Folglich bestimmt sich die gesuchte Zahl $(aa)$ dieser Punkte aus der Gleichung:

$$a_4(10n-18) - 3a - 2(n-2) \cdot a_4 = 2 \cdot (aa)$$

oder:

$$a_4(8n-14) - 3a = 2 \cdot (aa).$$

Vergleicht man diese Formel mit derjenigen, auf welche Clebsch bei seiner algebraischen Herleitung geführt ist, und welche (Salmon-Fiedler, Art. 463, pag. 579 unten) in unserer Terminologie lautet:

$$2 \cdot (aa) + a = a_4(8n-14),$$

so sieht man, dass Clebsch die Multiplicität „3" *des Grades der Regelfläche der vierpunktigen Tangenten vernachlässigt* hat. Dieser vernach-

lässigte Coëfficient 3 dürfte sich bei der Herleitung von Clebsch leicht rechtfertigen lassen. Nach Substitution der bekannten Werthe von $a_4$ und von $a$ erhält man für $(aa)$:

$$(aa) = 5n(7n^2 - 28n + 30),$$

also einen Werth, der um den Grad $a$ der Regelfläche der vierpunktigen Tangenten kleiner ist, als der von Clebsch gegebene. Hierin liegt der Grund, warum die Anwendung der *unrichtigen* Formel auf die Fläche dritter Ordnung $F_3$ doch das *richtige* Resultat:

$$(aa) = 135$$

geben musste. Die $F_3$ besitzt nämlich keine Regelfläche, sondern nur eine endliche Zahl von vierpunktigen Tangenten, die in ihr liegenden 27 Geraden. Also ist für sie $a = 0$.

# Die Zerlegung und Zusammensetzung der unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers als Hülfsmittel bei Aufstellung der dynamischen Differentialgleichungen.

Von

C. Neumann in Leipzig.

---

Die Vortheile, welche die Theorie der Zerlegung und Zusammensetzung der unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers bei Aufstellung der dynamischen Differentialgleichungen gewährt, dürften bisher wohl nicht gehörig untersucht, jedenfalls nicht systematisch entwickelt worden sein. Ich beabsichtige daher im Folgenden meine hieraufbezüglichen (aus den Jahren 1865—68 stammenden) Untersuchungen, über welche ich bereits früher eine kurze Mittheilung gemacht habe (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1869, S. 132 und diese Annalen Bd. III, S. 350), in sorgfältiger Weise darzulegen*).

Offenbar kommt es bei diesen Untersuchungen ziemlich auf dasselbe hinaus, ob man von den *unendlich kleinen Bewegungen* des betrachteten

---

*) Vielleicht dürfte es nicht ohne Interesse sein, die eigentliche Ursache, welche mich zu diesen Untersuchungen veranlasste, hier kurz anzudeuten.

Wollen wir die Axe eines in schneller Umdrehung begriffenen *Schwungrades* aus ihrer ursprünglichen Lage in irgend welche andere Lage versetzen, die gegen jene ursprüngliche unter irgend welchem Winkel geneigt ist, so bedarf es hierzu bekanntlich einer gewissen Anstrengung. Denken wir uns nun ein gewöhnliches unter dem Einfluss der Schwerkraft oscillirendes *Pendel*, und nehmen wir an, der pendelnde Körper besässe in seinem Innern einen Hohlraum, und im Innern dieses Hohlraumes befände sich ein *Schwungrad*, dessen Axe auf beiden Seiten in die Wände des Hohlraumes eingelassen, und gegen die Pendelaxe unter irgend welchem Winkel geneigt ist; — alsdann wird offenbar das Pendel bei seinen Hin- und Herschwingungen gegen jenes Schwungrad (welches die Richtung seiner Axe constant zu erhalten bestrebt ist) fortdauernd anzukämpfen haben, und folglich — — *mehr und mehr sich verlangsamen*.

Ein näheres Eingehen auf diese Vorgänge führte mich zu den vorliegenden Untersuchungen, wobei sich übrigens ergab, dass in dem eben genannten Beispiel *keine* Verlangsamung eintreten kann (falls man nämlich von Reibung und Luftwiderstand abstrahirt); vergl. den § 8. dieses Aufsatzes.

starren Körpers, oder ob man von den entsprechenden *Geschwindigkeiten* resp. *Geschwindigkeitszuständen* spricht. Der Bequemlichkeit willen mag es mir gestattet sein, mich der *letztern* Ausdrucksweise zu bedienen.

## § 1.

### Der Geschwindigkeitszustand eines beliebigen Punktsystems.

Der augenblickliche Geschwindigkeitszustand eines gegebenen Punktsystems $m$, $m'$, $m''$, $\cdots$ kann geometrisch dargestellt werden durch ein System von Linien $ma$, $m'a'$, $m''a''$, $\cdots$, welche ihrer Länge und Richtung nach die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte ausdrücken. Zerlegen wir die Geschwindigkeit $ma$ durch irgend ein Parallelogramm in zwei Seitengeschwindigkeiten $m\alpha$, $m\beta$, und zerlegen wir ebenso die Geschwindigkeiten $m'a'$, $m''a''$, $\cdots$ resp. in die Seitengeschwindigkeiten $m'\alpha'$, $m'\beta'$, $m''\alpha''$, $m''\beta''$, $\cdots$, wobei die angewandten Parallelogramme von einander unabhängig, überhaupt *ganz beliebig* sein können; — so wird durch diese Construction der ursprünglich gegebene Geschwindigkeitszustand $ma$, $m'a'$, $m''a''$, $\cdots$ in zwei andere Zustände *zerlegt* sein, von denen der eine durch die Linien $m\alpha$, $m'\alpha'$, $m''\alpha''$, $\cdots$, der andere durch die Linien $m\beta$, $m'\beta'$, $m''\beta''$, $\cdots$ angedeutet ist. Oder wir werden auch umgekehrt sagen können: der erste Zustand sei aus den beiden andern *zusammengesetzt*.

Allgemein nennen wir einen Zustand $(a)$ aus irgend welchen andern Zuständen $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $\cdots$ $(\xi)$ *zusammengesetzt*, wenn beim Zustand $(a)$ die Geschwindigkeit eines jeden Massenpunktes geometrisch zusammengestzt ist aus denjenigen Geschwindigkeiten, welche dieser Punkt in den Zuständen $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $\cdots$ $(\xi)$ besitzt.

Oder (was auf dasselbe hinauskommt): Wir nennen einen Zustand $(a)$ aus irgend welchen andern Zuständen $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $\cdots$ $(\xi)$ *zusammengesetzt*, wenn beim Zustande $(a)$ die rechwinkligen Geschwindigkeitscomponenten eines jeden Punktes aus den analogen Geschwindigkeitscomponenten dieses Punktes in den Zuständen $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $\cdots$ $(\xi)$ durch *Addition* sich ergeben.

## § 2.

### Der Geschwindigkeitszustand eines starren Körpers, und die Andeutung dieses Zustandes durch gewisse Charakteristiken.

Die geometrische Darstellung eines gegebenen Geschwindigkeitszustandes ist einer bedeutenden Vereinfachung fähig, sobald wir übergehen zu dem speciellen Fall eines *starren* Punktsystems, d. i. zur Betrachtung eines sogenannten *starren Körpers*.

Befindet sich dieser Körper z. B. in einer *translatorischen* Bewegung, so sind die Geschwindigkeiten $ma$, $m'a'$, $m''a''$, $\cdots$ seiner

einzelnen Massenpunkte $m$, $m'$, $m''$, $\cdots$ sämmtlich von *gleicher Richtung und Grösse*, also darstellbar durch eine einzige Linie $L$. Diese Linie $L$, welche die gemeinschaftliche Richtung und Länge von $ma$, $m'a'$, $m''a''$, $\cdots$ ausdrückt, mag die *Charakteristik* des betrachteten translatorischen Geschwindigkeitszustandes heissen. Eine solche *translatorische Charakteristik* besitzt offenbar keinen bestimmten Ausgangspunkt, sondern kann (unbeschadet ihrer Bedeutung) sich selber parallel beliebig verlegt werden.

Befindet sich andrerseits der Körper in einer *rotirenden* Bewegung, so wird man als *Charakteristik* seines augenblicklichen Geschwindigkeitszustandes eine in der Drehungsaxe liegende Linie $\Lambda$ anwenden können, deren Länge die Grösse der Winkelgeschwindigkeit ausdrückt, und deren Richtung positiv ist zur Umlaufsbewegung des Körpers*). Eine solche *rotatorische Charakteristik* kann offenbar (unbeschadet ihrer Bedeutung) in ihrer eignen Linie beliebig verschoben werden; während parallele Verlegungen anderer Art *un*statthaft sind.

Befindet sich endlich der Körper in einer ganz *beliebig gegebenen* Bewegung, so ist bekanntlich sein augenblicklicher Geschwindigkeitszustand stets zerlegbar in zwei andere Zustände, einen translatorischen und einen rotatorischen, mithin darstellbar durch das *Nebeneinander* (Ensemble)

$$L, \Lambda$$

derjenigen beiden Charakteristiken, welche den beiden letztern Zuständen einzeln entsprechen. So bekannt diese Dinge auch sein mögen, so wird dennoch ein näheres Eingehen auf die betreffenden Formeln für unsere weiteren Zwecke nicht gut entbehrlich sein.

Zuvor sei indessen noch bemerkt, dass wir ganz allgemein einen Zustand, der aus irgend welchen andern Zuständen $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $\cdots$ $(\xi)$ zusammengesetzt ist, durch *Nebeneinanderstellung* all' derjenigen Charakteristiken andeuten werden, welche diesen Zuständen $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $\cdots$ $(\xi)$ einzeln entsprechen.

Es sei $\pi$ irgend ein bestimmter Punkt im Innern des gegebeneu Körpers, und (1, 2, 3) ein von $\pi$ ausgehendes, mit dem Körper fest verbundenes rechtwinkliges Axensystem. Ferner sei $(x, y, z)$ ein im

*) Ich nenne jene Richtung zur Umlaufsbewegung positiv, wenn sie zu derselben ebenso liegt, wie beim zu Grunde gelegten Coordinatensystem die $z$ Axe zur $xy$ Richtung. — Der Name: $xy$ Richtung bedarf wohl kaum der Erläuterung. Denkt man sich nämlich um den Anfangspunkt des Coordinatensystems in der $xy$ Ebene eine Kreisperipherie beschrieben und längs dieser Peripherie einen Punkt in Bewegung, welcher, von der positiven $x$ Axe ausgehend, nach Durchlaufung von 90° zur positiven $y$ Axe gelangt, so soll die in solcher Weise definirte Bewegungsrichtung kurzweg die $xy$ Richtung genannt werden.

Raume gegebenes, *absolut unbewegliches* Axensystem. Bezeichnen wir die Coordinaten, welche irgend ein Massenpunkt $m$ des Körpers in diesen beiden Axensystemen besitzt, respective mit $h_1$, $h_2$, $h_3$ und $x$, $y$, $z$, so ist

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3, \\ y &= \beta + \beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 + \beta_3 h_3, \\ z &= \gamma + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3, \end{aligned} \tag{1}$$

wo die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ Functionen der Zeit, $h_1$, $h_2$, $h_3$ hingegen unveränderlich sind. Und zwar sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Coordinaten des Punktes $\pi$ im Axensysteme $(x, y, z)$, während $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ gewisse Richtungscosinus repräsentiren, welche den Formeln entsprechen:

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad && \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0, \\ &\text{etc. etc.} && \text{etc. etc.} \\ &\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, && \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0, \\ &\text{etc. etc.} && \text{etc. etc.} \end{aligned} \tag{2}$$

Im Anschluss an diese Formeln mögen die Abkürzungen eingeführt werden:

$$\begin{aligned} A &= \alpha', \quad \mathsf{A} = (\beta_1\gamma_1' + \beta_2\gamma_2' + \beta_3\gamma_3') = -(\gamma_1\beta_1' + \gamma_2\beta_2' + \gamma_3\beta_3'), \\ B &= \beta', \quad \mathsf{B} = (\gamma_1\alpha_1' + \gamma_2\alpha_2' + \gamma_3\alpha_3') = -(\alpha_1\gamma_1' + \alpha_2\gamma_2' + \alpha_3\gamma_3'), \\ C &= \gamma', \quad \Gamma = (\alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' + \alpha_3\beta_3') = -(\beta_1\alpha_1' + \beta_2\alpha_2' + \beta_3\alpha_3'), \end{aligned} \tag{3}$$

wo die Accente Differentiationen nach der Zeit andeuten.

Für die rechtwinkligen Geschwindigkeitscomponenten $u = x'$, $v = y'$, $w = z'$ des Punktes $m(x, y, z)$ erhalten wir aus (1) die Formeln:

$$\begin{aligned} u &= \alpha' + \alpha_1' h_1 + \alpha_2' h_2 + \alpha_3' h_3, \\ v &= \beta' + \beta_1' h_1 + \beta_2' h_2 + \beta_3' h_3, \\ w &= \gamma' + \gamma_1' h_1 + \gamma_2' h_2 + \gamma_3' h_3; \end{aligned} \tag{4}$$

und diese Formeln nehmen, falls wir für $h_1$, $h_2$, $h_3$ die aus (1) entspringenden Werthe:

$$\begin{aligned} h_1 &= \alpha_1(x-\alpha) + \beta_1(y-\beta) + \gamma_1(z-\gamma), \\ h_2 &= \alpha_2(x-\alpha) + \beta_2(y-\beta) + \gamma_2(z-\gamma), \\ h_3 &= \alpha_3(x-\alpha) + \beta_3(y-\beta) + \gamma_3(z-\gamma) \end{aligned}$$

substituiren, mit Rücksicht auf (2), (3) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} u &= A + \mathsf{B}(z-\gamma) - \Gamma(y-\beta), \\ v &= B + \Gamma(x-\alpha) - \mathsf{A}(z-\gamma), \\ w &= C + \mathsf{A}(y-\beta) - \mathsf{B}(x-\alpha). \end{aligned} \tag{5}$$

Somit können wir setzen:

$$
\begin{aligned}
u &= u_1 + u_2, \\
v &= v_1 + v_2, \\
w &= w_1 + w_2,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

wo alsdann $u_1$, $v_1$, $w$, und $u_2$, $v_2$, $w_2$ die Bedeutung haben:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= A, & u_2 &= \mathsf{B}(z-\gamma) - \Gamma(y-\beta), \\
v_1 &= B, & v_2 &= \Gamma(x-\alpha) - \mathsf{A}(z-\gamma), \\
w_1 &= C, & w_2 &= \mathsf{A}(y-\beta) - \mathsf{B}(x-\alpha).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Der ursprünglich gegebene Geschwindigkeitszustand $(u, v, w)$ des Körpers ist durch die Formeln (6) in zwei andere Zustände $(u_1, v_1, w_1)$ und $(u_2, v_2, w_2)$ zerlegt. Von diesen beiden ist der erstere $(u_1, v_1, w_1)$, wie aus (7) ersichtlich, ein *translatorischer*, und ausgedrückt durch eine Charakteristik $L$ mit den rechtwinkligen Componenten $A$, $B$, $C$. Andererseits ist der Zustand $(u_2, v_2, w_2)$, wie ebenfalls aus (7) folgt, ein *rotatorischer**), ausgedrückt durch eine Charakteristik $\Lambda$ mit den

---

*) Denkt man sich nämlich vom Punkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ eine Linie $\Lambda$ auslaufend, deren rechtwinklige Componenten A, B, $\Gamma$ sind, und bezeichnet man den senkrechten Abstand des Punktes $x$, $y$, $z$ von dieser Linie $\Lambda$ mit $p$, so folgt aus den Formeln (7):

$$
\begin{aligned}
u_2(x-\alpha) + v_2(y-\beta) + w_2(z-\gamma) &= 0, \\
u_2\mathsf{A} \quad + v_2\mathsf{B} \quad + w_2\Gamma \quad &= 0, \\
u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 &= p^2\Lambda^2;
\end{aligned}
$$

und hieraus erkennen wir sofort,

(I.) dass der Geschwindigkeitszustand $(u_2, v_2, w_2)$ ein *rotatorischer* ist, dessen Axe mit der Linie $\Lambda$ zusammenfällt, und dessen Winkelgeschwindigkeit ebenso gross wie $\Lambda$ lang ist.

Um den *Sinn* dieser Rotationsbewegung zu ermitteln, notiren wir die ebenfalls aus (7) sich ergebende Gleichung:

$$
\begin{vmatrix}
u_2 & \mathsf{A} & x-\alpha \\
v_2 & \mathsf{B} & y-\beta \\
w_2 & \Gamma & z-\gamma
\end{vmatrix} = \text{pos.},
$$

welche offenbar auch so geschrieben werden kann:

$$
\begin{vmatrix}
x-\alpha & x+u_2dt-\alpha & \mathsf{A} \\
y-\beta & y+v_2dt-\beta & \mathsf{B} \\
z-\gamma & z+w_2dt-\gamma & \Gamma
\end{vmatrix} = \text{pos.},
$$

vorausgesetzt, dass wir unter $dt$ ein kleines Zeitelement, also eine kleine *positive* Grösse verstehen. Bezeichnen wir nun die vom Punkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nach den Punkten $x$, $y$, $z$ und $x+u_2dt$, $y+v_2dt$, $z+w_2dt$ laufenden Strahlen respective mit $R$ und $R'$, so folgt aus der letzten Formel nach einem bekannten Satze sofort, dass die Richtungen $R$, $R'$, $\Lambda$ ebenso zu einander liegen, wie die Axen $x$, $y$, $z$ des zu Grunde gelegten Coordinatensystems. Folglich wird auch

(II.) die Richtung $\Lambda$ zur Umlaufsbewegung des Körpers, d. i. zur $RR'$ Richtung ebenso liegen, wie die $z$ Axe zur $xy$ Richtung.

Aus (I.) und (II.) ergiebt sich nun aber sofort, dass jene von uns construirte

Componenten A, B, Γ und dem Ausgangspunkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ oder $\pi$. Der ursprünglich gegebene Geschwindigkeitszustand $u$, $v$, $w$ wird mithin anzudeuten sein durch Nebeneinanderstellung dieser beiden Charakteristiken, also anzudeuten sein durch das Symbol $L$, $\Lambda$.

Eine translatorische Charakteristik können wir schlechtweg durch einen einzigen Buchstaben, wie z. B. durch

$$L$$

bezeichnen. Hingegen wird es bei einer rotatorischen Charakteristik, wie z. B. $\Lambda$, zweckmässig sein, ihren Ausgangspunkt (dessen Lage durchaus nicht gleichgültig ist) als Index beizufügen, also zu schreiben

$$\Lambda_\pi, \text{ respective } \Lambda_{\alpha\beta\gamma}.$$

Solches bemerkt, können wir über die Resultate unserer Betrachtungen uns folgendermassen expliciren:

*Erster Satz. — Durch eine translatorische Charakteristik $L$ mit den rechtwinkligen Componenten $A$, $B$, $C$ wird ein Zustand des gegebenen Körpers angedeutet, bei welchem die Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ seiner einzelnen Punkte $x$, $y$, $z$ die Werthe haben:*

$$u = A,$$
$$v = B,$$
$$w = C.$$

*Zweiter Satz. — Durch eine rotatorische Charakterisik $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ mit den rechtwinkligen Componenten* A, B, Γ *wird ein Zustand angedeutet, bei welchem die Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ der einzelnen Punkte $x$, $y$, $z$ des Körpers die Werthe haben:*

$$u = \mathrm{B}(z-\gamma) - \Gamma(y-\beta),$$
$$v = \Gamma(x-\alpha) - \mathrm{A}(z-\gamma),$$
$$w = \mathrm{A}(y-\beta) - \mathrm{B}(x-\alpha),$$

*Dritter Satz. — Wie beschaffen der Geschwindigkeitszustand eines starren Körpers auch sein mag, immer wird derselbe, nachdem zuvor im Innern des Körpers irgend ein beliebiger Punkt $\pi$ markirt ist, darstellbar sein durch eine von diesem Punkte $\pi$ ausgehende rotatorische Charakteristik $\Lambda$, und daneben durch eine gewisse translatorische Charakteristik $L$.*

---

Linie $\Lambda$ (mit dem Ausgangspunkt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und den Componenten A, B, Γ) in der That denjenigen Anforderungen entspricht, welche an die *Charakteristik* des in Rede stehenden rotatorischen Geschwindigkeitszustandes ($u_2$, $v_2$, $w_2$) zu stellen sind. Vergl. Seite 381.

## § 3.

### Die lebendige Kraft eines starren Körpers, ausgedrückt durch die Charakteristiken seines augenblicklichen Geschwindigkeitszustandes.

Der gegebene Körper befinde sich in beliebiger Bewegung. Da es sich bei unserer Untersuchung immer nur um einen *einzigen Augenblick* handelt, so können wir das (bisher beliebig gelassene) Axensystem $(x, y, z)$ uns so gewählt denken, dass dasselbe *in diesem Augenblick* mit den Hauptträgheitsaxen des Körpers oder (genauer ausgedrückt) mit seinen durch den Schwerpunkt gehenden Hauptträgheitsaxen gerade zusammenfällt. Alsdann ist bekanntlich:

$$(1)\qquad \begin{array}{lll} \Sigma m = M, & & \\ \Sigma mx = 0, & \Sigma myz = 0, & \Sigma m(y^2+z^2) = M_x, \\ \Sigma my = 0, & \Sigma mzx = 0, & \Sigma m(z^2+x^2) = M_y, \\ \Sigma mz = 0, & \Sigma mxy = 0, & \Sigma m(x^2+y^2) = M_z, \end{array}$$

wo $M$ die Masse des Körpers ist, und $M_x$, $M_y$, $M_z$ seine Hauptträgheitsmomente vorstellen.

Nach unserem letzten Satz ist nun der augenblickliche Geschwindigkeitszustand des Körpers darstellbar durch zwei Charakteristiken

$$(2)\qquad \Lambda_{\alpha\beta\gamma},\ L,$$

wobei der Punkt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *beliebig* zu wählen ist. Nehmen wir zum Punkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ den Schwerpunkt des Körpers, d. i. den Anfangspunkt unseres Coordinatensystems, so wird $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Und wir erhalten somit, wenn wir die rechtwinkligen Componenten von $\Lambda$ und $L$ respective mit $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $\Gamma$ und $A$, $B$, $C$ bezeichnen, für die augenblicklichen Geschwindigkeiten $u, v, w$ der einzelnen Massenpunkte $m(x, y, z)$ des Körpers die Formeln:

$$(3)\qquad \begin{aligned} u &= A + \mathsf{B}z - \Gamma y, \\ v &= B + \Gamma x - \mathsf{A}z, \\ w &= C + \mathsf{A}y - \mathsf{B}x; \end{aligned}$$

und hieraus mit Rücksicht auf (1):

$$(4)\quad \Sigma m(u^2+v^2+w^2) = M(A^2+B^2+C^2) + M_x\mathsf{A}^2 + M_y\mathsf{B}^2 + M_z\Gamma^2.$$

Beachten wir endlich, dass $A^2 + B^2 + C^2 = L^2$ ist, und bezeichnen wir die lebendige Kraft des Körpers mit $T$:

$$(5)\qquad \tfrac{1}{2}\Sigma m(u^2+v^2+w^2) = T,$$

so können wir das in (4) enthaltene Resultat so aussprechen:

*Vierter Satz.* — *Denkt man sich* (was zufolge unseres letzten Satzes stets möglich ist) *den augenblicklichen Geschwindigkeitszustand*

*des betrachteten Körpers ausgedrückt durch eine von seinem Schwerpunkt ausgehende rotatorische Charakteristik* $\Lambda$ *und daneben durch eine gewisse translatorische Charakteristik* $L$*, so wird die augenblickliche lebendige Kraft des Körpers folgenden Werth haben:*

$$T = \tfrac{1}{2}(ML^2 + M_x\mathsf{A}^2 + M_y\mathsf{B}^2 + M_z\Gamma^2),$$

*wo* $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $\Gamma$ *die Componenten von* $\Lambda$ *nach den durch den Schwerpunkt gehenden Hauptträgheitsaxen des Körpers vorstellen. Dabei bezeichnen* $M_x$, $M_y$, $M_z$ *die diesen Axen entsprechenden Trägheitsmomente des Körpers, und* $M$ *seine Masse.*

Die translatorische Charakteristik $L$ mit den Componenten $A, B, C$ ist übrigens ihrer Grösse und Richtung nach identisch mit der augenblicklichen Geschwindigkeit des *Schwerpunktes.* Denn für diesen, d. i. für den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ folgt aus (3):

$$u = A,$$
$$v = B,$$
$$w = C.$$

Somit können wir den vorstehenden Satz auch so ausdrücken:

*Derselbe Satz in anderer Form. — Denkt man sich die augenblickliche Bewegung des Körpers zerlegt in drei Rotationsbewegungen um die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptträgheitsaxen und daneben in eine translatorische Bewegung, so ist die augenblickliche lebendige Kraft des Körpers gleich gross mit der Summe derjenigen lebendigen Kräfte, welche diesen vier virtuellen Bewegungen einzeln genommen entsprechen würden.*

## § 4.

### Nöthigung zur Zusammensetzung verschiedener Geschwindigkeitszustände, d. i. zur Reduction der betreffenden Charakteristiken.

Die augenblickliche Lage eines in Bewegung begriffenen starren Körpers ist stets ausdrückbar durch irgend welche Parameter

$$(1) \qquad q_1, q_2, \cdots q_n,$$

die ihrerseits Functionen der Zeit sind. Die Coordinaten $x$, $y$, $z$ irgend eines Massenpunktes $m$ des Körpers in Bezug auf ein unbewegliches Axensystem sind also darstellbar durch:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= f(q_1, q_2, \cdots q_n), \\ y &= g(q_1, q_2, \cdots q_n), \\ z &= h(q_1, q_2, \cdots q_n), \end{aligned}$$

wo $f, g, h$ bestimmte Functionen der beigefügten Argumente bezeichnen.

Aus diesen Formeln erhalten wir für die Geschwindigkeitscomponenten $u$, $v$, $w$ des Punktes $m(x, y, z)$ die Werthe:

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial f}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial f}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_n} q_n', \\
v &= \frac{\partial g}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial g}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial g}{\partial q_n} q_n', \\
w &= \frac{\partial h}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial h}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial h}{\partial q_n} q_n',
\end{aligned} \tag{3}
$$

oder was dasselbe ist:

$$
\begin{aligned}
u &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\
v &= v_1 + v_2 + \cdots + v_n, \\
w &= w_1 + w_2 + \cdots + w_n,
\end{aligned} \tag{4}
$$

wo alsdann $u_i$, $v_i$, $w_i$ die Bedeutungen haben:

$$
\begin{aligned}
u_i &= \frac{\partial f}{\partial q_i} q_i', \\
v_i &= \frac{\partial g}{\partial q_i} q_i', \\
w_i &= \frac{\partial h}{\partial q_i} q_i'.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Analoge Formeln gelten für jeden anderen Massenpunkt des Körpers, nur mit dem Unterschiede, dass bei jedem *andern* Massenpunkte im Allgemeinen auch *andere* Functionen $f$, $g$, $h$ eintreten.

Durch (4) ist der *wirklich vorhandene* Geschwindigkeitszustand $(u, v, w)$ des Körpers in $n$ *fingirte* Geschwindigkeitszustände

$$
\begin{aligned}
&(u_1, v_1, w_1), \\
&(u_2, v_2, w_2), \\
&(u_3, v_3, w_3), \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

zerlegt. Auch ergiebt sich aus (3), (5) eine einfache Beziehung zwischen diesen *fingirten* Zuständen und dem *wirklichen* Zustande. Wir erkennen nämlich, dass der *wirkliche* Zustand $(u, v, w)$ in den *fingirten* Zustand $(u_i, v_i, w_i)$ übergehen wird, sobald man den speciellen Parameter $q_i$ seiner wirklich stattfindenden Veränderung überlässt, die Aenderungen der übrigen Parameter aber sistirt. Bezeichnen wir also den *wirklichen* Zustand $(u, v, w)$ mit

$$(q_1', q_2', q_3', \cdots q_n'),$$

so werden jene $n$ fingirten Zustände der Reihe nach zu bezeichnen sein mit:

$$(q_1', 0, 0, \cdots 0),$$
$$(0, q_2', 0, \cdots 0),$$
$$(0, 0, q_3', \cdots 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

Jeder von den $n$ *fingirten* Zuständen kann (dritter Satz, p. 384) dargestellt werden durch zwei Charakteristiken, eine rotatorische und eine translatorische; und der *wirkliche* Zustand wird alsdann dargestellt sein durch all' diese $2n$ Charakteristiken zusammengenommen. Wir wissen aber andrerseits (zufolge desselben Satzes), dass der *wirkliche* Zustand auch darstellbar ist durch nur *zwei* Charakteristiken. Somit ergiebt sich die Aufgabe, jene $2n$ Charakteristiken auf *zwei* zu reduciren.

Wir werden in den beiden folgenden Paragraphen diejenigen allgemeinen Regeln entwickeln, welche zur Lösung dieser Aufgabe in jedem gegebenen Fall von Nutzen sind.

## § 5.

### Regeln zur Reduction der Charakteristiken.

Ist der augenblickliche Geschwindigkeitszustand eines starren Körpers ausgedrückt durch eine translatorische Charakteristik $L$, so besitzen alle Punkte des Körpers gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeiten, welche geometrisch dargestellt sind durch die Linie $L$. Somit ergeben sich sofort folgende beide Sätze, von denen übrigens der eine schon früher bemerkt wurde:

*Erster Satz. — Eine translatorische Charakteristik kann (unbeschadet ihrer Bedeutung) sich selber parallel beliebig verlegt werden.*

*Zweiter Satz. — Beliebig viele translatorische Charakteristiken sind ersetzbar durch eine einzige. Diese letztere ergiebt sich aus jenen durch Zusammensetzung nach der Regel des Parallelogrammes.*

Um zu untersuchen, ob vielleicht analoge Sätze auch für die *rotatorischen* Charakteristiken existiren, beginnen wir mit folgendem sehr einfachen Fall.

Es sind gegeben zwei rotatorische Geschwindigkeitszustände, der eine durch die von irgend einem Punkt $\alpha, \beta, \gamma$ ausgehende Charakteristik:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma} \text{ mit den Componenten } \mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma,$$

der andere durch eine von *demselben* Punkt ausgehende Charakteristik:

$$\Lambda'_{\alpha\beta\gamma} \text{ mit den Componenten } \mathsf{A}', \mathsf{B}', \Gamma'.$$

Es soll untersucht werden der aus diesen Zuständen *zusammengesetzte* Zustand. Mit andern Worten: Es soll untersucht werden der durch das Symbol

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}, \quad \Lambda'_{\alpha\beta\gamma}$$

angedeutete Zustand.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeiten, welche ein gegebener Massenpunkt $m(x, y, z)$ des Körpers beim Zustande $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ und beim Zustande $\Lambda'_{\alpha\beta\gamma}$ besitzen würde, respective mit $u, v, w$ und $u', v', w'$, so ist offenbar (zweiter Satz S. 384):

$$\begin{aligned} u &= \mathsf{B}(z-\gamma) - \Gamma(y-\beta), & u' &= \mathsf{B}'(z-\gamma) - \Gamma'(y-\beta), \\ v &= \Gamma(x-\alpha) - \mathsf{A}(z-\gamma), & v' &= \Gamma'(x-\alpha) - \mathsf{A}'(z-\gamma), \\ w &= \mathsf{A}(y-\beta) - \mathsf{B}(x-\alpha), & w' &= \mathsf{A}'(y-\beta) - \mathsf{B}'(x-\alpha), \end{aligned}$$

und folglich:

$$\begin{aligned} u + u' &= (\mathsf{B}+\mathsf{B}')(z-\gamma) - (\Gamma+\Gamma')(y-\beta), \\ v + v' &= (\Gamma+\Gamma')(x-\alpha) - (\mathsf{A}+\mathsf{A}')(z-\gamma), \\ w + w' &= (\mathsf{A}+\mathsf{A}')(y-\beta) - (\mathsf{B}+\mathsf{B}')(x-\alpha). \end{aligned}$$

Aus diesen letzten Formeln erkennen wir, dass der von uns zu untersuchende *zusammengesetzte* Zustand ein rotatorischer ist, und darstellbar durch eine Charakteristik

$$\Lambda^*_{\alpha\beta\gamma} \text{ mit den Componenten } \mathsf{A}+\mathsf{A}', \ \mathsf{B}+\mathsf{B}', \ \Gamma+\Gamma'.$$

Jener *zusammengesetzte* Zustand $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}, \Lambda'_{\alpha\beta\gamma}$ ist mithin darstellbar durch eine einzige rotatorische Charakteristik $\Lambda^*_{\alpha\beta\gamma}$, welche aus den gegebenen Charakteristiken $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ und $\Lambda'_{\alpha\beta\gamma}$ erhalten werden kann nach der Regel des Parallelogrammes. — Durch Erweiterung dieses Resultates gelangen wir zu folgendem Satz:

*Dritter Satz. — Beliebig viele rotatorische Charakteristiken mit gemeinschaftlichem Ausgangspunkt können stets ersetzt werden durch eine einzige. Diese letztere ergiebt sich aus jenen durch Zusammensetzung nach der Regel des Parallelogrammes.*

Um andererseits auf den Fall, dass die Charakteristiken *verschiedene* Ausgangspunkte haben, näher einzugehen, stellen wir uns zuvörderst folgende Aufgabe:

Es sind gegeben zwei rotatorische Geschwindigkeitszustände, dargestellt durch zwei von verschiedenen Punkten ausgehende Charakteristiken von *gleicher Länge* und *entgegengesetzter Richtung*, nämlich der eine durch eine Charakteristik

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma} \text{ mit den Componenten } \mathsf{A}, \ \mathsf{B}, \ \Gamma,$$

der andere durch eine Charakteristik

$$\Lambda'_{\alpha'\beta'\gamma'} \text{ mit den Componenten } -\mathsf{A}, \ -\mathsf{B}, \ -\Gamma.$$

Es soll untersucht werden der aus diesen beiden Zuständen *zusammengesetzte*, mit

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}, \ \Lambda'_{\alpha'\beta'\gamma'}$$

zu bezeichnende Zustand.

Sind $u$, $v$, $w$ und $u'$, $v'$, $w'$ die Geschwindigkeiten, welche irgend ein Massenpunkt $m(x, y, z)$ des gegebenen Körpers respective beim Zustande $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ und beim Zustande $\Lambda'_{\alpha'\beta'\gamma'}$ besitzen würde, so ist:

$$(1)\quad \begin{aligned} u &= \mathsf{B}(z-\gamma) - \Gamma(y-\beta), & u' &= -\mathsf{B}(z-\gamma') + \Gamma(y-\beta'),\\ v &= \Gamma(x-\alpha) - \mathsf{A}(z-\gamma), & v' &= -\Gamma(x-\alpha') + \mathsf{A}(z-\gamma'),\\ w &= \mathsf{A}(y-\beta) - \mathsf{B}(x-\alpha), & w' &= -\mathsf{A}(y-\beta') + \mathsf{B}(x-\alpha'), \end{aligned}$$

und folglich:

$$(2)\quad \begin{aligned} u + u' &= \mathsf{B}(\gamma'-\gamma) - \Gamma(\beta'-\beta),\\ v + v' &= \Gamma(\alpha'-\alpha) - \mathsf{A}(\gamma'-\gamma),\\ w + w' &= \mathsf{A}(\beta'-\beta) - \mathsf{B}(\alpha'-\alpha). \end{aligned}$$

Diese Formeln zeigen, dass $u+u'$, $v+v'$, $w+w'$ von den Coordinaten $x$, $y$, $z$ des betrachteten Massenpunktes *unabhängig* sind, und zeigen also, dass der zu untersuchende zusammengesetzte Zustand ein *translatorischer* ist, dargestellt durch eine Charakteristik

$$L \text{ mit den Componenten } \begin{cases} A = \mathsf{B}(\gamma'-\gamma) - \Gamma(\beta'-\beta),\\ B = \Gamma(\alpha'-\alpha) - \mathsf{A}(\gamma'-\gamma),\\ C = \mathsf{A}(\beta'-\beta) - \mathsf{B}(\alpha'-\alpha), \end{cases}$$

Diese Componenten $A$, $B$, $C$ sind, wie aus (1) ersichtlich, identisch mit denjenigen speciellen Werthen, welche $u$, $v$, $w$ annehmen für $x=\alpha'$, $y=\beta'$, $z=\gamma'$, also identisch mit den Componenten derjenigen speciellen Geschwindigkeit, welche durch die Charakteristik $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ indicirt wird für den Ausgangspunkt der Charakteristik $\Lambda'_{\alpha'\beta'\gamma'}$. Also:

*Vierter Satz. — Zwei rotatorische Charakteristiken von gleicher Länge und entgegengesetzter Richtung (mit verschiedenen Ausgangspunkten) sind stets ersetzbar durch eine einzige translatorische Charakteristik. Diese letztere ist identisch mit derjenigen speciellen Geschwindigkeit, welche durch die eine der beiden rotatorischen Charakteristiken für den Ausgangspunkt der andern indicirt ist.*

Wir können diesem Satz eine andere Gestalt geben, in welcher er für die Anwendung bequemer ist. Bezeichnen wir die beiden gegebenen Charakteristiken von gleicher Länge und entgegengesetzter Richtung kurzweg mit $\Lambda$, $\Lambda'$ und ihre Ausgangspunkte mit $\pi$, $\pi'$, so sind (wie wir eben gefunden haben) $\Lambda$, $\Lambda'$ ersetzbar durch eine einzige translatorische Charakteristik $L$. Solches mag angedeutet werden durch die Formel:

$$(1)\qquad \Lambda,\ \Lambda' \text{ äq. } L,$$

wo äq. für äquivalent steht.

Aus (1) folgt sofort:

$$(2)\qquad \Lambda,\ \Lambda',\ \Lambda^0 \text{ äq. } L,\ \Lambda^0,$$

wo $\Lambda^0$ jede beliebige Charakteristik vorstellen kann. Nehmen wir für $\Lambda^0$ eine von $\pi'$ ausgehende rotatorische Charakteristik, welche mit $\Lambda$ von gleicher Länge und Richtung ist, so findet auf der linken Seite der Formel (2) zwischen $\Lambda^0$ und $\Lambda'$ vollständige Zerstörung statt, so dass wir erhalten:

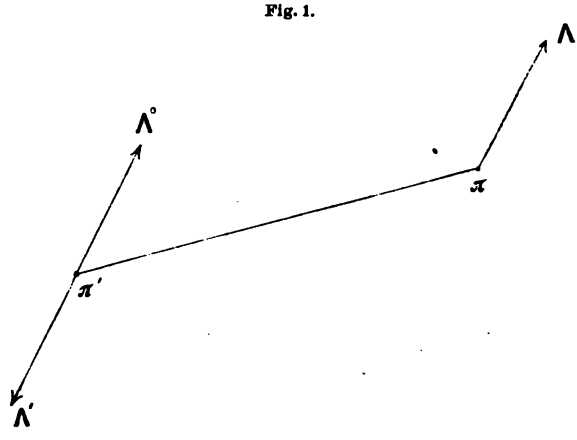
(3) $$\Lambda \text{ äq. } L, \Lambda^0,$$

oder, was dasselbe ist:

(4) $$\Lambda \text{ äq. } \Lambda^0, L.$$

Wir werden also, wie aus (4) ersichtlich, $\Lambda$ durch $\Lambda^0$ ersetzen, d. i. $\Lambda$ sich selber parallel nach einer beliebigen andern Stelle verlegen dürfen, falls wir nur gleichzeitig eine gewisse translatorische Charakteristik $L$ hinzufügen. Diese letztere, nämlich $L$, ist (wie wir im vorhergehenden Satze gefunden haben) identisch mit derjenigen speciellen Geschwindigkeit, welche durch die Charakteristik $\Lambda$ indicirt wird für den Ausgangspunkt von $\Lambda'$, oder überhaupt für einen beliebigen in der Linie $\Lambda$ oder ihrer Verlängerung gelegenen Punkt. Also:

Fig. 1.




*Fünfter Satz. — Eine rotatorische Charakteristik darf sich selber parallel beliebig verlegt werden, falls man nur gleichzeitig eine gewisse translatorische hinzufügt. Diese letztere ist identisch mit derjenigen speciellen Geschwindigkeit, welche durch die gegebene rotatorische Charakteristik in ihrer ursprünglichen Lage indicirt war für irgend einen Punkt ihrer neuen Lage**).

---

*) Denkt man sich eine gegebene Linie $\Lambda$ sich selber parallel verlegt, so dass sie zu Anfang den Ausgangspunkt $\pi$, später den Ausgangspunkt $\pi'$ besitzt, und bezeichnet man die Linie in diesen beiden Lagen respective mit

$$\Lambda_\pi \text{ und } \Lambda_{\pi'},$$

so kann man den Satz auch so aussprechen:

*Die rotatorische Charakteristik $\Lambda_\pi$ ist ersetzbar durch die rotatorische Charakteristik $\Lambda_{\pi'}$ in Verbindung mit einer gewissen translatorischen Charakteristik $L$. Diese letztere ist identisch mit der durch $\Lambda_\pi$ für den Punkt $\pi'$ indicirten Geschwindigkeit.*

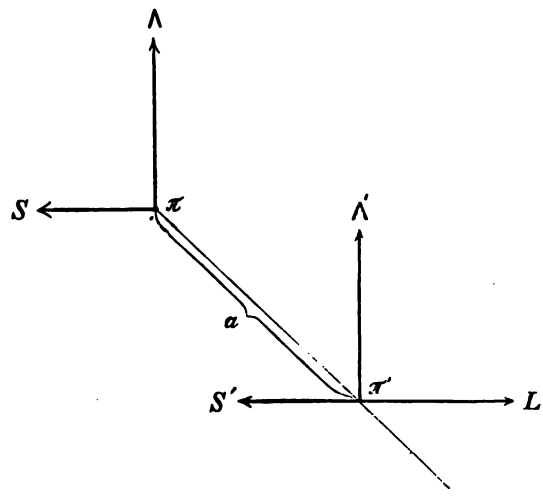
## § 6.

### Weitere Regeln zur Reduction der Charakteristiken.

Wir wollen schliesslich eine *translatorische* und eine *rotatorische* Charakteristik zu reduciren suchen, und zwar zunächst für den speciellen Fall, dass beide zu einander senkrecht stehen.

Es sei $\Lambda$ oder $\Lambda_\pi$ die gegebene rotatorische, und $S$ die gegen $\Lambda$ senkrechte translatorische Charakteristik. Wir denken uns $S$ sich selber parallel in solcher Weise verlegt, dass der Ausgangspunkt von $S$ mit dem von $\Lambda$ zusammenfällt, und errichten sodann in diesem gemeinschaftlichen Ausgangspunkt $\pi$ auf der Ebene $\Lambda S$ ein Perpendikel $\pi\pi'$ von vorläufig *beliebiger* Länge $a$.

Fig. 2.




Nach dem vorhergehenden Satz können wir $\Lambda$ sich selber parallel von $\pi$ nach $\pi'$, d. i. in die Lage $\Lambda'$ verlegen, unter Hinzufügung einer gewissen translatorischen Charakteristik $L$. Dieses $L$ muss identisch sein mit der durch $\Lambda$ für den Punkt $\pi'$ indicirten Geschwindigkeit. Folglich muss $L$ die in der Figur angegebene Lage haben, nämlich senkrecht stehen gegen die Ebene $a\Lambda$, und die Länge besitzen:

$$L = a\Lambda, \tag{1}$$

denn es repräsentirt ja $\Lambda$ die Grösse der Winkelgeschwindigkeit.

Nach Ausführung dieser Constructionen ist nun also:

$$\Lambda \text{ äq. } \Lambda', L, \tag{2}$$

folglich auch:

$$\Lambda, S \text{ äq. } \Lambda', L, S. \tag{3}$$

Hiefür aber kann, weil die translatorische Charakteristik $S$ sich selber parallel von $\pi$ nach $\pi'$, d. i. in die Lage $S'$ verlegt werden darf, auch geschrieben werden:

$$\Lambda, S \text{ äq. } \Lambda', L, S'. \tag{4}$$

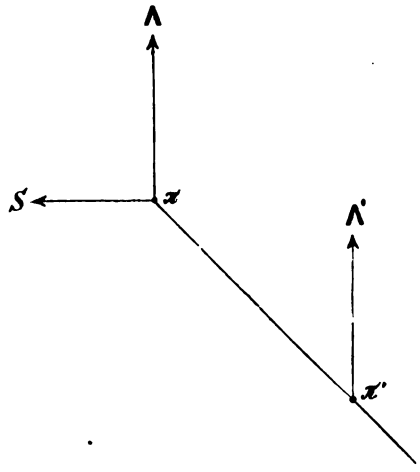
Und diese Formel endlich reducirt sich auf

$$\Lambda, S \text{ äq. } \Lambda', \tag{5}$$

sobald $L$ und $S'$ einander zerstören. Eine solche Zerstörung tritt

aber ein, wenn man die Länge $a = \frac{S}{\Lambda}$ macht, denn alsdann wird nach (1): $L = S$, mithin auch $L = S'$. Somit folgt aus (5) der Satz:

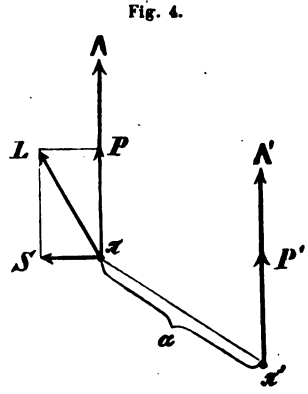
Fig. 3.




*Sechster Satz. — Eine rotatorische Charakteristik Λ und eine auf ihr senkrechte translatorische Charakteristik S können stets ersetzt werden durch eine einzige rotatorische Charakteristik Λ'. Diese letztere ist mit Λ von gleicher Richtung und Länge, und besitzt einen Ausgangspunkt, der durch beistehende Construction sich ergiebt*), unter Anwendung der Relation* $\pi\pi' = \frac{S}{\Lambda}$.

Sind andererseits zwei Charakteristiken Λ und $L$ gegeben von ganz *beliebigen* Lagen, so können wir die translatorische Charakteristik $L$ in zwei Componenten $S$ und $P$ zerlegen, senkrecht und parallel zu Λ. Construiren wir sodann eine Linie $\pi\pi'$ senkrecht zur Ebene $PLS$ und von der Länge:

Fig. 4.




(1) $$a = \frac{S}{\Lambda},$$

so ist nach dem vorhergehenden Satz:

(2) $$\Lambda,\ S \text{ äq. } \Lambda',$$

folglich auch:

(3) $$\Lambda,\ S,\ P \text{ äq. } \Lambda',\ P,$$

oder weil $P$ sich selber parallel nach $\pi'$, d. i. in die Lage $P'$ versetzt werden darf:

(4) $$\Lambda,\ S,\ P \text{ äq. } \Lambda',\ P',$$

d. i.

(5) $$\Lambda,\ L \text{ äq. } \Lambda',\ P'.$$

Diese Formel enthält folgenden Satz:

*Siebenter Satz. — Zwei beliebig gegebene Charakteristiken, von denen die eine rotatorisch, die andere translatorisch ist, lassen sich stets reduciren auf zwei in derselben Linie liegende Charakteristiken, von denen wiederum die eine rotatorisch, die andere translatorisch ist.*

*) In der beistehenden Figur ist die Linie $\pi\pi'$ *senkrecht* zu denken gegen die Ebene $\Lambda S$.

Wir wollen endlich uns die Aufgabe stellen, beliebig viele theils translatorische, theils rotatorische Charakteristiken zu reduciren. Die ersteren seien bezeichnet mit

$$l,\ l',\ l'',\ \cdots,$$

die letzteren mit

$$\lambda_\pi,\ \lambda'_{\pi'},\ \lambda''_{\pi''},\ \cdots,$$

wo $\pi,\ \pi',\ \pi'',\ \cdots$ die Ausgangspunkte vorstellen.

Markiren wir im Innern des gegebenen Körpers einen beliebigen Punkt $\sigma$, so können wir sämmtliche rotatorische Charakteristiken sich selber parallel nach $\sigma$ verlegen, unter Hinzufügung geeigneter translatorischer Charakteristiken $h,\ h',\ h'',\ \cdots$. Wir erhalten also:

$$(\lambda_\pi,\ \lambda'_{\pi'},\ \cdots\ l,\ l',\ \cdots) \text{ äq. } (\lambda_\sigma,\ \lambda'_\sigma,\ \cdots\ h,\ h',\ \cdots\ l,\ l',\ \cdots).$$

Hieraus aber folgt sofort:

$$(\lambda_\pi,\ \lambda'_{\pi'},\ \cdots\ l,\ l',\ \cdots) \text{ äq. } (\Lambda_\sigma,\ L);$$

denn alle Charakteristiken $\lambda_\sigma,\ \lambda'_\sigma,\ \cdots$ reduciren sich auf eine einzige rotatorische Charakteristik $\Lambda_\sigma$; während andererseits sämmtliche Charakteristiken $h,\ h',\ \cdots\ l,\ l',\ \cdots$ durch eine einzige translatorische Charakteristik ersetzbar sind. Also:

*Achter Satz. — Beliebig viele theils rotatorische, theils translatorische Charakteristiken lassen sich stets, nachdem zuvor im Innern des Körpers irgend ein beliebiger Punkt $\sigma$ markirt ist, reduciren auf eine einzige von $\sigma$ ausgehende rotatorische Charakteristik und daneben auf eine gewisse translatorische Charakteristik.*

## § 7.

### Methode zur Bestimmung der lebendigen Kraft eines starren Körpers.

Aehnlich wie früher (S. 386) wollen wir annehmen, die augenblickliche Lage des betrachteten Körpers sei abhängig von $n$ Parametern

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ \cdots\ q_n,$$

welche ihrerseits (bekannte oder unbekannte) Functionen der Zeit sind. Der *wirkliche* Geschwindigkeitszustand des Körpers:

$$(q_1',\ q_2',\ q_3',\ \cdots\ q_n')$$

ist alsdann zerlegbar in die $n$ *fingirten* Zustände:

$$\begin{aligned}
&(q_1',\ 0,\ 0,\ \cdots\ 0),\\
&(0,\ q_2',\ 0,\ \cdots\ 0),\\
&(0,\ 0,\ q_3',\ \cdots\ 0),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Denken wir uns nun diese $n$ *fingirten* Zustände der Reihe nach dargestellt durch die Charakteristiken:

$$l^{(1)},\ \lambda^{(1)},$$
$$l^{(2)},\ \lambda^{(2)},$$
$$l^{(3)},\ \lambda^{(3)},$$
$$\cdots\cdots$$

wobei jede der Linien $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \cdots$ ihren bestimmten Ausgangspunkt besitzt, so wird der *wirkliche* Zustand durch alle diese $2n$ Charakteristiken zusammengenommen dargestellt sein. Diese $2n$ Charakteristiken lassen sich aber (nach dem vorhergehenden Satz) reduciren auf nur zwei Charakteristiken:

$$L,\ \Lambda_\sigma,$$

wo $\sigma$ ein willkürlich zu wählender Punkt ist.

Nehmen wir also z. B. für $\sigma$ den *Schwerpunkt* des Körpers, so wird der *wirkliche* Zustand dargestellt sein durch eine vom Schwerpunkt $\sigma$ ausgehende rotatorische Charakteristik $\Lambda_\sigma$, und daneben durch eine gewisse translatorische Charakteristik $L$. Und folglich wird die lebendige Kraft $T$ des Körpers (vergl. S. 386) den Werth haben:

$$T = \tfrac{1}{2}(ML^2 + M_x\mathsf{A}^2 + M_y\mathsf{B}^2 + M_z\Gamma^2),$$

wo $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $\Gamma$ die Componenten von $\Lambda_\sigma$ nach den durch $\sigma$ gehenden Hauptträgheitsaxen vorstellen, während $M_x$, $M_y$, $M_z$ die diesen Axen entsprechenden Trägheitsmomente, und $M$ die Masse des Körpers bezeichnen.

Dass diese Methode zur Berechnung der lebendigen Kraft in den meisten Fällen sehr bequem und expedit ist, dürfte folgendes Beispiel einigermassen erkennen lassen.

## § 8.

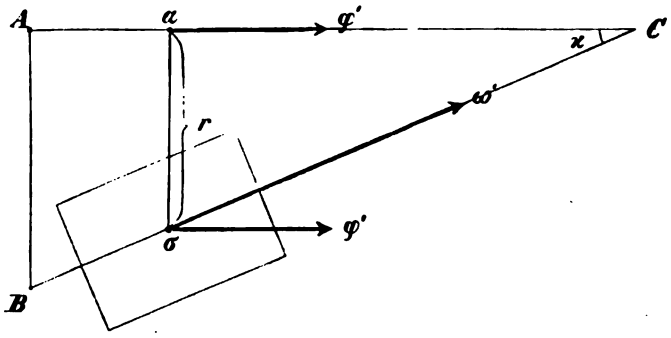
### Beispiel: Ein Pendel mit Schwungrad.

Ein *homogener Cylinder* sei drehbar um seine geometrische Axe, und diese dargestellt durch eine Linie $BC$, welche zusammengenommen mit zwei andern Linien $CA$ und $AB$ ein *starres Dreieck* $ABC$ bildet. Dieses Dreieck endlich sei nach Art eines Pendels drehbar um die horizontale Seite $AC$.

Denken wir uns den Cylinder zu Anfang (etwa durch Abziehen eines aufgewickelten Fadens) in schnelle Rotation versetzt, und den ganzen Apparat der Einwirkung der Schwere überlassen, so haben wir

ein *Pendel mit Schwungrad.* In der That, $AC$ ist die Pendelaxe, und $BC$ die Axe des rotirenden Cylinders oder Schwungrades.

Fig. 5.




Ist $T$ die lebendige Kraft des Systems und $V$ das von der Schwerkraft ausgeübte Potential, so gelten nach Lagrange für die Bewegung des Systems folgende Differentialgleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial(T-V)}{\partial\varphi'} &= \frac{\partial(T-V)}{\partial\varphi}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial(T-V)}{\partial\omega'} &= \frac{\partial(T-V)}{\partial\omega}, \end{aligned}$$

wo $\varphi$, $\omega$ diejenigen Parameter bezeichnen, durch welche die augenblickliche Lage des Systems sich bestimmt, und $\varphi'$, $\omega'$ die Ableitungen von $\varphi$, $\omega$ nach der Zeit. — Zum Parameter $\varphi$ nehmen wir den *Ablenkungswinkel* des Pendels, d. i. den Winkel der Dreiecksebene $ABC$ gegen eine durch $AC$ gelegte Vertikalebene. Und andererseits nehmen wir für $\omega$ den *Umdrehungswinkel* des Cylinders, d. i. den Winkel der Dreiecksebene $ABC$ gegen eine durch $BC$ gelegte mit dem Cylinder verbundene Ebene.

Da es sich hier nur um ein Beispiel handelt, so wollen wir die Aufgabe möglichst einfach gestalten, indem wir voraussetzen, die starren Linien $AB$, $BC$, $CA$ seien völlig *gewichtslos.* Alsdann ist $T$ die lebendige Kraft des *Cylinders*, und $V$ das auf diesen von der Schwerkraft ausgeübte Potential; und es wird also:

$$(2)\qquad V = -Mgr\cos\varphi,$$

wo $M$ die Masse des Cylinders, und $r$ der Abstand seines Schwerpunktes $\sigma$ von der Pendelaxe, d. i. die Linie $\sigma\alpha$ repräsentirt.

Um die Differentialgleichungen (1) wirklich hinzustellen, handelt es sich also nur noch um die Berechnung der lebendigen Kraft $T$; und diese mag nun ausgeführt werden nach der im vorhergehenden § dargelegten Methode.

Der augenblickliche Geschwindigkeitszustand des Cylinders:

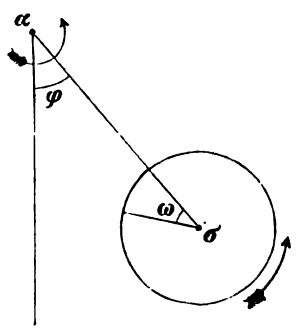
(3) $$(\varphi', \omega')$$

ist zerlegbar in die beiden *fingirten* Zustände:

(4) $$(\varphi', 0),$$
$$(0, \omega'),$$

von welchen jeder ein rotatorischer ist. Um die Vorstellung zu fixiren, wollen wir annehmen, die Winkel $\varphi$, $\omega$ seien in solcher Weise gerechnet, wie die beistehende Figur, welche auf einer um $C$ beschriebenen Kugelfläche gezeichnet sein soll*), angiebt, und ferner annehmen, die Pendelbewegung um die Axe $\alpha$ und die Rotationsbewegung um die Axe $\sigma$ fänden in Richtung der gezeichneten Pfeile statt, so dass also $\varphi$ sowohl wie $\omega$ im betrachteten Augenblick im *Wachsen* begriffen sind. Alsdann ist der Zustand $(\varphi', 0)$ dargestellt durch eine in der Axe $AC$ liegende, von links nach rechts laufende rotatorische Charakteristik von der Länge $\varphi'$. Diese Charakteristik bezeichnen wir mit

Fig. 6.




$$\varphi_\alpha',$$

indem wir $\alpha$ zum Ausgangspunkt nehmen. Andererseits ist der Zustand $(0, \omega')$ darstellbar durch eine in der Axe $BC$ liegende von links nach rechts laufende rotatorische Charakteristik von der Länge $\omega'$. Diese bezeichnen wir mit

$$\omega_\sigma',$$

indem wir den Punkt $\sigma$ (den Schwerpunkt des Cylinders) zu ihrem Ausgangspunkt nehmen.

Die beiden *fingirten* Zustände (4) sind somit dargestellt respective durch die Charakteristiken

$$\varphi_\alpha',$$
$$\omega_\sigma';$$

folglich wird der *wirkliche* Zustand (3) ausgedrückt sein durch

(5) $$\varphi_\alpha', \omega_\sigma',$$

oder, falls man $\varphi_\alpha'$ sich selber parallel nach $\sigma$ verlegt, ausgedrückt sein durch

(6) $$\varphi_\sigma', \omega_\sigma', L,$$

*) Diese Figur ist gezeichnet zu denken auf einer um den Punkt $C$ mit dem Radius $C\sigma$ beschriebenen Kugelfläche, und zwar auf der *innern* Seite der Kugelfläche. Man hat sich also in Fig. 6 den Mittelpunkt $C$ dieser Kugelfläche *oberhalb* $\alpha$ vorzustellen.

wo $L$ die bei dieser Verlegung hinzuzufügende *translatorische* Charakteristik bezeichnet (Satz S. 391). Dieses $L$ ist identisch mit derjenigen speciellen Geschwindigkeit, welche durch $\varphi_\alpha'$ indicirt war für den Punkt $\sigma$ (vergl. wiederum den Satz S. 391), und ist daher perpendiculär gegen die Ebene $\alpha\sigma C$, und von der Länge:

$$L = r\varphi', \tag{7}$$

wo $r$ (wie schon früher) die Linie $\alpha\sigma$ bezeichnet.

Nachdem für den augenblicklichen Zustand des Cylinders die Charakteristiken (6) gefunden sind, ergiebt sich nun für seine augenblickliche lebendige Kraft $T$ der Werth:

$$T = \tfrac{1}{2}[ML^2 + \mathfrak{A}\mathsf{A}^2 + \mathfrak{B}\mathsf{B}^2 + \mathfrak{C}\Gamma^2], \tag{8}$$

wo $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $\Gamma$ die Componenten von $\varphi_\sigma'$, $\omega_\sigma'$ nach den durch $\sigma$ gehenden Hauptträgheitsaxen $x$, $y$, $z$, und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die diesen Axen entsprechenden Trägheitsmomente des Cylinders bezeichnen, während $M$ seine Masse vorstellt. Nehmen wir zur Axe $x$ die geometrische Axe $BC$ des Cylinders, so ist offenbar $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, mithin:

$$T = \tfrac{1}{2}[ML^2 + \mathfrak{A}\mathsf{A}^2 + \mathfrak{B}(\mathsf{B}^2+\Gamma^2)]. \tag{9}$$

Bezeichnen wir nun den constanten Winkel $ACB$ mit $\varkappa$, so wird der Winkel von $\varphi_\sigma'$ gegen die $x$Axe ebenfalls $= \varkappa$, folglich:

$$\mathsf{A} = \varphi' \cos\varkappa + \omega',$$
$$\mathsf{B}^2 + \Gamma^2 = (\varphi' \sin\varkappa)^2,$$

und nach (7)

$$L = r\varphi'.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (9) erhalten wir:

$$T = \tfrac{1}{2}[Mr^2\varphi'^2 + \mathfrak{A}(\varphi' \cos\varkappa + \omega')^2 + \mathfrak{B}(\varphi' \sin\varkappa)^2], \tag{10}$$

also mit Rückblick auf (2):

$$T - V = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{M}\varphi'^2 + \mathfrak{A}(\omega'^2 + 2\omega'\varphi' \cos\varkappa)] + Mgr\cos\varphi, \tag{11}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\mathfrak{M} = Mr^2 + (\mathfrak{A}\cos^2\varkappa + \mathfrak{B}\sin^2\varkappa). \tag{12}$$

Dieses $\mathfrak{M}$ repräsentirt offenbar eine dem Apparate eigenthümliche *Constante*, nämlich sein *Trägheitsmoment in Bezug auf die Pendelaxe AC.*

Durch Substitution von (11) in (1) folgt nun sofort:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathfrak{M}\varphi' + \mathfrak{A}\omega'\cos\varkappa] &= -Mgr\sin\varphi, \\ \frac{d}{dt}[\mathfrak{A}(\omega' + \varphi'\cos\varkappa)] &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

d. i.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\varphi'' + \mathfrak{A}\omega''\cos\varkappa &= -Mgr\sin\varphi, \\ \omega' + \varphi'\cos\varkappa &= \text{Const.}, \end{aligned} \tag{14}$$

und hieraus durch Elimination von $\omega$:

$$(\mathfrak{M} - \mathfrak{A}\cos^2\varkappa)\,\varphi'' = -Mgr\sin\varphi. \tag{15}$$

*Diese Formel ist es also, durch welche die zu untersuchende Pendelbewegung sich bestimmt.*

*Erste Bemerkung.* — Die Differentialgleichung für ein sogenanntes *einfaches* Pendel von der Länge $r_0$ ist bekanntlich*):

$$r_0\varphi'' = -g\sin\varphi, \tag{16}$$

somit folgt aus (15), dass unser mit einem Schwungrad versehenes Pendel sich genau ebenso bewegt, wie ein einfaches Pendel von der Länge:

$$r_0 = \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{A}\cos^2\varkappa}{Mr}. \tag{17}$$

Für den Specialfall $\varkappa = 0$ wird nach (12): $\mathfrak{M} = Mr^2 + \mathfrak{A}$, also nach (17)

$$r_0 = r. \tag{18}$$

D. h. *Für den Specialfall $\varkappa = 0$ bewegt sich unser mit einem Schwungrade versehenes Pendel in genau derselben Weise, als wäre die ganze Masse des Rades in seinem Schwerpunkt concentrirt.*

*Zweite Bemerkung.* — Der constante Winkel $\varkappa = ACB$ besitze einen bebiebigen Werth. Denken wir uns nun das Schwungrad *arretirt*, d. i. mit dem Gestänge $ABC$ fest verbunden, so haben wir ein *gewöhnliches* körperliches Pendel vor uns. Für dieses ist offenbar $\omega' = 0$, also nach (11):

$$T - V = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}\varphi'^2 + Mgr\cos\varphi. \tag{19}$$

Hieraus aber ergiebt sich mit Rückblick auf (1) folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{M}\varphi') = -Mgr\sin\varphi, \tag{20}$$

d. i.

$$\mathfrak{M}\varphi'' = -Mgr\sin\varphi. \tag{21}$$

Vergleicht man nun diese Formel (21) mit der früheren (15), so besteht offenbar der Unterschied nur darin, dass in dieser die Constante $\mathfrak{M}$, in jener die Constante $(\mathfrak{M} - \mathfrak{A}\cos^2\varkappa)$ steht. Mit andern Worten: Vergleicht man die Pendelbewegung bei *arretirtem* Schwungrade mit derjenigen bei *rotirendem* Schwungrade, so ist der Unterschied beim Uebergange vom ersten zum letzten Fall genau derselbe, als wäre das Trägheitsmoment des Pendels um $\mathfrak{A}\cos^2\varkappa$ vermindert worden, wo $\mathfrak{A}$

*) Man kann übrigens diese Gleichung (16) auch geradezu aus (15) ableiten, indem man die Dimensionen des Cylinders unendlich klein macht, wodurch $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$ und $\mathfrak{M} = Mr^2$ wird.

das Trägheitsmoment des Schwungrades um seine Axe und $\varkappa$ die Neigung dieser Axe gegen die Pendelaxe bezeichnet.

## § 9.

### Beispiel: Die Fallbewegung eines materiellen Punktes.

Die von mir entwickelte allgemeine Methode ist auch dann zuweilen von Nutzen, wenn der gegebene Körper ein *Punkt* ist, und kann z. B. angewendet werden, um die Differentialgleichungen für die Fallbewegung eines materiellen Punktes mit Rücksicht auf die Rotation der Erde abzuleiten.

Abstrahiren wir nämlich von allen übrigen Bewegungen der Erde, indem wir uns ihre Umdrehungsaxe als absolut stillstehend denken, und bezeichnen wir mit $(x, y, z)$ ein mit der Erde festverbundenes Axensystem (etwa mit $z$ die Vertikale und mit $xy$ die Horizontalebene des betreffenden Ortes), so wird die *absolute* Lage*) eines materiellen Punktes $m$ mit den Coordinaten $x, y, z$ abhängig sein von den vier Grössen

$$x, y, z, \omega,$$

wo $\omega$ den Drehungswinkel der Erde bezeichnet. Demgemäss wird der augenblickliche Geschwindigkeitszustand des Punktes $m$ ausgedrückt sein durch die vier Charakteristiken:

$$x', y', z', \omega',$$

von denen die drei ersten translatorische sind, während die vierte $\omega'$ eine rotatorische ist und den Mittelpunkt der Erde zum Ausgangspunkt hat.

Diese rotatorische Charakteristik $\omega'$ kann nun, unter Hinzufügung einer gewissen translatorischen Charakteristik, sich selber parallel nach $m$ verlegt werden. Solches ausgeführt, erhält man sofort die augenblickliche lebendige Kraft des Punktes $m$ und sodann die für seine Bewegung geltenden Differentialgleichungen.

---

*) Unter der *absoluten* Lage verstehe ich die Lage in Bezug auf ein *im Raume unbewegliches* Axensystem. Hingegen verstehe ich unter $x, y, z$ die *relative* Lage, nämlich die Coordinaten des Punktes in Bezug auf das mit der rotirenden Erde verbundene, also *in Bewegung begriffene* Axensystem.

# La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre.

Par

F. Brioschi à Milan.

---

1°. Si dans l'équation différentielle linéaire du second ordre:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + p\frac{dv}{dx} + qv = 0 \tag{1}$$

on fait:

$$v = ze^{-\frac{1}{2}\int p\,dx}$$

on obtient:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = Pz, \qquad P = \frac{1}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{4}p^2 - q. \tag{2}$$

Je supposerai $p$, $q$ fonctions rationnelles de $x$; et en désignant par $f(z_1, z_2)$ une forme binaire de l'ordre ennième dans laquelle $z_1$, $z_2$ sont deux intégrales particulières de l'équation différentielle (2), posant:

$$f(z_1, z_2) = \varphi(x), \tag{3}$$

je supposerai avec Mr. Fuchs*) que $\varphi(x)$ soit une racine d'une fonction rationnelle de $x$. Mr. Fuchs a démontré dans son important travail l'existence et l'origine de cette équation (3) et il a établi pour la *forme principale* (Primform) $f$ certaines conditions dont la plus importante est que l'ordre de la forme même ne peut pas être supérieur à 12. Mais les recherches de Mr. Fuchs rélativement aux covariants et aux invariants de la forme $f$, se bornent à peu-près à l'étude de son hessien; et l'on verra, je pense, par ce qui va suivre l'importance de compléter, de ce point de vue l'étude d'une forme principale soit dans les cas signalés par lui, soit en d'autres.

2°. En posant:

$$\frac{d\log\varphi(x)}{dx} = \psi(x), \quad f_1 = \frac{1}{n}\frac{df}{dz_1}, \quad f_{11} = \frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2f}{dz_1^2}, \ldots$$

on déduit de l'équation (3):

---

*) Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Borchardt's Journal für Mathematik Bd. 81, p. 97.

$$f_1 \frac{dz_1}{dx} + f_2 \frac{dz_2}{dx} = \frac{1}{n} \varphi \psi,$$

où $\psi$ est une fonction rationnelle de $x$. D'autre part on a par un théorème connu:

$$z_2 \frac{dz_1}{dx} - z_1 \frac{dz_2}{dx} = C,$$

on aura en conséquence:

$$(4) \quad f_1 = \frac{1}{C} \varphi \left[ \frac{1}{n} \psi z_2 - \frac{dz_2}{dx} \right]; \quad f_2 = -\frac{1}{C} \varphi \left[ \frac{1}{n} \psi z_1 - \frac{dz_1}{dx} \right].$$

Or l'on sait par la théorie des formes qu'en substituant en $f$ au lieu de $z_1$, $z_2$ les expressions:

$$z_1 \xi_1 - f_2 \xi_2; \quad z_2 \xi_1 + f_1 \xi_2$$

la forme de l'ordre $n$ en $\xi_1$, $\xi_2$ qui en résulte à la propriété que ses coefficients sont des covariants de la forme $f(z_1, z_2)$. La recherche de ces covariants, désignés par M^r. Hermite avec l'appellatif de *covariants associés* à la forme $f$, est rendu très-importante par ce fait qu'un covariant ou invariant quelconque de la forme $f$ multiplié par une puissance de la forme même est une fonction rationnelle, entière de ces covariants associés. En indiquant par $p_0, np_1, \frac{n(n-1)}{2} p_2, \cdots p_n$ les coefficients de la forme en $\xi_1$, $\xi_2$, on a évidemment $p_0 = f(z_1, z_2)$, $p_1 = 0$; et si les $f_1$, $f_2$ ont les valeurs (4) on aura:

$$p_r = \frac{\varphi^r}{C^r} \left[ \left(\frac{\psi}{n}\right)^r \varphi - r \left(\frac{\psi}{n}\right)^{r-1} F_1 + \frac{r(r-1)}{2} \left(\frac{\psi}{n}\right)^{r-2} F_2 \cdots + (-1)^r F_r \right]$$

étant:

$$F_1 = f_1 \frac{dz_1}{dx} + f_2 \frac{dz_2}{dx}; \quad F_2 = f_{11} \left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2 + 2 f_{12} \frac{dz_1}{dx} \frac{dz_2}{dx} + f_{22} \left(\frac{dz_2}{dx}\right)^2$$

et ainsi de suite. Or l'on démontre très-facilement pour une fonction $F_r$ quelconque que:

$$\frac{dF_r}{dx} = (n-r) F_{r+1} + r P F_{r-1}$$

on aura par conséquent entre trois covariants consécutifs $p_{r-1}$, $p_r$, $p_{r+1}$ la formule récurrente:

$$(5) \quad p_{r+1} = -\frac{\varphi}{(n-r)C} \left[ \frac{dp_r}{dx} - \frac{(r+1)n - 2r}{n} \psi p_r \right] + \frac{r(n-1)}{n-r} \frac{1}{\varphi} p_2 p_{r-1}$$

et:

$$(6) \quad p_2 = \frac{\varphi^3}{n^2(n-1)C^2} \left[ \psi^2 + n\psi' - n^2 P \right].$$

De ce premier résultat on déduit que $p_2$ étant le produit de $\varphi^3$ par une fonction rationnelle de $x$ et la même propriété ayant lieu pour

$\frac{dp_2}{dx}$, on aura que $p_3$ sera le produit de $\varphi^4$ pour une fonction rationnelle de $x$ et l'on pourra poser:

$$(7) \qquad p_2 = \varphi^3\Phi_2, \quad p_3 = \varphi^4\Phi_3 \cdots p_r = \varphi^{r+1}\Phi_r \cdots,$$

$\Phi_2$, $\Phi_3$ $\cdots$ étant des fonctions rationnelles de $x$.

Cela posé soit $J$ un invariant quelconque de la forme $f(z_1, z_2)$ et soit $m$ son dégré; on aura par le théorème rappellé ci-dessus:

$$(8) \qquad \varphi^{\frac{mn}{2}} J = \Sigma \pm a p_0^{\alpha_0} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_n^{\alpha_n},$$

où $a$ est un coefficient numérique et les $\alpha_0$, $\alpha_2$ $\cdots$ sont des nombres entiers, positifs qui doivent satisfaire aux relations:

$$\alpha_0 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m; \quad 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + n\alpha_n = \frac{mn}{2}.$$

Mais en substituant les valeurs (7) dans le second membre de l'équation (8) on voit tout-de-suit que l'exposant de $\varphi$ sera:

$$\alpha_0 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + \cdots + (n+1)\alpha_n = m + \frac{mn}{2},$$

on aura donc:

$$(9) \qquad J = \varphi^m \Phi$$

étant $\Phi$ rationnelle en $x$. On a ainsi le théorème:

*Un invariant quelconque du dégré $m$ de la forme principale $f(z_1, z_2) = \varphi(x)$ est égal au produit de la puissance emmième de $\varphi$ pour une fonction rationnelle de $x$; par conséquent si $\varphi^m$ ne peut pas être une fonction rationnelle de $x$ on aura $J = 0$.*

De la même manière on démontre que si $K$ est un covariant de la forme $f$ du dégré $m$ et d'un ordre quelconque, on a:

$$(10) \qquad K = \varphi^m \Phi$$

résultat notable par ce fait que la puissance $m$ est indépendante de l'ordre du covariant. Du théorème supérieur on déduit:

a) Si la forme principale est d'ordre pair et par conséquent elle a un invariant quadratique, $\varphi^2$ doit être fonction rationnelle de $x$. (Ce résultat a déjà été donné par Mr. Fuchs dans le cas $n = 2$, pag. 117.) Si cet invariant n'est pas $= 0$ les invariants de dégrés impairs de la forme même doivent s'annuler, ou enfin la fonction $\varphi$ doit être elle-même rationnelle.

b) Si l'ordre de la forme principale est $n \equiv 0 \pmod 4$ et par conséquent la forme même possède l'invariant $A$ quadratique, et l'invariant $B$ cubique, étant:

$$A = \tfrac{1}{2}(ff)_n, \quad k = \tfrac{1}{2}(ff)_{\frac{n}{2}}, \quad B = (fk)_n$$

on aura soit $\varphi^2$ rationnelle et $B = 0$, soit $\varphi^3$ rationnelle et $A = 0$, sauf le cas que $\varphi$ soit rationnelle.

On voit par ces exemples, et par d'autres qu'on pourrait facilement ajouter, qu'en supposant $\varphi(x)$ racine d'une fonction rationnelle, la forme binaire $f$ doit vérifier certaines conditions qui dans chaque cas doivent limiter la généralité de la forme même.

3°. La formule récurrente (5) peut être simplifiée en posant d'abord:

$$p_r = -\varphi^{\mu_r} y_r'; \quad \mu_r = \frac{(r+1)n-2r}{n}, \tag{11}$$

et ensuite:

$$C\frac{dx}{\varphi^{\frac{2}{n}}} = d\omega. \tag{12}$$

En effet par ces substitutions elle se transforme dans la suivante:

$$y_{r+1} = -\frac{1}{n-r}[y_r' + r(n-1)y\,y_{r-1}] \tag{13}$$

ayant posé $y_r' = \frac{dy_r}{d\omega}$, $y = y_2$. On aura ainsi:

$$\begin{cases} y_3 = -\frac{1}{n-2}y'; \\ y_4 = \frac{1}{(n-2)(n-3)}[y'' - 3(n-1)(n-2)y^2]; \\ y_5 = -\frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)}[y''' - 2(n-1)(5n-12)yy']; \\ y_6 = \frac{1}{(n-2)\cdots(n-5)}[y^{IV} - (n-1)(15n-44)yy'' \\ \qquad\qquad -2(n-1)(5n-12)y'^2 \\ \qquad\qquad +15(n-1)^2(n-2)(n-4)y^3], \end{cases} \tag{14}$$

c'est-à-dire les valeurs de $y_3$, $y_4$ $\cdots$ en fonction de $y$ et des ses coefficients différentiels par respect à $\omega$.

Or par la méthode exposée dans la p. 402 on trouvera de même qu'en indiquant par $i$ l'ordre d'un covariant $K$ on aura:

$$K = \varphi^{\frac{i}{n}} \Sigma \pm a y_2^{\alpha_2} y_3^{\alpha_3} \cdots y_n^{\alpha_n}$$

ou le théorème:

*Un covariant quelconque d'ordre $i$ de la forme principale $f$ peut s'exprimer en fonction rationnelle, entière, de $y$ et des ses coefficients différentiels rélatifs à $\omega$. Pour un invariant $J$ on n'a qu'à poser $i = 0$.*

Pour chaque invariant $J$ de la forme $f$ on aura donc une équation différentielle:

$$F(y, y', y'' \cdots y^{(r)}) = J,$$

dans laquelle $J$ devra dans quelques cas être $= 0$. En supposant que de ces équations on puisse tirer $y$ en fonction de $\omega$ ou (12) en fonction de $x$, on aurait ces deux conséquences. La formule (11) en observant que, si $h(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(ff)_2$, on a $p_2 = fh = \varphi h$ donne:

$$h(z_1, z_2) + yf^{2\frac{n-2}{n}}(z_1, z_2) = 0, \tag{15}$$

qui est l'intégrale de l'équation différentielle du troisième ordre considerée il y a longtemps par Mr. Kummer (De generali quadam aequationi differentiali tertii ordinis — Osterprogramm 1834 des Gymnasiums zu Liegnitz — Crelle Bd. 15). En second lieu l'équation (6) donne:

$$y = -\frac{\varphi^{\frac{4}{n}}}{n^2(n-1)C^2}[\psi^2 + n\psi' - n^2P], \tag{16}$$

de laquelle on déduit la valeur de $P$ corréspondante à une valeur donnée de $\varphi(x)$.

4°. Je vais éclaircir tout cela par quelques exemples. Soit $n = 4$; pour ce que nous avons démontré avec l'équation (9) on voit que si $\varphi(x)$ n'est pas elle-même rationnelle, on doit avoir l'un ou l'autre des deux invariants $g_2$, $g_3$ égales à zéro. Je supposerai $g_2 = 0$ et parce que les calculations à faire restent les mêmes, comme on verra après, je supposerai que le covariant $g_2(z_1, z_2)$ du second dégré et de l'ordre $2(n-4)$ de la forme $f$ s'annulle identiquement. Par la théorie des covariants associés étant:

$$\varphi^4 g_2 = p_0 p_4 + 3p_2^2,$$

on aura pour les (11), (14):

$$g_2 = -\frac{\varphi^{2\frac{n-4}{n}}}{(n-2)(n-3)}[y'' - 6(n-2)^2y^2]. \tag{17}$$

La condition $g_2 = 0$ conduit donc à l'équation différentielle:

$$y'' - 6(n-2)^2y^2 = 0,$$

laquelle peut s'intégrer tout-de-súite et donne:

$$y'^2 - 4(n-2)^2y^3 = D \tag{18}$$

$D$ constante. Cette équation à cause des (14) peut s'écrire:

$$y_3^2 - 4y_2^3 = \frac{D}{(n-2)^2}, \tag{19}$$

de laquelle en réfléchissant que (7), (11) en général:

$$y_r = -\varphi^{\frac{2r}{n}}\,\Phi,$$

$\Phi$ rationnelle en $x$, on voit que la puissance $\frac{12}{n}$ de $\varphi$ doit être une fonction rationnelle; c'est-à-dire que les seules valeurs de $n$ sont 4, 6, 12; ce que d'autre part on sait par les recherches de M$^r$. Wedekind.

On aura ainsi que pour $n = 4$, $\varphi^3$ doit être rationnelle (comme le donnerait la valeur de $g_3$), pour $n = 6$ doit être $\varphi^2$ rationnelle et la fonction même $\varphi$ rationnelle pour $n = 12$.

De l'équation (19) en se rappellant que $p_3 = f\theta$ étant $\theta = 2(fh)$ covariant du troisième dégré et de l'ordre $3(n-2)$, on aura:

$$\theta^2 + 4h^3 = 4m^3 f^{6\frac{n-2}{n}}$$

ayant posé $D = 4(n-2)^2 m^3$. Cette rélation identique entre la forme $f$ et ses covariants $h$, $\theta$ se complète en observant que:

pour $n = 4$, $n = 6$, $n = 12$

on a $4m^3 = -g_3$, $4m^3 = -\frac{1}{18}A$, $4m^3 = \frac{1}{180}\sqrt{\frac{7}{6}}A$

$A$ étant l'invariant quadratique dans les deux cas.

Enfin de l'équation (18) on déduit la suivante:

$$\frac{dy}{\sqrt{y^3 + m^3}} = 2(n-2)d\omega,$$

ou en posant $\left(\frac{y}{m}\right)^3 = -t$:

$$(20)\qquad \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-t}} = -6(n-2)\sqrt{m}\cdot d\omega = -6(n-2)C\sqrt{m}\,\frac{dx}{\sqrt[6]{\varrho(x)}},$$

où $\varrho(x) = \varphi^{\frac{12}{n}}$ est une fonction rationnelle de $x$. L'intégrale (15) dévient dans les trois cas:

$$4h^3 + g_3 tf^3 = 0, \quad 4h^3 + \tfrac{1}{18}Atf^4 = 0, \quad 4h^3 - \tfrac{1}{180}\sqrt{\tfrac{7}{6}}A\cdot tf^5 = 0,$$

comme a été démontré par M$^r$. Klein dans sa communication à la Société d'Erlangen (Ueber lineare Differentialgleichungen. Sitzung vom 26. Juni 1876) et dans ma lettre à ce savant géométre publiée dans les Mathematische Annalen Bd. XI.

On peut aussi observer que si l'on pose $z = \frac{z_1}{z_2}$, on a:

$$z_2^2\frac{dz}{dx} = C, \quad f(z_1, z_2) = z_2^n f(z) = \varphi(x)$$

et que par conséquent l'équation (20) donne:

$$\frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-t}} = -6(n-2)\sqrt{m}\cdot\frac{dz}{f^{\frac{2}{n}}(z)},$$

c'est-à-dire que les intégrales du second membre pour les formes $f$ pour lesquelles on a identiquement $g_2 = 0$, peuvent se réduire à des intégrales elliptiques, comme M^r. Schwarz à démontré dans son remarquable mémoire (Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt, Borchardt's Journal für Mathematik Bd. 75, p. 327).

Si dans l'équation (20) on fait $t = x$ et on suppose (1)

$$p = \frac{1}{6}\frac{4-7x}{x(1-x)},$$

on obtient:

$$\sqrt[6]{\varrho(x)} = -6(n-2)\,C\sqrt{m}\cdot e^{\int p\,dx},$$

mais désignant par $v_1$, $v_2$ les deux intégrales particulières correspondantes à $z_1$, $z_2$, on a:

$$f(z_1, z_2) = e^{\frac{n}{2}\int p\,dx} f(v_1, v_2),$$

en conséquence la forme principale $f(v_1, v_2)$ sera constante. C'est le cas que j'ai considéré dans une communication à l'Institut Lombard (Séance du 14 Décembre 1876. — Voir aussi Klein: Weitere Untersuchungen über das Ikosaëder, Sitzungsbericht der Societät zu Erlangen, 13. November 1876).

**5°.** Je veux démontrer maintenant de quelle manière les formules (16), (20) peuvent servir à la détermination de la fonction $t(x)$ et peuvent par conséquent résoudre le problème indiqué par M^r. le Prof. Klein dans sa communication du 26 Juin 1876 à la Société d'Erlangen (Ueber lineare Differentialgleichungen, Math. Annalen Bd. XI, p. 115). Si dans l'équation (16) on pose au lieu de $y$ l'expression $-mt^{\frac{1}{3}}$ et l'on désigne par $\Phi$ l'expression rationnelle:

$$\Phi = \psi^2 + n\psi' - n^2 P,$$

on a la valeur générale de la fonction rationnelle $t(x)$:

$$t(x) = \frac{1}{n^6(n-1)^3 C^6 m^3}\,\varrho(x)\,\Phi^3(x), \tag{21}$$

où $\varrho(x)$ est, comme nous avons vu, $= \varphi^{\frac{12}{n}}$. D'autre part la condition $g_2 = 0$ donne pour $t$ l'équation différentielle (20):

$$\frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-t}} = -6(n-2)\,C\sqrt{m}\,\frac{dx}{\sqrt[6]{\varrho(x)}} \tag{22}$$

par conséquent l'on aura aussi:

$$(23) \qquad \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{6(n-2)}{n\sqrt{n-1}}\sqrt{\Phi(x)}\cdot dx.$$

L'élimination de la fonction $\varrho(x)$ ou $\varphi(x)$ des équations (21), (22) nous va donner un premier résultat. En effet on déduit facilement de l'équation (22):

$$-\frac{2}{n^2}(\psi^2+n\psi') = [t]_x + \frac{1}{72}\,\frac{35t^2-40t+32}{t^2(1-t)^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2,$$

ayant posé:

$$[t]_x = \frac{d^2\log\frac{dt}{dx}}{dx^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{d\log\frac{dt}{dx}}{dx}\right]^2;$$

et en substituant dans cette dernière la valeur de $\Phi$ donnée par l'équation (23) on arrive au résultat suivant:

$$(24) \qquad -2P = [t]_x + \frac{Lt^2+Mt+N}{2t^2(1-t)^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2$$

étant:

$$L = 1 - \frac{n^2}{6^2(n-2)^2}, \qquad M = -\frac{10}{9} + \frac{n-1}{9(n-2)^2}, \qquad N = \frac{8}{9},$$

ou aussi:

$$L = 1 - m^2, \qquad M = -(1-l^2-m^2+n^2), \qquad N = 1-l^2,$$

les $l$, $m$, $n$ ayant les valeurs:

$$(25) \qquad l = \frac{1}{3}, \qquad m = \frac{n}{6(n-2)}, \qquad n = \frac{1}{2}.$$

L'équation (24) donne en général la valeur de $P$ correspondante à chaque fonction $t(x)$; et en supposant:

$$-2P = \frac{Ax^2+Bx+C}{2x^2(1-x)^2}$$

et:

$$A = 1-\mu^2, \qquad B = -(1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2), \qquad C = 1-\lambda^2$$

l'équation même répond au problème de M$^r$. Klein (Math. Annalen Bd. XI, p. 118). Dans ce cas l'équation (24) ou la suivante:

$$[t]_x + \frac{Lt^2+Mt+N}{2t^2(1-t)^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - \frac{Ax^2+Bx+C}{2x^2(1-x)^2} = 0$$

a été l'objet des récherches de M$^r$. Kummer rappellées ci-dessus, par lesquelles on sait que la valeur de $t(x)$ peut s'obtenir au moyen des séries hypergéométriques de Gauss.

Je supposerai dans la suite que la fonction $\varrho(x)$ puisse s'exprimer de cette manière:

$$(26) \qquad \varrho(x) = \delta x^r(1-x)^{s-r}$$

étant, $\delta$ constant; $r$, $s$ deux nombres entiers et positifs; et je vais déterminer *toutes* les fonctions $t(x)$ corréspondantes. La valeur de $\Phi$ sera dans ces cas:

$$\Phi = \frac{n^2}{12^2}\,\frac{ax^2+bx+c}{x^2(1-x)^2}$$

étant:

$$a = s(s-12) + 36A,$$
$$b = -2r(s-12) + 36B,$$
$$c = r(r-12) + 36C,$$

ou aussi:

$$(27)\qquad \begin{cases} a = (s-6)^2 - 36\mu^2, \\ a+b+c = (s-r-6)^2 - 36\nu^2, \\ c = (r-6)^2 - 36\lambda^2. \end{cases}$$

L'équation (21) donnera:

$$(28)\qquad t = k\,\frac{(ax^2+bx+c)^3}{x^{6-r}(1-x)^{6-s+r}},$$

où:

$$k = \frac{\delta}{12^6\cdot(n-1)^3 C^6 m^3}$$

et de l'équation (23) on déduira:

$$(29)\qquad \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{n-2}{2\sqrt{n-1}}\,\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x(1-x)}\,dx.$$

L'élimination de $t$ des équations (28), (29) conduit à l'équation identique:

$$(30)\qquad (n-2)^2 Q - 4(n-1)kR^2 = 0,$$

dans laquelle:

$$Q = x^{6-r}(1-x)^{6-s+r} - k(ax^2+bx+c)^3,$$
$$R = -(s-12)x(ax^2+bx+c) + (r-6)(ax^2+bx+c) + 3x(1-x)(2ax+b)$$

et par celle-ci on aura les valeurs de $a$, $b$, $c$, $k$.

Je supposerai $r<6$, $s-r<6$, $s>6$; et en posant $x=0$, $1$, $\infty$ dans l'équation (30) on obtiendra:

pour $x=0$, $\quad c=0$, ou $\quad c = -4\frac{n-1}{(n-2)^2}(6-r)^2$,

„ $x=1$, $\quad a+b+c=0$, „ $\quad a+b+c = -4\frac{n-1}{(n-2)^2}(6-s+r)^2$,

„ $x=\infty$, $\quad a=0$, „ $\quad a = -4\frac{n-1}{(n-1)^2}(s-6)^2$.

Les nombres $r$, $s$ doivent par conséquent à cause des relations (27) satisfaire à l'une ou à l'autre des conditions:

$$(31)\qquad \begin{cases} r = 6(1-\lambda), \text{ ou } r = 6\left(1-\frac{n-2}{n}\lambda\right), \\ s-r = 6(1-\nu), \text{ „ } s-r = 6\left(1-\frac{n-2}{n}\nu\right), \\ s = 6(1+\mu), \text{ „ } s = 6\left(1+\frac{n-2}{n}\mu\right), \end{cases}$$

et dans ces différents cas on aura:

$$c = 0, \text{ ou } \qquad c = -\overline{12}^2 \frac{n-1}{n^2}\lambda^2,$$

$$a+b+c = 0, \text{ „ } \quad a+b+c = -\overline{12}^2 \frac{n-1}{n^2}\nu^2,$$

$$a = 0, \text{ „ } \qquad a = -\overline{12}^2 \frac{n-1}{n^2}\mu^2.$$

L'élimination de $r$, $s$ de trois rélations (31) coexistantes conduit aux trois types de conditions entre les $\lambda$, $\mu$, $\nu$:

$$\lambda+\mu+\frac{n-2}{n}\nu = 1, \quad \lambda+\frac{n-2}{n}\mu+\frac{n-2}{n}\nu = 1, \quad \lambda+\mu+\nu = \frac{n}{n-2}$$

et aux autres qu'on peut déduire en permutant les $\lambda$, $\mu$, $\nu$.

Au moyen de ces formules j'ai calculé le tableau suivant qui correspond à celui que M$^r$. Schwarz a donné dans son important travail: „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt" (Journal für Mathematik Bd. 75).

| N°. | $\lambda$ | $\mu$ | $\nu$ | $r$ | $s-r$ | $\delta$ | $t(x)$ | Polyèdre |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| II°. | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 4 | 3 | $3^6\cdot 4^6\cdot C^6 m^3$ | $x$ | |
| III°. | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 4 | 4 | $3^6\cdot 4^4\cdot C^6 m^3$ | $-\frac{4x}{(1-x)^2}$ | Tétraèdre |
| IV°. | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 4 | 3 | $4^6\cdot 6^6\cdot C^6 m^3$ | $x$ | |
| V°. | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | 5 | 2 | $4^5\cdot 6^6\cdot C^6 m^3$ | $-\frac{(1-x)^2}{4x}$ | Octaèdre |
| VI°. | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | 4 | 3 | $K$ | $x$ | |
| VII°. | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | 4 | 4 | $\frac{1}{16}K$ | $-\frac{4x}{(1-x)^2}$ | |
| VIII°. | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | 5 | 2 | $\frac{1}{4}K$ | $-\frac{(1-x)^2}{4x}$ | |
| IX°. | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | 4 | 3 | $-\frac{1}{27}K$ | $-\frac{(x-4)^3}{27x^2}$ | Icosaèdre |
| X°. | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | 4 | 3 | $\frac{1}{64}K$ | $-\frac{1}{4^3}\frac{x(x+8)^3}{(1-x)^3}$ | $K = 12^6\cdot s^6\cdot C^6 m^3$ |
| XI°. | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 4 | 4 | $-\frac{1}{3^3\cdot 4^2}K$ | $\frac{4}{27}\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(1-x)^2}$ | |
| XIII°. | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | 5 | 2 | $-\frac{1}{3^3\cdot 4}K$ | $\frac{1}{4\cdot 27}\frac{(x^2+14x+1)^3}{x(1-x)^4}$ | |

Comme on voit les types XII, XIV, XV de M$^r$. Schwarz ne sont pas contenus dans ce tableau; ils doivent par conséquent corre-

spondre à des expressions de $\varrho(x)$ différentes de celle considerée ici. Les autres valeurs des nombres $r$, $s-r$ qui ne sont pas comprises dans le tableau corréspondent aux différentes permutations de $\lambda$, $\mu$, $\nu$; ainsi en désignant par $t(r, s-r, x)$ une fonction $t$ on aurait, par exemple, pour le type sixième que les fonctions:

$$t\left(4, 3, x\right), \quad t\left(3, 4, 1-x\right), \quad t\left(5, 3, \frac{1}{x}\right), \quad t\left(3, 5, \frac{x-1}{x}\right),$$

$$t\left(5, 4, \frac{1}{1-x}\right), \quad t\left(4, 5, \frac{x}{x-1}\right)$$

sont chacune $= x$.

La recherche de la valeur de la fonction $t(x)$ en d'autres cas peut évidemment se faire en suivant la méthode exposée ci-dessus.

# Ueber Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von A. V. Bäcklund in Lund.

Da die $2n$-fach unendlich vielen Flächenelemente eines Raumes von $n+1$ Dimensionen, die durch irgend eine partielle Differentialgleichung 1. O.:

$$f(z x_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n) = 0$$

ausgeschieden werden, sich stets zu Schaaren $M_n$ zusammenfassen lassen, d. h. zu $n$-fachen Schaaren von Flächenelementen, deren jedes mit allen ihm unendlich benachbarten, zu derselben Schaar gehörenden Elementen vereinigt liegt, — so werden die von mehreren partiellen Gleichungen 1. O. bestimmten Flächenelemente im Allgemeinen nicht zu $M_n$ zusammengeordnet werden können. Nur wenn ein Involutionssystem*) vorliegt, fügen sich alle Flächenelemente des Systems zu $M_n$ zusammen, und wenn nicht alle Flächenelemente eines Systems, aber doch eine Mannigfaltigkeit derselben in $M_n$ sich zerlegen lassen, so ist das System nothwendig ein Bestandtheil eines Involutionssystems. — Wie man von gegebenen partiellen Differentialgleichungen 1. O. über das Vorhandensein derartiger $M_n$, Integral-$M_n$, entscheidet, und wie man sodann zu deren Ermittelung zu verfahren hat, ist in neuester Zeit ausführlich von Lie und Mayer, besonders von Lie, erörtert worden; dagegen ist, so viel ich weiss, die allgemeinere Aufgabe**), für ein System beliebiger partieller Differentialgleichungen 1. O. ein möglichst einfaches Verfahren anzugeben, vermittelst dessen man alle Flächenelemente des Systems zu Schaaren $M_k$ von der grösstmöglichen Zahl $k$ zusammenordnen könnte, noch nicht einer eingehenderen Behandlung unterworfen worden. Pfaff's Theorie***) der linearen Differentialausdrücke

*) Ich verstehe darunter ein jedes solches System, das *durch seine Flächenelemente* die Relationen der Involution $[f_i f_k] = 0$ befriedigt.

**) Sie ist wohl zuerst von Klein: „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872, p. 34" besonders ausgesprochen worden.

***) Veröffentlicht in den Abhandl. der k. Akademie der Wissenschaften in Berlin 1815. Man sehe auch Clebsch: „Ueber das Pfaff'sche Problem. Crelle-Borchardt's Journal Bd. 60 u. 61.

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p$$

muss selbstverständlich das letztgenannte Problem umfassen, und zwar stellt sie die Lösung desselben in folgender Weise dar:

Seien

$$(A) \qquad \begin{cases} f\,(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = 0, \\ f_1\,(\qquad\qquad\qquad\quad) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_k\,(\qquad\qquad\qquad\quad) = 0 \end{cases}$$

die vorgelegten Gleichungen und lassen sie sich nach $p_1 \cdots p_{k+1}$ etwa in folgender Form:

$$(B) \qquad \begin{cases} p_1 = \varphi_1 \quad (z x_1 \cdots x_n p_{k+2} \cdots p_n), \\ p_2 = \varphi_2 \quad (\qquad\qquad\qquad\quad), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{k+1} = \varphi_{k+1}(\qquad\qquad\qquad\quad) \end{cases}$$

auflösen, so geht, wegen dieser Gleichungen, der Differentialausdruck

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n$$

in einen, nur die Buchstaben $z x_1 \cdots x_n p_{k+2} \cdots p_n$ enthaltenden Ausdruck

$$dz - \varphi_1 dx_1 - \cdots - \varphi_{k+1} dx_{k+1} - p_{k+2} dx_{k+2} - \cdots - p_n dx_n$$

über. Die Pfaff'sche Theorie linearer Differentialausdrücke lehrt nun, diesen Ausdruck auf eine Form mit der kleinstmöglichen Anzahl von Gliedern:

$$F_1 d\chi_1 + F_2 d\chi_2 + \cdots + F_\nu d\chi_\nu$$

zu bringen. — Die Gleichungen

$$\chi_1 = c_1, \quad \cdots \quad \chi_\nu = c_\nu$$

mit den willkürlichen Constanten $c_1$, $c_2 \cdots c_\nu$ stellen dabei die gesuchten Integral-$M_\varkappa$, von der grösstmöglichen Zahl $\varkappa$, der Gleichungen (B) dar. Durch Elimination der Grössen $p_{k+2} \cdots p_n$ aus den Gleichungen $\chi = c$ bekommt man die Gleichungen derjenigen Punkt-Mannigfaltigkeiten im Raume $(zx)$, an die die Flächenelemente der bezüglichen $M_\varkappa$ sich anschliessen. —

Durch die nächstfolgenden Ueberlegungen bin ich zu einer Methode geführt worden, die das nämliche Problem erledigt, ohne eine Auflösung der Gleichungen (A) hinsichtlich ebensovieler der Grössen $p$ vorauszusetzen. Als Grundlage meiner Untersuchung dient die Theorie der Lie'schen Berührungstransformationen, — die, wie Mayer im VIII. Bande der Mathematischen Annalen dargelegt hat, unabhängig von der Pfaff'schen Theorie sich entwickeln lässt, — oder, was damit am nächsten zusammenhängt, die Theorie der Involutionssysteme.

Im zweiten Paragraphen setze ich, indem ich nur einen früher von mir im IX. Bande der Mathematischen Annalen angewandten Weg verfolge, die aus den Erörterungen des ersten Paragraphen nebenbei sich ergebende Abbildung eines Gleichungssystems eines Raumes $r_{n+1}$ auf einen Raum kleinerer Dimensionszahl auseinander.

## § 1.

### Aufstellung der Gleichungen, die das Problem lösen.

**1.** Aus den Flächenelementen eines Raumes $r_{n+1}$ seien $2n$-fach unendlich viele durch eine partielle Gleichung 1. O.:

$$f(zx_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n) = 0 \tag{1}$$

ausgeschieden, und es sei überdies irgend eine Berührungstransformation

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = f\ (zx_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n), \\ X_2 = \varphi_2(\quad\quad\quad\quad\quad\quad), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = \varphi_n(\quad\quad\quad\quad\quad\quad), \\ Z\ = \varphi\ (\quad\quad\quad\quad\quad\quad), \\ P_1 = \psi_1(\quad\quad\quad\quad\quad\quad), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n = \psi_n(\quad\quad\quad\quad\quad\quad) \end{array}\right. \tag{2}$$

bestimmt, die $X_1 = f$ als erste Gleichung enthält.

Diese Transformation führt die *auf die Flächenelemente der Gleichung* (1) *sich beziehende* Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0 \tag{3}$$

über in die folgende:

$$dZ - P_2 dX_2 - \cdots - P_n dX_n = 0, \tag{3'}$$

für welche, indem $ZX_2 \cdots X_n\ P_2 \cdots P_n$ von einander unabhängig sind, die Gleichungen

$$Z = c, \quad X_2 = c, \cdots X_n = c$$

ein Integral bilden*). Jedem Elemente $(ZX_2 \cdots X_n\ P_2 \cdots P_n)$ entsprechen $\infty^1$ Elemente $(ZX_1\ (=0)\ X_2 \cdots X_n\ P_1 \cdots P_n)$ und also $\infty^1$ Elemente $(zx_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n)$. Eine jede Integral-$M_{n-1}$ von (3') wird daher in eine Integral-$M_n$ von (3) übergehen.

*) Die allgemeinste Integral-$M_{n-1}$ der Gleichung (3') ist durch eine beliebige Punkt-Mannigfaltigkeit des Raumes $(ZX_2 \cdots X_n)$, d. i. des Raumes $X_1 = 0$, dargestellt.

Die Gleichungen

$$\varphi = C, \quad \varphi_2 = C, \cdots \varphi_n = C \tag{4}$$

stellen folglich eine Integral-$M_n$ der Gleichung (3) dar, oder sie geben eine Integral-$M_n$ der Gleichung (1) an, zu deren Darstellung in Punkt-Coordinaten eine Elimination der $p_i$ zwischen (1) und (4) führen würde. Und in dieser Weise muss eine jede Integral-$M_n$ von (1) erhalten werden können, so dass die Regel für die Herstellung der Integral-$M_n$ der Gleichung (3) oder (1) lautet:

Man bestimme eine beliebige Function $\varphi$, die der Gleichung

$$[f\varphi] = 0$$

genügt, sodann irgend welche $n-1$ andere, von $f$, $\varphi$ und von einander unabhängige Functionen $\varphi_2, \cdots \varphi_n$, die mit $f$, $\varphi$ ein Involutionssystem bilden. — Es sind dann:

$$\varphi = C, \quad \varphi_2 = C, \cdots \varphi_n = C$$

die Gleichungen einer beliebigen Integral-$M_n$ von $f = C$, oder von der dieser Gleichung entsprechenden Gleichung (3).

Die den voranstehenden Functionen $f$, $\varphi$ zugehörenden Functionen $\psi_2, \cdots \psi_n$ bestimmen sich nachher eindeutig durch blosse Differentiation; sie erfüllen aber ebenfalls die Gleichungen:

$$[f\psi_i] = 0, \quad [\psi_i \psi_k] = 0, \quad (i, k = 2, 3, \cdots n),$$

und ausser diesen die Gleichungen:

$$[\varphi_i \psi_k] = 0,$$

in denen $i$, $k$ verschiedene Zahlen bedeuten*).

2. Kommt eine zweite Gleichung hinzu:

$$f_1(zx_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n) = 0, \tag{5}$$

*die mit der vorigen Gleichung* (1) *keine Integral-$M_n$ gemeinsam hat,* und ist die Aufgabe vorgelegt, die Integral-$M_\nu$ von der grösstmöglichen Dimensionszahl $\nu$ des Systems (1), (5) zu bestimmen, so ist ohne Weiteres klar, dass diese $M_\nu$ diejenigen $M_{n-1}$ sind, die auf den Integral-$M_n$ der Gleichung (1) durch die Gleichung (5) ausgeschieden werden. —

Ist aber noch eine dritte Gleichung vorhanden:

$$f_2(zx_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n) = 0, \tag{6}$$

die weder mit (1) noch mit (5) eine Integral-$M_n$ gemeinsam hat, so würde man zur Erledigung der ähnlichen Aufgabe hinsichtlich des Systems der drei Gleichungen (1), (5), (6) in folgender Art gelangen können:

---

*) Zu dieser Nummer vergleiche man, ausser der oben citirten Abhandlung von Mayer, die Arbeiten von Lie in diesen Annalen Bd. VIII, IX.

Die Gleichungen (5), (6) werden zunächst durch die Berührungstransformation (2) verwandelt in zwei Gleichungen:

$$F_1(ZX_1 \cdots X_n\ P_1 \cdots P_n) = 0, \tag{7}$$

$$F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \tag{8}$$

die keine Integral-$M_n$ gemein haben. Durch die Substitution $X_1 = 0$ und nachherige Elimination von $P_1$ geht eine Gleichung

$$\Phi_{12}(ZX_2 \cdots X_n\ P_2 \cdots P_n) = 0 \tag{9}$$

hervor. — Das Problem, die gemeinsamen Flächenelemente der Gleichungen (1), (5), (6) zu Schaaren von der Eigenschaft:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0,$$

zusammenzuordnen, wird somit identisch mit dem Probleme, die Flächenelemente $(ZX_2 \cdots X_n\ P_2 \cdots P_n)$ der partiellen Differentialgleichung (9) des Raumes $r_n$:

$$r_n \cdot \cdots \cdot (ZX_2 \cdots X_n),$$

zu Schaaren von der Eigenschaft: $dZ - P_2 dX_2 - \cdots - P_n dX_n = 0$, zusammenzuordnen. Die Integral-$M_{n-1}$ der Gleichung (9) bilden diejenigen Schaaren dieser Eigenschaft, die von der grösstmöglichen Dimensionszahl sind.

Jedem Elemente $(ZX_2 \cdots X_n\ P_2 \cdots P_n)$ einer solchen Schaar entspricht, vermöge irgend einer der Gleichungen (7), (8), ein Werth von $P_1$, sodann ein Element $(ZX_1\ (=0)\ X_2 \cdots X_n\ P_1 \cdots P_n)$, sodann, auf Grund der Gleichungen (2) der Berührungstransformation, ein dem Systeme der drei Gleichungen (1), (5), (6) zugehörendes Element $(\varepsilon x_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n)$*). Eine jede der besprochenen Integral-$M_{n-1}$ der Gleichung (9) wird folglich zu einer Integral-$M_{n-1}$ unseres im Raume $r_{n+1}$ gelegenen Gleichungssystems Anlass geben. Diese $M_{n-1}$ bilden die gesuchten Integral-$M_\nu$ von der grösstmöglichen Zahl $\nu$.

Aus dem in der 1. Nummer Entwickelten folgt nunmehr die algebraische Lösung der Aufgabe: Man bestimme $n-1$ Functionen $\Omega(ZX_2 \cdots X_n\ P_2 \cdots P_n)$, die der Gleichung

$$[\Phi_{12}\Omega]_{r_n} = 0$$

genügen, und überdies mit einander und mit $\Phi_{12}$ ein Involutionssystem im Raume $r_n$ bilden. Oder, — was auf dasselbe hinauskommt, — man führe die *auf die Gleichung* (9) *sich beziehende* Differentialgleichung:

$$dZ - P_2 dX_2 - \cdots - P_n dX_n = 0$$

in die Form:

$$dZ - P_3' dX_3' - \cdots - P_n' dX_n' = 0$$

über. — Die Functionen

*) Ein Element oder einige solche Elemente.

$$Z' X_3' \cdots X_n'$$
$$P_3' \cdots P_n',$$

von denen die der ersten Reihe die gesuchten Integrale definiren, werden nachher durch die Gleichungen (2) in Functionen von $zx_1 \cdots x_n$ $p_1 \cdots p_n$, den Variablen des ursprünglichen Raumes $r_{n+1}$, verwandelt.

Diese Rechnung muss doch selbstverständlich so umgestaltet werden können, dass sie die Lösung unabhängig von der angewandten Transformation (2) macht, also dieselbe in einer Form darstellt, die nur auf die vorgelegten Gleichungen (1), (5), (6) sich bezieht. In den 5.—7. Nummern wird die fragliche Rechnung ausgeführt werden. —

**3.** Fügen wir zu den drei vorhin betrachteten Gleichungen (1), (5), (6) eine vierte Gleichung

$$f_3 (zx_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n) = 0 \tag{10}$$

hinzu. — Falls sie mit den drei ersteren Gleichungen Integral-$M_{n-1}$ gemeinsam hat, so muss, wenn dieselbe durch die Gleichungen (2) in die Form

$$F_3 (Z X_1 \cdots X_n\ P_1 \cdots P_n) = 0$$

gebracht wird, und hierin $X_1 = 0$ gesetzt und vermittelst (7) die Grösse $P_1$ eliminirt, die resultirende Gleichung

$$\Phi_{13} (Z X_2 \cdots X_n\ P_2 \cdots P_n) = 0, \tag{11}$$

als partielle Differentialgleichung des Raumes $r_n$ aufgefasst, mit der Gleichung (9) Integral-$M_{n-1}$ gemein haben. Diese wird man in der gewöhnlichen Weise erhalten können.

Für die übrig gebliebenen Flächenelemente des Systems (1), (5), (6), (10) erhält — vorausgesetzt, dass die Gleichungen

$$\Phi_{12} = 0, \quad \Phi_{13} = 0$$

nicht involutorisch sind, in welchem Falle alle Flächenelemente unseres Systems zu $M_{n-1}$ zusammengehen, — das Integrationsproblem dieselbe Form wie für Systeme, die keine Integral-$M_{n-1}$ besitzen. Nun ist unser Gleichungssystem auf die zwei Gleichungen (9) und (11) reducirt, und seine Integral-$M_{n-2}$ sind daher nach dem früher in Betreff zweier Gleichungen des Raumes $r_{n+1}$ beschriebenen Verfahren zu bestimmen.

**4.** Ist noch eine fünfte Gleichung vorhanden:

$$f_4 (zx_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n) = 0, \tag{12}$$

und wird dieselbe vermittelst der Gleichungen (2), der Gleichung $X_1 = 0$ und der Gleichung (7) in die Form:

$$\Phi_{14} (Z X_2 \cdots X_n\ P_2 \cdots P_n) = 0 \tag{13}$$

gebracht, so sehen wir zunächst, dass, falls die Gleichungen $\Phi_{12}=0$, $\Phi_{13}=0$, $\Phi_{14}=0$ zu je zweien involutorisch sind, für das System der fünf Gleichungen (1), (5), (6), (10), (12) Integral-$M_{n-1}$ existiren, so dass alle Flächenelemente dieses Systems zu $M_{n-1}$ sich zusammenordnen lassen. Wenn aber die genannte Bedingung nicht erfüllt ist, so existiren auch keine Integral-$M_{n-1}$, die sämmtliche Flächenelemente des Systems enthalten, und die Lösung des Integrationsproblems nimmt nun die folgende Form an (Nr. 2.):

Man führe durch die von den Functionen der 2. Nummer:

$$Z'\,\Phi_{12}\,X_3'\cdots X_n'$$

definirte Berührungstransformation die Gleichungen (11) und (13) über in zwei Gleichungen:

$$\Psi_{13}\,(Z'X_2'X_3'\cdots X_n'\;P_2'P_3'\cdots P_n')=0,$$
$$\Psi_{14}\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)=0,$$

aus denen sich durch Substitution von $X_2'\,(=\Phi_{12})=0$ und Elimination von $P_2'$ die Gleichung ergebe:

$$\Phi_{134}\,(Z'X_3'\cdots X_n'\;P_3'\cdots P_n')=0; \tag{14}$$

durch welche also jetzt das ursprüngliche Gleichungssystem des Raumes $r_{n+1}$ vertreten wird. Von den Integral-$M_{n-2}$ derselben steigt man durch zweimalige Substitution zu den Integralen jenes Systems im Raume $r_{n+1}$ auf.

Die auf das fragliche Gleichungssystem sich beziehende Differentialgleichung:

$$dz-p_1dx_1-\cdots-p_ndx_n=0$$

ist hierdurch auf eine auf die Gleichung (14) sich beziehende Gleichung:

$$dZ'-P_3'dX_3'-\cdots-P_n'dX_n'=0$$

reducirt. In die Form:

$$dZ''-P_4''dX_4''-\cdots-P_n''dX_n''=0$$

gebracht, liefert sie die Gleichungen:

$$Z''=c,\quad X_4''=c,\cdots X_n''=c$$

als Integrale unseres Systems.

Und in dieser Weise kann man, wenn noch mehrere Gleichungen vorliegen, weiter gehen. Aber die hierauf sich stützende Rechnung, die jetzt vorgetragen werden soll, giebt ein weit einfacheres Verfahren an, um die Lösungen der bez. Probleme zu gewinnen.

5. Es wurde in der 2. Nummer die Bestimmung aller Integral-$M_{n-1}$ dreier Gleichungen:

$$f(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = 0,$$
$$f_1( \quad ) = 0,$$
$$f_2( \quad ) = 0$$

auf die Bestimmung von Lösungen $\Omega_1'$, $\Omega_2' \cdots \Omega_{n-1}'$ des folgenden Gleichungssystems des Raumes $r_n$:

$$[\Phi_{12}\Omega_i'] = 0, \quad [\Omega_i'\Omega_k'] = 0 \tag{15}$$

zurückgeführt. Aber die erste Gleichung sagt nichts Anderes aus, behaupte ich, als dass es eine Reihe von Werthen von

$$\frac{d\Omega}{dZ} = \frac{d\Omega'}{dZ} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dZ} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dZ},$$
$$\frac{d\Omega}{dX_i} = \frac{d\Omega'}{dX_i} + \lambda \frac{dX_1}{dX_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dX_i} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dX_i},$$
$$\frac{d\Omega}{dP_i} = \frac{d\Omega'}{dP_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dP_i} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dP_i}, \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

(wo $\lambda$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ unbestimmte Parameter*) bedeuten)

giebt, die den folgenden, auf die Flächenelemente von

$$X_1 = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0$$

sich beziehenden Relationen genügen:

$$[X_1\Omega_i] = 0, \quad [F_1\Omega_i] = 0, \quad [F_2\Omega_i] = 0, \tag{16}$$

wo die Involutionszeichen auf den Raum $(Z X_1 \cdots X_n)$ sich beziehen.

Man ersieht nämlich durch Substitution der soeben angegebenen Ausdrücke von $\frac{d\Omega_i}{dZ}$, $\frac{d\Omega_i}{dX_k}$, $\frac{d\Omega_i}{dP_k}$, dass Werthe von $\lambda$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ sich so bestimmen lassen, dass die Gleichungen (16) erfüllt werden, — *vorausgesetzt dass* $\Omega_i'$ $(Z X_2 \cdots X_n P_2 \cdots P_n)$ *die auf die Flächenelemente von* $X_1 = 0$, $F_1 = 0$ *sich beziehende Gleichung befriedigt:*

$$\frac{dF_1}{dP_1}\left[F_2\Omega_i'\right]_{Z X_2 \ldots X_n} - \frac{dF_2}{dP_1}\left[F_1\Omega_i'\right]_{Z X_2 \ldots X_n} = 0^{**}).$$

Dies ist aber, da $\Phi_{12}$ gleich $F_2$ ist, nachdem darin $X_1 = 0$ und für $P_1$ dessen Werth aus $F_1 = 0$ gesetzt worden ist, gerade die Gleichung***):

---

*) D. h. unbestimmte Functionen von $Z X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n$.

**) Zur Abkürzung:

$$[F\Omega']_{Z X_2 \ldots X_n} = \sum_{i=2}^{i=n}\left(\frac{dF}{dX_i} + P_i\frac{dF}{dZ}\right)\frac{d\Omega'}{dP_i} - \sum_{i=2}^{i=n}\left(\frac{d\Omega'}{dX_i} + P_i\frac{d\Omega'}{dZ}\right)\frac{dF}{dP_i}.$$

***) Es besteht nämlich, vorausgesetzt dass $\Phi_{12}$ in der oben angegebenen Weise aus $F_2$ und $F_1 = 0$ hervorgegangen ist, die Formel:

$$\frac{dF_1}{dP_1}\left[\Phi_{12}\Omega'\right]_{r_n} = \frac{dF_1}{dP_1}\left[F_2\Omega'\right]_{Z X_2 \ldots X_n} - \frac{dF_2}{dP_1}\left[F_1\Omega'\right]_{Z X_2 \ldots X_n}.$$

$$[\Phi_{12}\Omega_i'] = 0,$$

zu der folglich die Gleichungen (16) sich zusammenziehen. Wie behauptet war.

**6.** Die Form, unter der die Gleichungen (16) die Lösung unseres Integrationsproblems darstellen, ist desshalb bemerkenswerth, weil sie ohne Weiteres zu Gleichungen in $zx_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n$ führt, die eine auf die ursprünglich gegebenen Functionsformen $f, f_1, f_2$ sich beziehende Lösung liefern. Man schliesst nämlich aus (16), *dass die Integral-$M_{n-1}$ des Systems der drei Gleichungen*:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} f\,(zx_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = C_0, \\ f_1\,(\qquad\qquad\qquad\quad) = C_1, \\ f_2\,(\qquad\qquad\qquad\quad) = C_2, \end{cases}$$

wo $C_0, C_1, C_2$ bestimmte Zahlenwerthe oder Null bezeichnen, *durch Functionen $\varpi_i(zx_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n)$ ausgedrückt sein müssen, die, in Bezug auf die Flächenelemente des Systems, den folgenden Gleichungen genügen:*

$$\text{(b)} \qquad [f\varpi_i] = 0, \quad [f_1\varpi_i] = 0, \quad [f_2\varpi_i] = 0.$$

*Dass aber eine Function $\varpi_i$ in Bezug auf alle Flächenelemente von* (a) *den Gleichungen* (b) *genügt, bedeutet nur das, dass die Schnittmannigfaltigkeit zwischen $\varpi_i = C$ und den Gleichungen* (a), *diese Schnittmannigfaltigkeit als Punktmannigfaltigkeit des $(2n+1)$-fachen Raumes $(zxp)$ aufgefasst, durch irgend eine Schaar ihrer Elemente,* — die alle bestimmt sind durch Ausdrücke von der Form:

$$\frac{d\varpi_i}{dx_k} + \lambda\,\frac{df}{dx_k} + \lambda_1\,\frac{df_1}{dx_k} + \lambda_2\,\frac{df_2}{dx_k},$$

$$\frac{d\varpi_i}{dp_k} + \lambda\,\frac{df}{dp_k} + \lambda_1\,\frac{df_1}{dp_k} + \lambda_2\,\frac{df_2}{dp_k},$$

$$\frac{d\varpi_i}{dz} + \lambda\,\frac{df}{dz} + \lambda_1\,\frac{df_1}{dz} + \lambda_2\,\frac{df_2}{dz},$$

wo $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ variable Parameter bedeuten, — *dem Systeme* (b) *genügt.*

Werden nun vermittelst (a) drei von den Grössen $p$, etwa $p_1, p_2, p_3$ eliminirt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, anstatt $p_1, p_2, p_3$ die Functionen $f, f_1, f_2$ als Variablen eingeführt, wobei $\varpi_i$ übergeht etwa in

$$\varpi_i'(zx_1 \cdots x_n\, p_4 \cdots p_n\, f\, f_1 f_2)$$

(was durch die weitere Substitution von $C_0, C_1, C_2$ statt $f, f_1, f_2$ eine Function von $zx_1 \cdots x_n\, p_4 \cdots p_n$ allein wird), — so sind die Elemente der eben besprochenen Schnittmannigfaltigkeit einfach so darzustellen:

$$\frac{d\varpi_i'}{dx_k} + \frac{d\varpi_i'}{df}\,\frac{df}{dx_k} + \frac{d\varpi_i'}{df_1}\,\frac{df_1}{dx_k} + \frac{d\varpi_i'}{df_2}\,\frac{df_2}{dx_k},$$

$$\frac{d\varpi_i'}{dp_k} + \frac{d\varpi_i'}{df}\frac{df}{dp_k} + \frac{d\varpi_i'}{df_1}\frac{df_1}{dp_k} + \frac{d\varpi_i'}{df_2}\frac{df_2}{dp_k},$$

$$\frac{d\varpi_i'}{dz} + \frac{d\varpi_i'}{df}\frac{df}{dz} + \frac{d\varpi_i'}{df_1}\frac{df_1}{dz} + \frac{d\varpi_i'}{df_2}\frac{df_2}{dz},$$

wo $\frac{d\varpi_i'}{df}$, $\frac{d\varpi_i'}{df_1}$, $\frac{d\varpi_i'}{df_2}$ gerade die variablen Parameter vorstellen. — Folglich giebt (b):

$$[f\varpi_i] = [f\varpi_i'] + \frac{d\varpi_i'}{df_1}[ff_1] + \frac{d\varpi_i'}{df_2}[ff_2] = 0^*),$$

$$[f_1\varpi_i] = [f_1\varpi_i'] + \frac{d\varpi_i'}{df}[f_1 f] + \frac{d\varpi_i'}{df_2}[f_1 f_2] = 0,$$

$$[f_2\varpi_i] = [f_2\varpi_i'] + \frac{d\varpi_i'}{df}[f_2 f] + \frac{d\varpi_i'}{df_1}[f_2 f_1] = 0.$$

Durch Elimination von $\frac{d\varpi_i'}{df}$, $\frac{d\varpi_i'}{df_1}$ entsteht:

(17) $$[f_1 f_2][f\varpi_i'] + [f_2 f][f_1\varpi_i'] + [ff_1][f_2\varpi_i'] = 0^{**}),$$

aus welcher Gleichung $p_1$, $p_2$, $p_3$ durch die Gleichungen (a) entfernt werden mögen.

Auf diese einzige Gleichung zwischen $2n-2$ Variablen $z x_1 \cdots x_n$ $p_1 \cdots p_n$ ist somit das Gleichungssystem (a), (b) reducirt.

Die zweite der Gleichungen (15) lautet:

$$[\varpi_i \varpi_k] = 0$$

für alle Elemente unseres Systems. Indem wir, wie vorher, $\varpi_i'$ statt $\varpi_i$ und ebenso $\varpi_k'$ statt $\varpi_k$ einführen, bekommen wir in erster Hand:

$$[\varpi_i \varpi_k] = [\varpi_i' \varpi_k],$$

und dann weiter:

$$[\varpi_i \varpi_k] = [\varpi_i' \varpi_k'] - \frac{d\varpi_k'}{df}[f\varpi_i'] - \frac{d\varpi_k'}{df_1}[f_1\varpi_i'] - \frac{d\varpi_k'}{df_2}[f_2\varpi_i'] = 0,$$

schliesslich:

$$[f_1 f_2][\varpi_i'\varpi_k'] + [f_2\varpi_i'][f_1\varpi_k'] + [\varpi_i' f_1][f_2\varpi_k'] = 0;$$

gerade die Form, die die Gleichung (17) annehmen würde, wenn $f$ mit $\varpi_k'$ wäre vertauscht worden.

---

*) $[f\varpi_i'] = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{df}{dx_k} + p_k\frac{df}{dz}\right)\frac{d\varpi_i'}{dp_k} - \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varpi_i'}{dx_i} + p_i\frac{d\varpi_i'}{dz}\right)\frac{df}{dp_i}$; — vor den Differentiationen von $\varpi_i'$ statt der in dieser Function auftretenden $f$, $f_1$, $f_2$ die Constanten $C_0$, $C_1$, $C_2$ gesetzt.

**) Es gilt auch für eine beliebige Function $v$ folgende Formel, in der $V$ diejenige Function von $Z X_2 \cdots X_n P_2 \cdots P_n$ bezeichnet, die aus $v$ durch $X_1 = 0$, $F_1 = 0$ und die Gleichungen (2) erhalten wird:

$$[X_1 P_1][ff_1][\Phi_{12} V]_{r_n} = [f_1 f_2][fv'] + [f_2 f][f_1 v'] + [ff_1][f_2 v'].$$

Oder nachdem ein Integral $\varpi_i' = C$ der Gleichung (17) gefunden ist, würde mit Hülfe dieses Integrals noch eine der Grössen $p$, etwa $p_4$, eliminirt werden können, oder es könnte $\varpi_i'$ statt $p_4$ als Variable eingeführt werden. Und das Gleichungspaar, das $\varpi_k'$ als Function von den Grössen:

(c) $$zx_1 \cdots x_n\, p_5 \cdots p_n$$

allein bestimmen sollte, nimmt dann die Form an:

$$(18)\quad \begin{cases} [f_1f_2][f\varpi_k'] + [f_2f][f_1\varpi_k'] + [ff_1][f_2\varpi_k'] = 0^*), \\ [f_1f_2][\varpi_i'\varpi_k'] + [f_2\varpi_i'][f_1\varpi_k'] + [\varpi_i'f_1][f_2\varpi_k'] = 0, \end{cases}$$

hieraus die Grössen $p_1, p_2, p_3, p_4$ durch die Gleichungen (a) und die Gleichung $\varpi_i' = C$ entfernt gedacht, so dass die Gleichungen (18) nur die $2n-3$ Grössen (c) als Variablen enthalten.

Die Bestimmung eines Integrals dieses Systems**) wird nach einem Theoreme von Mayer auf die Bestimmung eines Integrals eines Systems von $2n-5$ gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit $2n-4$ Variablen zurückgeführt, oder es ist, — ich benutze eine von Lie eingeführte Bezeichnung, — zur Bestimmung einer Gleichung $\varpi_k' = C$ eine Operation $2n-5$ ausreichend.

Jetzt wird, um die Bestimmung einer dritten Function $\varpi_i'$ zu erzielen, $\varpi_k'$ als Variable statt etwa $p_5$ eingeführt, wodurch die Gleichungen für $\varpi_i$, d. h. die Gleichungen (a), (b) neben den Gleichungen

$$[\varpi_i\varpi_i] = 0, \quad [\varpi_k\varpi_i] = 0,$$

auf drei sich reduciren, die nur $2n-4$ Variablen enthalten, nämlich auf die drei folgenden:

$$(19)\quad \begin{cases} [f_1f_2][f\varpi_i'] + [f_2f][f_1\varpi_i'] + [ff_1][f_2\varpi_i'] = 0^{***}), \\ [f_1f_2][\varpi_i'\varpi_i'] + [f_2\varpi_i'][f_1\varpi_i'] + [\varpi_i'f_1][f_2\varpi_i'] = 0, \\ [f_1f_2][\varpi_k'\varpi_i'] + [f_2\varpi_k'][f_1\varpi_i'] + [\varpi_k'f_1][f_2\varpi_i'] = 0, \end{cases}$$

aus denen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ vermittelst (a) und der Gleichungen $\varpi_i' = C$, $\varpi_k' = C'$ entfernt worden sind. Von diesen Gleichungen mit $2n-4$

*) Bei den Differentiationen von $\varpi_k'$ dieselbe nur als Function von

$$zx_1 \cdots x_n\, p_5 \cdots p_n$$

betrachtet.

**) Dass dasselbe ein vollständiges System (mit $2n-5$ gemeinsamen Lösungen) bildet, folgt aus der 2. Nummer, die auch diese Lösungen angiebt, nämlich $(\varpi_i' = X_3')$ $\quad Z'X_4' \cdots X_n'P_4' \cdots P_n'$.

***) Bei den Differentiationen von $\varpi_i'$ dieselbe als Function von

$$zx_1 \cdots x_n\, p_5 \cdots p_n$$

allein betrachtet.

Variablen ist, nach dem oben erwähnten Mayer'schen Satze, durch eine Operation $2n-7$ eine Lösung $\varpi_i' = C''$ zu erhalten*).

Die Bestimmung einer Lösung $\varpi_i' = C$ geschieht durch (17) und verlangt daher eine Operation $2n-3$.

Das jetzt Entwickelte möge ausreichen, um erkennen zu lassen, *dass die Lösung unseres Problems, die sich auf die Gleichung* (17) *und die Gleichungssysteme* (18), (19) *etc. stützt, durch Operationen*

$$2n-3,\ 2n-5,\ \cdots 3,\ 1$$

*geleistet werden muss.*

In der Weise, in der ich diese Operationen angewandt vorausgesetzt habe, wird man die Lösung in etwa folgender Form bekommen:

$$\begin{aligned}
&\varpi_1 \quad (zx_1 \cdots x_n \quad p_4 \cdots p_n) \quad = c,\\
&\varpi_2 \quad (zx_1 \cdots x_n \quad p_5 \cdots p_n c) \quad = c',\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varpi_{n-2}(zx_1 \cdots x_n \quad cc' \cdots c^{(n-4)}) = c^{(n-3)},\\
&\varpi_{n-1}(zx_1 \cdots x_{n-1}\, cc' \cdots c^{(n-3)}) = c^{(n-2)},
\end{aligned}$$

so dass die zwei letzten Gleichungen eine Punktmannigfaltigkeit repräsentiren, an die die Elemente $(zxp)$ einer Integral-$M_{n-1}$ sich anschliessen**).

7. Wir können jetzt die allgemeinste Aufgabe obiger Art angreifen:

*Es sind gegeben m von einander unabhängige Gleichungen:*

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} f \quad (zx_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = 0,\\ f_1 \quad (\qquad\qquad\qquad\quad) = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_{m-1}(\qquad\qquad\qquad\quad) = 0; \end{cases}$$

*man verlangt die Bestimmung ihrer Integral-$M_\nu$, insbesondere die von der höchsten Dimensionszahl $\nu$.*

1. *Annahme.* Sämmtliche Flächenelemente von (A) lassen sich zu Integral-$M_n$ zusammenfassen, so dass durch jede beliebige Integral-$M_{n-1}$ eine Integral-$M_n$ gelegt werden kann. Alsdann ist (A) ein Involutionssystem, dessen Erledigung (vgl. Lie's Arbeiten in Math. Annalen Bd. VIII, IX) im Allgemeinen die Operationen

$$2n-2m+1,\ 2n-2m-1,\ \cdots 3,\ 1$$

verlangt.

---

*) $\varpi_k'$, in der obigen Weise bestimmt, enthält die willkührliche Constante $C$. Ebenso muss die in der nun beschriebenen Weise zu gewinnende Function $\varpi_i'$ die beiden Constanten $C$, $C'$ enthalten.

**) Es braucht wohl kaum besonders bemerkt zu werden, dass in den obigen Functionen $\varpi$ die Constanten $C_0$, $C_1$, $C_2$ der Gleichungen (a) vorkommen müssen.

2. *Annahme.* Es existiren zwar keine Integral-$M_n$, die sämmtliche Elemente des Systems umfassen*), wohl aber Integral-$M_{n-1}$, die dieses thun. Alsdann stelle man *das auf die Elemente von* (A) *sich beziehende System:*

$$[f\varpi] = 0, \quad [f_1\varpi] = 0, \cdots [f_{m-1}\varpi] = 0$$

auf, und behandle dasselbe genau so, wie in Nr. 6. das entsprechende dreigliedrige System (b) behandelt wurde. Vermittelst (A) werden $p_1, \cdots p_m$ entfernt, und so erhält man:

$$[f\varpi] - [f\varpi'] + * + \frac{d\varpi'}{df_1}[ff_1] + \frac{d\varpi'}{df_2}[ff_2] + \cdots + \frac{d\varpi'}{df_{m-1}}[ff_{m-1}] = 0,$$

$$[f_1\varpi] - [f_1\varpi'] + \frac{d\varpi'}{df}[f_1 f] + * + \frac{d\varpi'}{df_2}[f_1 f_2] + \cdots + \frac{d\varpi'}{df_{m-1}}[f_1 f_{m-1}] = 0,$$

$$[f_2\varpi] - [f_2\varpi'] + \frac{d\varpi'}{df}[f_2 f] + \frac{d\varpi'}{df_1}[f_2 f_1] + * + \cdots + \frac{d\varpi'}{df_{m-1}}[f_2 f_{m-1}] = 0,$$

. . . . . .

$$[f_{m-1}\varpi] - [f_{m-1}\varpi'] + \frac{d\varpi'}{df}[f_{m-1} f] + \frac{d\varpi'}{df_1}[f_{m-1} f_1] + \frac{d\varpi'}{df_2}[f_{m-1} f_2] + \cdots + * = 0,$$

*wenn $\varpi'$ die zu bestimmende Function von $zx_1 \cdots x_n p_{m+1} \cdots p_n$ ist und die in den Involutionszeichen enthaltenen Grössen $p_1 p_2 \cdots p_m$ durch die Gleichungen* (A) *entfernt sind. Unter der jetzigen Voraussetzung sollen Verhältnissgrössen $z$, $z_1$, $z_2$ bestimmt werden können, die nicht nur, was immer möglich ist, den folgenden Gleichungen genügen:*

$$\begin{aligned} * + z_1[f_1 f] + z_2[f_2 f] &= 0, \\ z[ff_1] + * + z_2[f_2 f_1] &= 0, \\ z[ff_2] + z_1[f_1 f_2] + * &= 0, \end{aligned}$$

*sondern auch allen diesen:*

$$\begin{aligned} z[ff_3] + z_1[f_1 f_3] + z_2[f_2 f_3] &= 0, \\ z[ff_4] + z_1[f_1 f_4] + z_2[f_2 f_4] &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ z[ff_{m-1}] + z_1[f_1 f_{m-1}] + z_2[f_2 f_{m-1}] &= 0. \end{aligned}$$

*Und es müssen ebenso Verhältnissgrössen $z^{(1)}$, $z_1^{(1)}$, $z_2^{(1)}$ sich finden lassen, die dem Gleichungssysteme genügen, das aus dem eben hingeschriebenen durch Vertauschung von $f_2$ mit $f_3$ hervorgeht; u. s. w.; endlich Verhältnissgrössen $z^{(m-3)}$, $z_1^{(m-3)}$, $z_2^{(m-3)}$, welche die Gleichungen*

*) Existiren doch, aber in beschränkter Zahl, Integral-$M_n$, so werden dieselben stets auf bekannte Weise gewonnen. (Siehe Lie's Arbeit in Mathematische Annalen Bd. IX.) Durch Differentiation wird nämlich das gegebene System mit anderen Gleichungen zu einem Involutionssysteme vervollständigt, dessen vollständige Lösung gerade die angenommenen Integral-$M_n$ bilden.

*erfüllen, die aus den obigen durch Vertauschung von $f_2$ mit $f_{m-1}$ entstehen. — Für $\varpi$ gelten dann die $m-2$ Gleichungen:*

$$(20)\quad \begin{cases} z\ [f\varpi'] + z_1\ [f_1\varpi'] + z_2\ [f_2\varpi'] = 0, \\ z^{(1)}\ [f\varpi'] + z_1^{(1)}\ [f_1\varpi'] + z_2^{(1)}\ [f_3\varpi'] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z^{(m-3)}\ [f\varpi'] + z_1^{(m-3)}\ [f_1\varpi'] + z_2^{(m-3)}\ [f_{m-1}\varpi'] = 0, \end{cases}$$

*und die Herstellung der vorausgesetzten $M_{n-1}$ wird nachher durch die Operationen*

$$2n-2m+3,\ 2n-2m+1,\ \cdots 3,\ 1$$

*erreicht.*

*Beweis.* Ich bringe zunächst durch eine Berührungstransformation das System (A) auf die Form:

$$\begin{aligned} &X_1 = 0, \\ f_1\quad &(ZX_1\cdots X_n P_1\cdots P_n) = 0, \\ f_2\quad &(\qquad\qquad\qquad\qquad\quad) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{m-1}&(\qquad\qquad\qquad\qquad\quad) = 0; \end{aligned}$$

sodann verwandle ich es, durch Benutzung der zwei ersten Gleichungen, in das System der folgenden $m-2$:

$$(21)\quad \begin{cases} \Phi_{12}\quad (ZX_2\cdots X_n P_2\cdots P_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{1\,m-1}(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{cases}$$

die gemeinsame Integral-$M_{n-1}$, in grösstmöglicher Anzahl, entsprechend den Integral-$M_{n-1}$ des Systems (A) besitzen sollen. Jenes Gleichungssystem im Raume $(ZX_2\cdots X_n)$ soll daher ein Involutionssystem ausmachen. Desshalb muss für die Flächenelemente von (21) sein:

$$[\Phi_{1i}\Phi_{1k}] = 0,$$

und die Gleichungen für $\Omega$ werden die folgenden $m-2$:

$$[\Phi_{1k}\Omega] = 0. \quad (i, k = 2, 3, \cdots m-1).$$

Aber diese Gleichungen gehen, nach den Auseinandersetzungen der vorangehenden Nummer, gerade in die oben angegebenen über. — Aus (20) wird ein Integral $\varpi_i' = c$ bestimmt, sodann aus (20), vereint mit noch einer Gleichung, die aus irgend einer der Gleichungen (20) durch die Substitution von $\varpi_i'$ statt einer der $f$ hervorgeht, ein Integral $\varpi_k' = c'$, u. s. w.

Die oben bemerkten Bedingungen für die Existenz von $M_{n-1}$ in einer solchen Zahl, dass durch jede Integral-$M_{n-2}$ eine Integral-$M_{n-1}$ sich legen lässt, können einfach so formulirt werden: *Es muss für alle Flächenelemente des Systems die Determinante $\Delta$:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & [f\,f_1] & [f\,f_2] & \cdots & [f\,f_{m-1}] \\ [f_1 f] & 0 & [f_1 f_2] & \cdots & [f_1 f_{m-1}] \\ [f_2 f] & [f_2 f_1] & 0 & \cdots & [f_2 f_{m-1}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [f_{m-1} f] & [f_{m-1} f_1] & [f_{m-1} f_2] & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

*nebst allen ihren Unterdeterminanten dritten Grades (also von 9 Elementen) verschwinden.*

3. *Annahme.* Es existiren keine Integral-$M_{n-1}$ oder wenigstens sind solche nicht in grösstmöglicher Zahl vorhanden*), wohl aber giebt es $M_{n-2}$, die sämmtliche Flächenelemente von (A) umfassen.

Es sollen jetzt Verhältnissgrössen $z$, $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ sich bestimmen lassen, so dass nicht nur den fünf folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} * \quad &+ z_1[f_1 f] + z_2[f_2 f] + z_3[f_3 f] + z_4[f_4 f] = 0, \\ z[f f_1] + \quad &* \quad + z_2[f_2 f_1] + z_3[f_3 f_1] + z_4[f_4 f_1] = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z[f f_4] + z_1[f_1 f_4] &+ z_2[f_2 f_4] + z_3[f_3 f_4] + \quad * \quad = 0, \end{aligned}$$

sondern auch allen diesen:

$$\begin{aligned} &z[f f_5] + z_1[f_1 f_5] + z_2[f_2 f_5] + z_3[f_3 f_5] + z_4[f_4 f_5] = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &z[f f_{m-1}] + z_1[f_1 f_{m-1}] + z_2[f_2 f_{m-1}] + z_3[f_3 f_{m-1}] + z_4[f_4 f_{m-1}] = 0 \end{aligned}$$

Genüge geschieht; und weiterhin Verhältnissgrössen $z^{(1)}, \cdots z_4^{(1)}$, die dasjenige Gleichungssystem erfüllen, das durch Vertauschung von $f_4$ mit $f_5$ aus dem vorangehenden entsteht, u. s. w., endlich Verhältnissgrössen $z^{(m-5)} \cdots z_4^{(m-5)}$, welche die aus den obigen Gleichungen durch Vertauschung von $f_4$ mit $f_{m-1}$ entstehenden Gleichungen befriedigen.

Die Gleichungen für $\varpi$ lauten nun:

$$(22)\quad \begin{cases} z[f\varpi'] + z_1[f_1\varpi'] + z_2[f_2\varpi'] + z_3[f_3\varpi'] + z_4[f_4\varpi'] = 0, \\ z^{(1)}[\quad] + z_1^{(1)}[\quad] + z_2^{(1)}[\quad] + z_3^{(1)}[\quad] + z_4^{(1)}[f_5\varpi'] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z^{(m-5)}[\quad] + z_1^{(m-5)}[\quad] + z_2^{(m-5)}[\quad] + z_3^{(m-5)}[\quad] + z_4^{(m-5)}[f_{m-1}\varpi'] = 0. \end{cases}$$

Es sind deren $m-4$. Nachdem man eine Lösung $\varpi_i' = c$ erhalten hat, wird eine weitere $\varpi_k' = c$ durch ein ganz analoges System, aber

*) Integral-$M_{n-1}$ von beschränkterer Zahl, die möglicherweise vorhanden sind, werden durch einfachere Operationen gefunden. Durch rein algebraische Operationen wird das vorgelegte Gleichungssystem zu einem solchen vervollständigt, welches jene Integral-$M_{n-1}$ zur vollständigen Lösung hat. (Vgl. die vorhergehende Note.)

von $m-3$ Gleichungen erhalten, u. s. w., so dass die Bestimmung der gesuchten Integral-$M_{n-2}$ durch Operationen:

$$2n-2m+5,\ 2n-2m+3,\ \cdots 3,\ 1$$

geleistet wird.

*Beweis.* Die Gleichungen (21) des Raumes $r_n$ sollen jetzt Integral-$M_{n-2}$ zur grösstmöglichen Zahl besitzen, also die Functionen $\Phi$ die Bedingungen befriedigen, deren Gültigkeit für die erste Annahme nachgewiesen worden ist.

Diese Bedingungen können alle aus den Gleichungen (20) für $\Omega$:

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} Z\ [\Phi_{12}\Omega'] + Z_1\ [\Phi_{13}\Omega'] + Z_2\ [\Phi_{14}\Omega'] = 0, \\ Z^{(1)}[\quad\ ] + Z_1^{(1)}[\quad\ ] + Z_2^{(1)}[\Phi_{15}\Omega'] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z^{(m-5)}[\quad\ ] + Z_1^{(m-5)}[\quad\ ] + Z_2^{(m-5)}[\Phi_{1\,m-1}\Omega'] = 0 \end{array}\right.$$

durch Vertauschung von $\Omega'$ mit $\Phi_{12}, \cdots \Phi_{1\,m-1}$ erhalten werden. Es muss daher auch anstatt $\Omega'$ die Function $\Omega$ gesetzt werden können. Nun ist aber, wie aus der vorangehenden Nummer ersichtlich:

$$[\Phi_{12}\Omega] = \xi\,[f\varpi] + \xi_1\,[f_1\varpi] + \xi_2\,[f_2\varpi],$$
$$[\Phi_{13}\Omega] = \xi^{(1)}[\quad\ ] + \xi_1^{(1)}[\quad\ ] + \xi_2^{(1)}\,[f_3\varpi],$$

u. s. w.

wodurch die Gleichungen (23), nach der hier zulässigen Vertauschung von $\varpi$ mit $\varpi'$, in die Gleichungen (22) übergehen.

Die Bedingungen für das Stattfinden von Integral-$M_{n-2}$ von der grösstmöglichen Zahl können so ausgesprochen werden: *Es muss die Determinante $\Delta$ nebst allen ihren Unterdeterminanten fünften Grades verschwinden.*

$(k+1)$. *Annahme.* Es existiren Integral-$M_{n-k}$ zur grösstmöglichen Zahl, aber keine Integralmannigfaltigkeiten von mehr Dimensionen, die sämmtliche Elemente des Systems umfassen*).

*Alsdann muss für alle Flächenelemente des Systems $\Delta$ verschwinden, und dasselbe muss von allen ihren Unterdeterminanten vom Grade $2k+1$***) gelten. Die Gleichungen für $\varpi$ lauten:*

$$\begin{array}{l} z\ [f\varpi'] + z_1\ [f_1\varpi'] + \cdots + z_{2k}\,[f_{2k}\,\varpi'] = 0, \\ z^{(1)}[\quad\ ] + z_1^{(1)}[\quad\ ] + \cdots + z_{2k}^{(1)}\,[f_{2k+1}\varpi'] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z^{(m-2k-1)}[\quad\ ] + z_1^{(m-2k-1)}[\quad\ ] + \cdots + z_{2k}^{(m-2k-1)}\,[f_{m-1}\varpi'] = 0, \end{array}$$

*) Ueber die Erledigung möglicherweise vorhandener Integral-$M$ von mehr Dimensionen vergl. die vorangehende Note.

**) Und sonach von allen Unterdeterminanten höheren Grades.

*wo die z aus den durch Vertauschung von $\varpi'$ mit $f, f_1, f_2 \cdots$ entstehenden Gleichungen zu bestimmen sind. In diesen Gleichungen ist $\varpi'$ als Function allein von $z x_1 \cdots x_n p_{m+1} \cdots p_n$ anzusehen und die bei der Ausführung der angegebenen Involutionsbeziehungen auftretenden $p_1 \cdots p_m$ sind durch die Gleichungen* (A) *zu eliminiren. Die Lösung des Problems wird in Folge hiervon durch Operationen:*

$$2n - 2m + 2k + 1,\ 2n - 2m + 2k - 1,\ \cdots 3,\ 1$$

*erzielt.*

Hieran schliesst sich unmittelbar der Satz:

*Ist die Zahl der gegebenen Gleichungen* (A) *ungerade, $m = 2k+1$, so giebt es immer Integral-$M_{n-k}$ zur grösstmöglichen Anzahl.*

Es verschwindet nämlich jetzt die Determinante $\Delta$, weil sie von ungerader Gradzahl $2k+1$ ist, und dies ist die hinreichende Bedingung für das Stattfinden derartiger Integrale.

*Ist aber die Zahl der gegebenen Gleichungen* (A) *eine gerade Zahl, $m = 2k+2$, so existiren nur dann Integral-$M_{n-k}$, wenn $\Delta$ verschwindet*). — Sonst sind $M_{n-k-1}$ die Integralmannigfaltigkeiten höchster Dimensionszahl. Die Auffindung derselben wird durch Hinzufügung einer beliebigen Gleichung $f_{2k+2} = 0$ auf den vorangehenden Fall einer ungeraden Zahl von Gleichungen zurückgeführt.*

Für den Fall: $m = n$, und:

$$\begin{aligned} f &\equiv p_1 - \varphi_1(z x_1 \cdots x_n), \\ f_1 &\equiv p_2 - \varphi_2(\quad), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{m-1} &\equiv p_n - \varphi_n(\quad), \end{aligned}$$

kommt man auf die gewöhnliche Form des Pfaff'schen Problems zurück. — Folglich wird die Lösung eines solchen Pfaff'schen Problems:

$$dz - \varphi_1 dx_1 - \cdots - \varphi_n dx_n,$$

das sich in einen Ausdruck mit $k$, und nicht mit weniger als $k$ Gliedern darstellen lässt, durch die Operationen

$$2k - 1,\ 2k - 3,\ \cdots 3,\ 1$$

erreicht. — Es sind dies dieselben Operationen, die die Anwendung des Mayer'schen Theorems auf Clebsch's Theorie des Pfaff'schen Problems giebt. (Siehe Mayer: Ueber unbeschränkt integrable Systeme etc. Math. Annalen Bd. V; Lie: Neue Integrationsmethode eines $2n$-gliedrigen Pfaff'schen Problems. Abh. der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, 1873.)

---

*) Verschwindet die Determinante $\Delta$ von gerader Gradzahl, so verschwinden auch ihre ersten Unterdeterminanten.

## § 2.

## Ueber Transformationen von Systemen partieller Gleichungen erster Ordnung.

8. Die allgemeinen Erörterungen, die zu der eben dargestellten Integrationsmethode hingeleitet haben, führen ausserdem zu einer Art von eindeutiger Abbildung eines jeden Gleichungssystems im Raume $r_{n+1}$ auf einen Raum von kleinerer Dimensionszahl, die auch den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Integralen des Gleichungssystems in übersichtlicher Weise erkennen lässt.

Es sei vorgelegt das Gleichungssystem:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} f & (zx_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = 0, \\ f_1 & ( \qquad\qquad\qquad\quad ) = 0, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{m-1} & ( \qquad\qquad\qquad\quad ) = 0, \end{cases}$$

von dem ich annehme, dass seine sämmtlichen Flächenelemente zu $M_{n-k}$, aber nicht zu Mannigfaltigkeiten von mehr Dimensionen, sich zusammenfassen lassen. Eine Schaar dieser Integral-$M_{n-k}$ möge durch die folgenden Gleichungen*) gegeben sein:

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \varphi_1 (zx_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = C, \\ \varphi_2 ( \qquad\qquad\qquad\quad ) = C', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-m+k+1} ( \qquad\qquad\qquad\quad ) = C. \end{cases}$$

*Diese Gleichungen, so geschrieben:*

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} Z = \varphi_1, \\ X_1 = \varphi_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_{n-m+k} = \varphi_{n-m+k+1} \end{cases}$$

*führen die $M_{n-k}$ der Schaar* (b) *in die Punkte eines Raumes $R_{n-m+k+1}$ über, und, wie aus der 2. Nummer ersichtlich ist, werden durch dieselben je zwei unendlich benachbarte Flächenelemente des Systems* (a), *die vereinigt liegen, in zwei ebenfalls vereinigt liegende Flächenelemente des Raumes $R_{n-m+k+1}$ verwandelt.*

Die letztere Eigenschaft der von den Gleichungen (c) begründeten Abbildung des Systems (a) auf den Raum $R_{n-m+k+1}$ führt zur vollständigen Bestimmung der $P$:

*) Es sind dies die in der früheren Weise gewonnenen $\varpi_i = c$ etc., nach den willkürlichen Constanten $c$, $c'$, $c''$, $\cdots$ aufgelöst gedacht.

$$(d)\qquad \begin{cases} P_1 = \Psi_1(zx_1\cdots x_n p_1\cdots p_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{n-m+k} = \Psi_{n-m+k}(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad). \end{cases}$$

Es wird also einem Flächenelemente des Systems (a) ein Flächenelement des Raumes $R$ entsprechen; *dagegen müssen einem Flächenelemente des letzteren Raumes* $\infty^{m-2k}$ *Flächenelemente des Systems* (a) *entsprechen, die zu je zwei benachbarten vereinigt liegen und demnach eine Integral-*$M_{m-2k}$ *des Systems* (a) *bilden**).

Es geht nämlich aus den früheren Auseinandersetzungen (der 2. – 4. Nummern) hervor, dass im Falle

$$(e)\qquad dZ - P_1\,dX_1 - \cdots - P_{n-m+k}\,dX_{n-m+k} = 0,$$

und nur in diesem Falle, für die entsprechenden Flächenelemente von (a) die Gleichung Statt haben muss:

$$dz - p_1\,dx_1 - \cdots - p_n\,dx_n = 0.$$

Die erwähnten Integral-$M_{m-2k}$ machen eine besondere Schaar von Integralen der Dimensionszahl $m-2k$ aus; sie gehören nämlich gleichzeitig unbegrenzt vielen Integral-$M_{n-k}$ an. *Und je zwei Integral-*$M_{n-k}$*, die ein Flächenelement* $(zxp)$ *gemein haben, besitzen nothwendig auch eine ganze* $M_{m-2k}$ *gemeinsam.*

Denn, — ich wiederhole fast nur eine in der 1. Nummer gefällte Bemerkung, — die allgemeinste Integral-$M_{n-m+k}$ von (e) ist durch eine beliebige Punktmannigfaltigkeit von $R$ dargestellt, und also *entspricht einer jeden* $M_{n-m+k}$ *von* $R$ *eine Integral-*$M_{n-k}$ *vom Systeme* (a); *und umgekehrt.* Weiterhin: je zwei Integral-$M_{n-k}$ von (a), die sich berühren, entsprechen $M_{n-m+k}$ von $R$, die eine Berührung von eben derselben Ordnung besitzen.

Ich werde die genannten $M_{m-2k}$ als Charakteristiken von (a) bezeichnen. *Jede Integral-*$M_{n-k}$ *ist, — mit der möglichen Ausnahme einzelner (singulärer), — von Charakteristiken erzeugt.*

Aus dem jetzt Erörterten wird man insbesondere zu schliessen haben, dass die allgemeinste eindeutige (endlich-deutige) Flächentransformation von $R$ die allgemeinste derartige Transformation des Systems (a) in sich selbst abgiebt, die eine jede Integral-$M_{n-k}$ wiederum in eine (nicht $\infty$) Integral-$M_{n-k}$ desselben Systems umformt. — Jene Transformation ist aber die Berührungstransformation**); *darum ist es für die letztere Transformation charakteristisch, dass aus Charakteristiken*

*) Aus dem Schlusse des vorangehenden Paragraphen erhellt, dass $m \geqq 2k$.

**) Siehe meinen Aufsatz in diesen Annalen Bd. IX.

*des Systems immer wiederum Charakteristiken werden, und dass vereinigt liegende Charakteristiken wiederum in vereinigt liegende übergehen.*

**9.** Zwei Gleichungssysteme im Raume $r_{n+1}$, deren Integral-$M$ von grösster Dimensionszahl $M_{n-k}$ sind, — wo $k$ für beide Systeme dieselbe Zahl ist, — können auf denselben Raum $R$ abgebildet, und somit auf einander bezogen werden. Die Berührungstransformation des Raumes $R$ wird dann das Bild der allgemeinsten endlich-deutigen Transformation von Integral-$M_{n-k}$ des einen Systems in solche des anderen. *Hierbei geht eine jede Charakteristik des einen Systems in eine Charakteristik des anderen über, und Berührung wird eine invariante Bedingung.*

**10.** Zwei beliebige Gleichungssysteme $S$, $S'$, für welche die Zahl der Dimensionen der bez. Integral-$M$ grösster Dimensionszahl eine verschiedene ist, können in der oben erwähnten Weise beziehungsweise auf zwei Räume $R$, $R'$ abgebildet werden. — Jede Correspondenz zwischen den beiden Räumen wird eine Correspondenz zwischen den Systemen $S$, $S'$. Es kann sogar in folgender Weise eine endlich-deutige Berührungsbeziehung zwischen Integralen grösster Dimensionszahl beider entworfen werden.

Sei $R$ von der Dimensionszahl $\mu$, $R'$ von der Dimensionszahl $\mu+\nu$, unter $\nu$ eine positive ganze Zahl verstanden. In $R'$ wähle ich willkürlich ein System partieller Gleichungen 1. O., die in Involution mit einander sind, und gerade $\infty^{\mu}$ gemeinsame Integralflächen besitzen. Dieses System möge, so wie ich es früher gezeigt habe (Math. Annalen Bd. IX. p. 316), auf den Raum $R$ abgebildet werden. *Die Berührungstransformation dieses Raumes giebt dann in der That eine endlich-deutige Transformation allgemeinster Art von Integral-$M$ von $S$ in Integral-$M'$ von $S'$, wobei zugleich Charakteristiken von $S$ in Charakteristiken von $S'$, eigentlich in Schaaren von vereinigt liegenden Charakteristiken von $S'$, übergehen, und Berührung erhalten bleibt.*

*Aber, wohl zu bemerken, durch ein Involutionssystem in $R'$ werden nicht alle Integral-$M'$ von $S'$, sondern nur eine beschränkte Gruppe derselben herauskommen können.*

## §. 3.

### Angabe zweier Anwendungen der entwickelten Theorie.

**11.** Die im ersten Paragraphen behandelte Aufgabe würde auch etwa so formulirt werden können: Ein System partieller Differentialgleichungen 1. O. ist vorgelegt, und man verlangt die Bestimmung solcher Functionen $\varphi(zx_1 \cdots x_n)$, $\varphi^{(1)}(zx_1 \cdots x_n)$, $\cdots$, die für die Flächenelemente des Systems Ausdrücke von der Form ergeben:

$$p_1 = -\frac{\frac{d\varphi}{dx_1} + \lambda_1 \frac{d\varphi^{(1)}}{dx_1} + \lambda_2 \frac{d\varphi^{(2)}}{dx_2} + \cdots}{\frac{d\varphi}{dz} + \lambda_1 \frac{d\varphi^{(1)}}{dz} + \lambda_2 \frac{d\varphi^{(2)}}{dz} + \cdots},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = -\frac{\frac{d\varphi}{dx_n} + \lambda_1 \frac{d\varphi^{(1)}}{dx_n} + \lambda_2 \frac{d\varphi^{(2)}}{dx_n} + \cdots}{\frac{d\varphi}{dz} + \lambda_1 \frac{d\varphi^{(1)}}{dz} + \lambda_2 \frac{d\varphi^{(2)}}{dz} + \cdots}$$

und deren Anzahl überdies die kleinstmögliche ist. — Ein jedes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\varphi \quad (z x_1 \cdots x_n) = C, \\ &\varphi^{(1)}\,( \qquad\qquad ) = C, \\ &\varphi^{(2)}\,( \qquad\qquad ) = C, \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

welches diese Bedingungen erfüllt, stellt eine Punktmannigfaltigkeit dar, an die die Flächenelemente einer Integral-$M$ grösstmöglicher Dimensionszahl des vorgelegten Systems partieller Differentialgleichungen 1. O. sich anschliessen. Die Functionen $\varphi$ sind daher in der oben angeführten Weise zu gewinnen.

12. Eine Anwendung dieses auf die neuerdings von mir in einer Note in den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen (6. März 1876) behandelten partiellen Differentialgleichungen 2. O. im Raume $R_3(xyz)$, die, — ich bediene mich der daselbst gebrauchten Ausdrucksweise, — Linienflächen eines $R_3'$ [die zweiten Differentialquotienten $r$, $s$, $t$ werden als Coordinaten der Punkte von $R_3'$ interpretirt] repräsentiren, giebt für diejenigen dieser Gleichungen, deren Linienflächen einer und derselben Congruenz in $R_3'$ angehören, folgenden Satz:

Es seien gegeben zwei Gleichungen 2. O., bedingt, die eine durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &A'(zxypqmn\mu\nu) = 0, \\ &B'(\qquad\qquad\quad) = 0^*), \end{aligned}$$

die andere durch

$$\begin{aligned} &A'(\qquad\qquad\quad) = 0, \\ &C'(\qquad\qquad\quad) = 0. \end{aligned}$$

Alsdann müssen diese zwei Gleichungen 2. O. eine alle Flächenelemente $(zxypq)$ des Raumes $R_3$ umfassende Schaar von gemeinsamen Contact-

*) Man sehe den Schluss der citirten Note (oder die vorangehende Abhandlung von mir in diesem Bande).

charakteristiken besitzen, die ausserdem noch einer dritten Gleichung 2. O., nämlich der durch

$$B'(zxypqmn\mu\nu) = 0,$$
$$C'(\quad\quad\quad\quad) = 0$$

dargestellten als Contactcharakteristiken angehören.

Diese Charakteristikenschaar geht, nachdem vermittelst der oben entwickelten Theorie zwei Functionen $\varphi(zxypq)$, $\psi(zxypq)$ abgeleitet worden sind, als Charakeristiken im Raume $(zxypq)$ einer Gleichung für $\chi$:

$$[\varphi\chi] + \lambda[\psi\chi] = 0$$

hervor. (Siehe die letzte Seite der citirten Note.)

---

Ich will schliesslich noch andeuten, wie man die vorgetragene allgemeine Theorie direct für die Mechanik verwerthen kann. Sie erledigt folgendes Problem:

Ein System materieller Punkte ist vorhanden und es sind den Kräften, die auf die Punkte wirken, $m$, in Bezug auf die Componenten der Kräfte homogene, Gleichungen zwischen diesen Componenten und den Coordinaten der Punkte vorgeschrieben; man sucht nun für die Punkte, d. h. für deren Coordinaten diejenigen Bedingungen anzugeben, die in kleinstmöglicher Anzahl hinreichen, um Gleichgewicht eintreten zu lassen; oder, man wünscht, mit Hinzunahme der niedrigsten Zahl verschiedener Operationen, Gleichgewicht herzustellen.

Anstatt Gleichungen vorauszusetzen, die in Bezug auf die Componenten der Kräfte homogen sind, hätte man auch nicht homogene Gleichungen betrachten können. Nur würde man dann auf solche partielle Differentialgleichungen 1. O. geführt worden sein, in denen die unbekannte Function $z$ selbst nicht auftritt.

Lund, 20. November 1876.

---

# Ueber ein Flächennetz zweiter Ordnung*).

Von

Emil Toeplitz aus Lissa (in Posen).

Hesse hat seinen Untersuchungen über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung**) die eindeutige Abbildbarkeit der Kegelspitzencurve eines beliebigen Flächennetzes zweiter Ordnung auf eine ebene Curve vierter Ordnung zu Grunde gelegt und zeigte***), dass beide — Flächennetz und Curve — gleichzeitig ganz allgemeiner Natur sind. Von dieser Beziehung Gebrauch machend, hat Frahm in einer kurzen Notiz†) die von Salmon in seiner Raumgeometrie††) für immer möglich gehaltene Darstellbarkeit dreier quadratischer quaternärer Formen als Summen derselben fünf Quadrate einer näheren Untersuchung unterzogen; aus dem Factum, dass die Hesse'sche Abbildung der Kegelspitzencurve eines durch derartige Formen repräsentirten Flächennetzes eine Curve vierter Ordnung von besonderer Art†††) ist, zieht er den Schluss, dass auch zwischen den Flächen des Netzes eine gewisse Beziehung bestehen muss, falls jene Darstellung möglich sein soll. Es tritt hierbei noch der eigenthümliche Umstand zu Tage, dass die Darstellung, sobald diese Beziehung Statt hat, nicht bloss auf ein-

*) Die Anregung zu diesem Aufsatze verdankt der Verf. seinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Rosanes in Breslau.

**) Hesse, Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. Crelle J. Bd. 49, p. 279—332.

***) Ibid. p. 284.

†) Frahm, Bemerkung über das Flächennetz zweiter Ordnung. Mathem. Annalen Bd. VII, p. 635—638.

††) Salmon-Fiedler, Raumgeometrie. 1. Aufl. Bd. II, p. 633; 2. Aufl. Bd. I, p. 166 und p. 282.

†††) Es lassen sich ihr nämlich vollständige Fünfseite einschreiben, was bei der allgemeinen Curve vierter Ordnung nicht der Fall ist, wie Clebsch (Borch. J. Bd. 59) und Herr Lüroth (Math. Ann. Bd. I, p. 37—51) auf algebraischem Wege gezeigt haben; Herr Geiser behauptet in seinen Untersuchungen „über die Steiner'schen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades" (Borch. J. Bd. 72, p. 377) irrthümlicher Weise das Gegentheil hiervon.

fache, sondern auf unendlich vielfache Weise geschehen kann. Unter Zuhülfenahme des Sylvester-Clebsch'schen Satzes*) von der Darstellbarkeit der allgemeinen cubischen quaternären Form als Summe von fünf Cuben ergab sich daraus der weitere Satz: „Drei Flächen zweiter Ordnung können entweder (im Allgemeinen) gar nicht oder auf zweifach unendlich viele Arten als Polaren einer Fläche dritter Ordnung angesehen werden."

Der kurz angedeutete, indirecte Weg, auf dem Frahm zu diesem interessanten Resultate gelangt ist, soll im Folgenden durch eine ganz directe, rein algebraische Betrachtungsweise ersetzt werden. Während Frahm zunächst die Frage untersucht, wann drei quadratische quaternäre Formen als Summen derselben fünf Quadrate darstellbar sind, und später erst zeigt, dass sie sich unter derselben Bedingung als Polarflächen von Flächen dritter Ordnung interpretiren lassen, bietet sich der umgekehrte Weg für die algebraische Behandlung als der bequemere dar. Die Combinante, deren Verschwinden das von den drei Flächen gebildete Netz als Polarflächennetz einer Fläche dritter Ordnung charakterisirt, zeichnet sich durch eine grosse Einfachheit aus; ihr Quadrat lässt sich als eine sogenannte Determinante gauche symétrique darstellen, und hieraus erklärt sich dann in sehr einfacher Weise, dass die aufgestellte Bedingung entweder von keiner oder einer unendlichen Anzahl von Flächen zweiter Ordnung erfüllt wird. — Die Gleichung der Flächen dritter Ordnung, deren Polaren die drei gegebenen Flächen zweiter Ordnung sind, wird ganz direct hergestellt.

Schliesslich ergiebt sich ein *neuer Beweis* des erwähnten Sylvester-Clebsch'schen Satzes.

## § 1.

In der nachstehenden Arbeit werden folgende, übliche Bezeichnungen benutzt werden. Unter $x_i, y_i, z_i, t_i, \cdots, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \cdots,$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; $u_i, v_i, w_i, \cdots, p_i, q_i, r_i, \cdots$ sollen die homogenen Coordinaten von Punkten, resp. Ebenen, unter $u_x$ der Ausdruck $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4$ verstanden werden. Ferner soll zur Abkürzung die Determinante

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 = (a b c d)$$

gesetzt werden; $(b c d)_i$ sei die Unterdeterminante, die zu $a_i$ adjungirt ist, so dass $(a b c d) = \sum_i a_i (b c d)_i$ ist, wo sich die Summation, wie im

*) Ausführliche Darlegung und Geschichte dieses Satzes findet sich bei Gordan: „über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung", Math. Ann. Bd. V, p. 341—377; ebenso bei Salmon-Fiedler a. a. O. 2. Aufl. Bd. II, Cap. V. Einen neuen Beweis hat Reye (Borch. J. Bd. 78, p. 114—122) geliefert.

Folgenden überhaupt, über die Werthe 1, 2, 3, 4 des bezeichneten Index erstreckt. Endlich werde $(a_i b_k - a_k b_i) = (ab)_{ik}$ gesetzt.

Offenbar ist identisch:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_\xi & u_\eta & u_\zeta \\ x_1 & y_1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ x_2 & y_2 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ x_3 & y_3 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ x_4 & y_4 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} = 0,$$

d. i. nach der eingeführten Bezeichnungsweise:

(I) $$u_x(\xi\eta\zeta y) - u_y(\xi\eta\zeta x) = u_\xi(x\eta\zeta y) + u_\eta(x\xi\zeta y) + u_\zeta(x\xi\eta y).$$

Zwischen den sechs zweigliederigen Determinanten $(ab)_{ik}$ besteht folgende (dieselben auch als solche charakterisirende) Identität:

(II) $$(ab)_{12}(ab)_{34} + (ab)_{13}(ab)_{42} + (ab)_{14}(ab)_{23} = 0.$$

Setzt man $u_i = (xyz)_i$, so wird

(III) $$(uabc) = \sum_i (abc)_i (xyz)_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_x b_y c_z$$

und in ähnlicher Weise für $(uv)_{ik} = (xy)_{i'k'}$, wo $i, k, i', k'$ durch eine gerade Anzahl von Permutationen je zweier Nummern aus 1, 2, 3, 4 hervorgehen soll,

(IV) $$(abuv) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x.$$

Für Formen höheren Grades wird zumeist von der symbolischen Bezeichnung Gebrauch gemacht werden.

## § 2.

Es erscheint zweckmässig, die Lösung des folgenden, einfachen Problems vorauszuschicken, zumal ich es nur kurz und nicht vollständig an einer einzigen Stelle*) behandelt gefunden habe.

*Es sind drei beliebig im Raume gelegene Ebenen*

$$p_x = 0, \quad q_x = 0, \quad r_x = 0$$

*und drei ihnen resp. zugeordnete Punkte* $\xi, \eta, \zeta$ *gegeben; gesucht wird*

*) Paul Serret, Géom. de direction, Paris 1869, p. 182.

*diejenige Oberfläche zweiter Ordnung, zu denen sie als Pole und Polaren gehören.*

Da eine Ebene durch drei Punkte bestimmt ist, vertreten ein Pol und seine Polare die Stelle von drei conjugirten Punktepaaren; die Aufgabe verlangt demnach, eine Oberfläche zweiter Ordnung zu finden, zu der neun gegebene Punktepaare conjugirt sind, und muss daher wenigstens *eine* Lösung zulassen*). In der That wird ihr durch die aus der doppelt gerechneten, durch $\xi$, $\eta$, $\zeta$ gelegten Ebene bestehenden Oberfläche zweiter Ordnung genügt; denn bezüglich einer in eine Doppelebene degenerirenden Fläche zweiter Ordnung hat jeder Punkt in ihr jede beliebige Ebene zur Polare. Dass diese ganz interesselose und daher als uneigentlich zu bezeichnende Lösung im Allgemeinen die einzige ist, erkennt man sofort; denn soll eine eigentliche, die Aufgabe befriedigende Fläche zweiter Ordnung existiren, so muss es in der durch $\xi$, $\eta$, $\zeta$ gehenden Ebene einen Kegelschnitt geben, in Bezug auf den $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Schnittgeraden dieser Ebene mit resp. $p_x = 0$, $q_x = 0$, $r_x = 0$ zu Polaren haben**); dazu ist aber bekanntlich nothwendig, dass $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und diese drei Geraden perspectivisch liegende Dreiecke bilden, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Soll aber auch eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung der Aufgabe genügen, so müssen die neun Punktepaare auch dieser conjugirt sein und können daher***) höchstens eine achtgliederige Gruppe bilden; dann befriedigen die unendlich vielen Flächen des durch die uneigentliche und eigentliche Fläche definirten Büschels die gestellte Aufgabe.

Für die Existenz einer eigentlichen Lösung reicht eine einzige Bedingung hin; das vorliegende Problem kann nämlich auch so formulirt werden:

Die Coefficienten einer quadratischen quaternären Form $a_x^2$ und drei Grössen $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$ sollen aus den Identitäten

$$(A) \qquad a_x a_\xi = \pi p_x, \quad a_x a_\eta = \varkappa q_x, \quad a_x a_\zeta = \varrho r_x$$

bestimmt werden, die für jedes $x_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) zu erfüllen sind.

Hieraus ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$(B) \qquad \varkappa q_\zeta = \varrho r_\eta, \quad \varrho r_\xi = \pi p_\zeta, \quad \pi p_\eta = \varkappa q_\xi,$$

in denen von den Unbekannten nur noch $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$ und zwar homogen und linear vorkommen. Im Allgemeinen haben sie daher nur die Lösung $\pi = 0$, $\varkappa = 0$, $\varrho = 0$; dann erfordern die Gleichungen (A), dass $\xi$, $\eta$, $\zeta$ Doppelpunkte der Fläche $a_x^2 = 0$ sind; da die Punkte $\xi$, $\eta$, $\zeta$ nicht in einer Geraden liegen sollen, so muss $a_x^2 = 0$ die durch

*) Hierfür vgl. Rosanes, Ueber ein Princip der Zuordnung etc., Borch. J. Bd. 76.

**) Cf. Serret a. a. O.

***) Cf. Rosanes a. a. O.

$\xi$, $\eta$, $\zeta$ gehende, doppelt gedachte Ebene darstellen; und dies ist die als uneigentlich bezeichnete Lösung.

Um zu einer eigentlichen Lösung zu gelangen, ist daher wenigstens die Annahme erforderlich, dass die Determinante der Gleichungen (B) verschwinde, d. i.:

$$(C) \qquad p_\eta q_\zeta r_\xi - p_\zeta q_\xi r_\eta = 0,$$

oder, geometrisch ausgedrückt, dass das Dreiflach $p_x=0$, $q_x=0$, $r_x=0$ und das Dreieck $\xi$, $\eta$, $\zeta$ perspectivisch liegen; in diesem Fall ergeben sich dann die Verhältnisse $\pi : \varkappa : \varrho$ in eindeutiger Weise.

Diese Bedingung reicht aber auch für die Existenz einer eigentlichen Lösung hin; denn es kann eine solche sofort direct hergestellt werden. Zu diesem Zwecke möge zunächst der Form $a_x^2$ eine eigenthümliche Gestalt gegeben werden, in der ihre Coefficienten hauptsächlich nur in drei ihrer Polaren auftreten. Es ist nämlich nach (I):

$$a_x^2(\xi\eta\zeta y) = a_x a_\xi(x\eta\zeta y) + a_x a_\eta(x\zeta\xi y) + a_x a_\zeta(x\xi\eta y) + a_x a_y(\xi\eta\zeta x)$$

und

$$a_x a_y(\xi\eta\zeta z) = a_y a_\xi(x\eta\zeta z) + a_y a_\eta(x\zeta\xi z) + a_y a_\zeta(x\xi\eta z) + a_y a_z(\xi\eta\zeta x),$$

woraus sich ergiebt:

$$\begin{aligned} a_x^2(\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta z) = {} & [a_x a_\xi(x\eta\zeta y) + a_x a_\eta(x\zeta\xi y) + a_x a_\zeta(x\xi\eta y)](\xi\eta\zeta z) \\ & + [a_y a_\xi(x\eta\zeta z) + a_y a_\eta(x\zeta\xi z) + a_y a_\zeta(x\xi\eta z)](\xi\eta\zeta x) \\ & + a_y a_z(\xi\eta\xi x)^2. \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass die durch folgende Gleichung gegebene Form $a_x^2$ den Gleichungen (A) genügen muss:

$$\begin{aligned} (D) \quad a_x^2(\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta z) = {} & [\pi p_x(x\eta\zeta y) + \varkappa q_x(x\zeta\xi y) + \varrho r_x(x\xi\eta y)](\xi\eta\zeta z) \\ & + [\pi p_y(x\eta\zeta z) + \varkappa q_y(x\zeta\xi z) + \varrho r_y(x\xi\eta z)](\xi\eta\zeta x), \end{aligned}$$

wo $y_i$, $z_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ganz beliebige Grössen und $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$ aus den Gleichungen (B) zu bestimmen sind. Davon überzeugt man sich auch leicht ganz direct; denn durch Polarisation ergiebt sich:

$$\begin{aligned} 2a_x a_\xi(\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta z) = {} & [\pi p_\xi(x\eta\zeta y) + \varkappa q_\xi(x\zeta\xi y) + \varrho r_\xi(x\xi\eta y)](\xi\eta\zeta z) \\ & + \pi p_x(\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta z) + \pi p_y(\xi\eta\zeta z)(\xi\eta\zeta x) \end{aligned}$$

und dies ist, da $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$ den Gleichungen (B) genügen, wenn überdies von der Identität (I) Gebrauch gemacht wird:

$$= 2\pi p_x(\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta z),$$

also in der That

$$a_x a_\xi = \pi p_x,$$

ebenso

$$a_x a_\eta = \varkappa q_x,$$

$$a_x a_\zeta = \varrho r_x, \text{ w. z. b. w.}$$

Es entsteht die Frage nach der allgemeinsten Lösung; ist $A_x^2$ irgend eine solche und $a_x^2$ die in (D) dargestellte, so ist:

$$A_x A_\xi = \pi' p_x, \quad A_x A_\eta = \varkappa' q_x, \quad A_x A_\zeta = \varrho' r_x;$$
$$a_x a_\xi = \pi p_x, \quad a_x a_\eta = \varkappa q_x, \quad a_x a_\zeta = \varrho r_x,$$

wo $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$ ebenso, wie $\pi'$, $\varkappa'$, $\varrho'$ den Gleichungen (B) genügen müssen, weswegen auch $\frac{\pi'}{\pi} = \frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{\varrho'}{\varrho} = \lambda$ ist. Setzt man $A_x^2 - \lambda a_x^2 = h_x^2$, so ergeben jene drei Paare von Gleichungen:

$$h_x h_\xi = 0, \quad h_x h_\eta = 0, \quad h_x h_\zeta = 0,$$

und diese:

$$h_x^2 = \mu (\xi\eta\zeta x)^2,$$

wo $\mu$ eine beliebige Zahl ist. Demnach ist jede Lösung unter der Form

$$A_x^2 = \lambda a_x^2 + \mu (\xi\eta\zeta x)^2$$

darstellbar.

Hieraus geht hervor, dass dem gestellten Problem unter Annahme der Bedingung (C) in allgemeinster Weise durch einen Büschel von Oberflächen zweiter Ordnung genügt wird, die sich sämmtlich längs eines Kegelschnittes in der Ebene $(\xi\eta\zeta x)=0$ berühren. Ein derartiger Büschel besitzt nur einen Kegel, dessen Gleichung im vorliegenden Falle sofort herzustellen ist. Setzt man nämlich in dem Ausdrucke für $a_x^2$ die Grössen $z_i = y_i$, so repräsentirt $a_x^2 = 0$ einen Kegel mit der Spitze $y$, wenn

$$a_x a_y (\xi\eta\zeta y) = \pi p_y (x\eta\zeta y) + \varkappa q_y (x\zeta\xi y) + \varrho r_y (x\xi\eta y)$$

für jedes $x_i$ verschwindet, zu welchem Zwecke man nur $y$ als den Schnittpunkt der drei Ebenen $p_x = 0$, $q_x = 0$, $r_x = 0$ zu betrachten braucht. Setzt man daher in (D) $y_i = z_i = (pqr)_i$, so ergiebt eine einfache Umformung namentlich unter Anwendung der Identität (III) als Gleichung des Kegels

$$S_x^2 = \begin{vmatrix} p_\xi & p_\eta & p_\zeta & p_x \\ q_\xi & q_\eta & q_\zeta & q_x \\ r_\xi & r_\eta & r_\zeta & r_x \\ \pi p_x & \varkappa q_x & \varrho r_x & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

und der allgemeinsten Lösung des Problems kann nun die Form gegeben werden:

$$A_x^2 = \lambda S_x^2 + \mu (\xi\eta\zeta x)^2.$$

Das in diesem § zur Anwendung gebrachte Verfahren wird sich auch für den eigentlichen Gegenstand gegenwärtiger Arbeit sehr gut verwerthen lassen.

## § 3.

Es sei vorgelegt das Problem: *Unter welcher Bedingung kann man drei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung als Polaren dreier Punkte in Bezug auf eine Fläche dritter Ordnung auffassen? Welches ist diese Fläche dritter Ordnung, und wo liegen die Pole?*

Die Oberfläche dritter Ordnung und die drei Punkte sind durch $19 + 9 = 28$ Bedingungen bestimmt; das Problem liefert aber nur 27 Gleichungen, und — insoweit ein solcher Schluss überhaupt berechtigt ist*) — scheint es unendlich viele Flächen dritter Ordnung zu geben, die der Aufgabe genügen. In Analogie mit dem Probleme des § 2. existiren allerdings, wie auf den ersten Blick zu erkennen ist, auch hier stets Lösungen, nämlich die in irgend eine beliebige, dreifach zu zählende Ebene des Raumes degenerirenden Oberflächen dritter Ordnung; gleichzeitig sind als Pole irgend drei Punkte zu nehmen. Ausser diesen als uneigentlich zu bezeichnenden Lösungen giebt es für eine *allgemeine* Lage der drei Flächen zweiter Ordnung, wie sich bald ergeben wird, *keine.*

Algebraisch gefasst lautet das vorliegende Problem: *Stellen*

$$\sum_{i,k} p_{ik} x_i x_k = p_x^2 = p_x'^2 = 0,$$

$$\sum_{i,k} q_{ik} x_i x_k = q_x^2 = q_x'^2 = 0,$$

$$\sum_{i,k} r_{ik} x_i x_k = r_x^2 = r_x'^2 = 0$$

*drei gegebene Flächen zweiter Ordnung dar, so sollen die Coefficienten einer cubischen quaternären Form* $a_x^3$, *sowie die Coordinaten dreier Punkte* $\xi$, $\eta$, $\zeta$ *und drei Constanten* $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$ *so bestimmt werden, dass die Gleichungen*

$$(1) \qquad a_x^2 a_\xi = \pi p_x^2, \quad a_x^2 a_\eta = \varkappa q_x^2, \quad a_x^2 a_\zeta = \varrho r_x^2$$

*von jedem beliebigen Werthsysteme* $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ *identisch befriedigt werden.*

Mit diesen Identitäten besteht dann zugleich folgende:

$$\lambda\pi p_x^2 + \mu\varkappa q_x^2 + \nu\varrho r_x^2 = \lambda a_x^2 a_\xi + \mu a_x^2 a_\eta + \nu a_x^2 a_\zeta = a_x^2 a_{\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta}.$$

Daher werden sich gleichzeitig mit den gegebenen drei Flächen stets alle Flächen des durch dieselben bestimmten Netzes als Polarflächen ein und derselben Fläche dritter Ordnung auffassen lassen; da es nun in einem Oberflächennetze zweiter Ordnung — ausser in einem ganz speciellen Falle — stets unendlich viele Flächen ohne Doppelpunkt giebt, so sollen die drei gegebenen als von dieser allgemeinen Art vorausgesetzt werden.

Die in (1) enthaltenen 30 Gleichungen besitzen die Eigenthümlichkeit, dass nach der leicht ausführbaren Elimination der Coefficienten

*) Die Unzuverlässigkeit der blossen Constantenabzählung ist sehr deutlich von Clebsch bei der Darstellung einer biquadratischen ternären Form als Summe von fünf Biquadraten (Borch. J. Bd. 59, p. 143) hervorgehoben worden. Darauf beruht auch die in der Einleitung erwähnte falsche Annahme Salmon's, dass drei quadratische quaternäre Formen stets gleichzeitig als Summen derselben fünf Quadrate dargestellt werden können.

von $a_x^3$ noch 12 Gleichungen zwischen den $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$, $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$ übrig bleiben. Polarisiren wir nämlich die Identitäten (1) nach einem beliebigen Werthsysteme $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, so ergeben sich die ferneren Identitäten:

$$a_x a_y a_\xi = \pi p_x p_y, \quad a_x a_y a_\eta = \varkappa q_x q_y, \quad a_x a_y a_\zeta = \varrho r_x r_y$$

und hieraus die folgenden:

$$(2) \qquad \varkappa q_x q_\zeta = \varrho r_x r_\eta, \quad \varrho r_x r_\xi = \pi p_x p_\zeta, \quad \pi p_x p_\eta = \varkappa q_x q_\xi$$

oder in nichtsymbolischer Form das 12 Gleichungen enthaltende System:

$$(2^a) \qquad \begin{cases} \varkappa \sum\limits_\lambda q_{\lambda\mu}\xi_\lambda = \varrho \sum\limits_\lambda r_{\lambda\mu}\eta_\lambda, \\ \varrho \sum\limits_\lambda r_{\lambda\mu}\xi_\lambda = \pi \sum\limits_\lambda p_{\lambda\mu}\zeta_\lambda, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \\ \pi \sum\limits_\lambda p_{\lambda\mu}\eta_\lambda = \varkappa \sum\limits_\lambda q_{\lambda\mu}\xi_\lambda, \end{cases}$$

Die Annahme $\pi = 0$, $\varkappa = 0$, $\varrho = 0$ führt auf die schon erwähnten, uneigentlichen Lösungen; die Annahme, dass zwei oder eine von den Grössen $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$ verschwinden, erfordert Specialitäten für das Netz und die Fläche dritter Ordnung, die wegen ihres geringen Interesses von vornherein ausgeschlossen werden sollen; daher wird es hinreichen, $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$ als von Null verschieden zu betrachten.

Sollen nun die 12 in Bezug auf die 12 Grössen $\frac{1}{\pi}\xi_i$, $\frac{1}{\varkappa}\eta_i$, $\frac{1}{\varrho}\zeta_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) linearen und homogenen Gleichungen ($2^a$) wenigstens *ein* gemeinsames Lösungssystem besitzen, so muss ihre Determinante

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{11} & -r_{12} & -r_{13} & -r_{14} & q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{21} & -r_{22} & -r_{23} & -r_{24} & q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{31} & -r_{32} & -r_{33} & -r_{34} & q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{41} & -r_{42} & -r_{43} & -r_{44} & q_{41} & q_{12} & q_{43} & q_{44} \\ r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{11} & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{21} & -p_{22} & -p_{23} & -p_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{31} & -p_{32} & -p_{33} & -p_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{41} & -p_{42} & -p_{43} & -p_{44} \\ -q_{11} & -q_{12} & q_{13} & -q_{14} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{21} & -q_{22} & q_{23} & -q_{24} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{31} & -q_{32} & -q_{33} & -q_{31} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{41} & -q_{42} & -q_{43} & q_{44} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sein. Dies ist eine sogenannte Determinante gauche symétrique und zwar geraden Grades und daher ein volles Quadrat*). Wir bezeichnen

*) Cf. Baltzer, Determinanten. 4. Aufl. §. 5. 8. I.

sie demnach durch $\Lambda'^2$; um $\Lambda'$ selbst zu finden, multipliciren wir sie zweimal mit der symmetrischen Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma\delta)^3;$$

dann ergiebt sich, wenn:

$$\sum_{i,k} p_{ik}x_iy_k = P(xy), \quad \sum_{i,k} q_{ik}x_iy_k = Q(xy), \quad \sum_{i,k} r_{ik}x_iy_k = R(xy)$$

gesetzt wird, wiederum eine Determinante gauche symétrique:

$$\Lambda'^2(\alpha\beta\gamma\delta)^6 = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & R(\alpha\alpha) & \cdots & R(\alpha\delta) & -Q(\alpha\alpha) & \cdots & -Q(\alpha\delta) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdot & R(\delta\alpha) & \cdots & R(\delta\delta) & -Q(\delta\alpha) & \cdots & -Q(\delta\delta) \\ -R(\alpha\alpha) & \cdots & -R(\alpha\delta) & 0 & \cdots & 0 & P(\alpha\alpha) & \cdots & P(\alpha\delta) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -R(\delta\alpha) & \cdots & -R(\delta\delta) & 0 & \cdots & 0 & P(\delta\alpha) & \cdots & P(\delta\delta) \\ Q(\alpha\alpha) & \cdots & Q(\alpha\delta) & -P(\alpha\alpha) & \cdots & -P(\alpha\delta) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q(\delta\alpha) & \cdots & Q(\delta\delta) & -P(\delta\alpha) & \cdots & -P(\delta\delta) & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Die bisher beliebig gelassenen 16 Grössen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ werden am zweckmässigsten als die Coordinaten des den Flächen $q_x^2 = 0$ und $r_x^2 = 0$ gemeinsamen Systems harmonischer Pole definirt; alsdann ist:

$$Q(\alpha\beta)=0,\ Q(\alpha\gamma)=0,\ Q(\alpha\delta)=0,\ Q(\gamma\delta)=0,\ Q(\delta\beta)=0,\ Q(\beta\gamma)=0;$$
$$R(\alpha\beta)=0,\ R(\alpha\gamma)=0,\ R(\alpha\delta)=0,\ R(\gamma\delta)=0,\ R(\delta\beta)=0,\ R(\beta\gamma)=0.$$

Die letzte Determinante reducirt sich dann, wenn man ihre vier letzten Verticalreihen resp. mit $R(\alpha\alpha)$, $R(\beta\beta)$, $R(\gamma\gamma)$, $R(\delta\delta)$ multiplicirt und zu den entsprechenden der vier mittleren, mit $Q(\alpha\alpha)$ resp.

$Q(\beta\beta)$, $Q(\gamma\gamma)$, $Q(\delta\delta)$ multiplicirten Verticalreihen addirt, auf eine achtgliedrige Determinante. Verfährt man nun mit dieser in ähnlicher Weise, indem man die ersten vier Horizontalreihen resp. mit $Q(\alpha\alpha)$, $Q(\beta\beta)$, $Q(\gamma\gamma)$, $Q(\delta\delta)$ und die letzten vier mit $R(\alpha\alpha)$, $R(\beta\beta)$, $R(\gamma\gamma)$, $R(\delta\delta)$ multiplicirt und diese entsprechend zu jenen addirt, so ergiebt sich endlich eine viergliederige Determinante und zwar wiederum gauche symétrique, nämlich, wenn $Q(xx) = Q(x)$, $R(xx) = R(x)$ gesetzt wird:

$$\Lambda'^2(\alpha\beta\gamma\delta)^6 = \begin{vmatrix} 0 & P(\alpha\beta)\,[Q(\alpha)R(\beta)-R(\alpha)Q(\beta)] & P(\alpha\gamma)\,[Q(\alpha)R(\gamma)-R(\alpha)Q(\gamma)] & P(\alpha\delta)\,[Q(\alpha)R(\delta)-R(\alpha)Q(\delta)] \\ P(\beta\alpha)\,[Q(\beta)R(\alpha)-R(\beta)Q(\alpha)] & 0 & P(\beta\gamma)\,[Q(\beta)R(\gamma)-R(\beta)Q(\gamma)] & P(\beta\delta)\,[Q(\beta)R(\delta)-R(\beta)Q(\delta)] \\ P(\gamma\alpha)\,[Q(\gamma)R(\alpha)-R(\gamma)Q(\alpha)] & P(\gamma\beta)\,[Q(\gamma)R(\beta)-R(\gamma)Q(\beta)] & 0 & P(\gamma\delta)\,[Q(\gamma)R(\delta)-R(\gamma)Q(\delta)] \\ P(\delta\alpha)\,[Q(\delta)R(\alpha)-R(\delta)Q(\alpha)] & P(\delta\beta)\,[Q(\delta)R(\beta)-R(\delta)Q(\beta)] & P(\delta\gamma)\,[Q(\gamma)R(\delta)-R(\gamma)Q(\delta)] & 0 \end{vmatrix}$$

Für eine solche lässt sich aber die Quadratwurzel sofort nach der einfachen Formel:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b & c \\ -a & 0 & f & e \\ b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad+be+cf)^2$$

herstellen; es wird

$$\begin{aligned}\Lambda'(\alpha\beta\gamma\delta)^3 = {} & P(\alpha\beta)\,P(\gamma\delta)\,[Q(\alpha)R(\beta)-R(\alpha)Q(\beta)]\,[Q(\gamma)R(\delta)-R(\gamma)Q(\delta)] \\ & + P(\alpha\gamma)\,P(\delta\beta)\,[Q(\alpha)R(\gamma)-R(\alpha)Q(\gamma)]\,[Q(\delta)R(\beta)-R(\delta)Q(\beta)] \\ & + P(\alpha\delta)\,P(\beta\gamma)\,[Q(\alpha)R(\delta)-R(\alpha)Q(\delta)]\,[Q(\beta)R(\gamma)-R(\beta)Q(\gamma)]\end{aligned}$$

oder anders geordnet:

$$\begin{aligned}= {} & [Q(\alpha)Q(\beta)R(\gamma)R(\delta)+Q(\gamma)Q(\delta)R(\alpha)R(\beta)]\,[P(\alpha\delta)P(\beta\gamma)-P(\alpha\gamma)P(\delta\beta)] \\ & + [Q(\alpha)Q(\gamma)R(\delta)R(\beta)+Q(\delta)Q(\beta)R(\alpha)R(\gamma)]\,[P(\alpha\beta)P(\gamma\delta)-P(\alpha\delta)P(\beta\gamma)] \\ & + [Q(\alpha)Q(\delta)R(\beta)R(\gamma)+Q(\beta)Q(\gamma)R(\alpha)R(\delta)]\,[P(\alpha\gamma)P(\delta\beta)-P(\alpha\beta)P(\gamma\delta)].\end{aligned}$$

Um nun den Factor $(\alpha\beta\gamma\delta)^3$ wieder zu beseitigen, wird am besten die symbolische Bezeichnung eingeführt; dies giebt:

$$\begin{aligned}\Lambda'(\alpha\beta\gamma\delta)^3 = {} & (q_\alpha^2 q_\beta'^2 r_\gamma^2 r_\delta'^2 + q_\gamma^2 q_\delta'^2 r_\alpha^2 r_\beta'^2)\,p_\alpha p_\beta'\,(p_\delta p_\gamma' - p_\gamma p_\delta') \\ & + (q_\alpha^2 q_\gamma'^2 r_\delta^2 r_\beta'^2 + q_\delta^2 q_\beta'^2 r_\alpha^2 r_\gamma'^2)\,p_\alpha p_\gamma'\,(p_\beta p_\delta' - p_\delta p_\beta') \\ & + (q_\alpha^2 q_\delta'^2 r_\beta^2 r_\gamma'^2 + q_\beta^2 q_\gamma'^2 r_\alpha^2 r_\delta'^2)\,p_\alpha p_\delta'\,(p_\gamma p_\beta' - p_\beta p_\gamma')\end{aligned}$$

oder durch Vertauschung der gleichwerthigen Symbole $p$ und $p'$ und Addition des Resultates:

$$(4) \quad -2\Lambda'(\alpha\beta\gamma\delta)^3$$
$$= (q_\alpha^2 q_\beta'^2 r_\gamma^2 r_\delta'^2 + q_\gamma^2 q_\delta'^2 r_\alpha^2 r_\beta'^2)(p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha')(p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma')$$
$$+ (q_\alpha^2 q_\gamma'^2 r_\delta^2 r_\beta'^2 + q_\delta^2 q_\beta'^2 r_\alpha^2 r_\gamma'^2)(p_\alpha p_\gamma' - p_\gamma p_\alpha')(p_\delta p_\beta' - p_\beta p_\delta')$$
$$+ (q_\alpha^2 q_\delta'^2 r_\beta^2 r_\gamma'^2 + q_\beta^2 q_\gamma'^2 r_\alpha^2 r_\delta'^2)(p_\alpha p_\delta' - p_\delta p_\alpha')(p_\beta p_\gamma' - p_\gamma p_\beta').$$

(Diese Gleichung wird weiter unten [vgl. § 6.] noch eine anderweitige Anwendung finden.)

Man bemerke nun, dass in Folge der den Grössen $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $\delta_i$ verliehenen Bedeutung:

$$(4^a) \quad q_\alpha^2 q_\beta'^2 (p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') = \begin{vmatrix} p_\alpha & p_\beta & p_\gamma & p_\delta \\ p_\alpha' & p_\beta' & p_\gamma' & p_\delta' \\ q_\alpha^2 & q_\alpha q_\beta & q_\alpha q_\gamma & q_\alpha q_\delta \\ q_\beta' q_\alpha' & q_\beta'^2 & q_\beta' q_\gamma' & q_\beta' q_\delta' \end{vmatrix} = q_\alpha q_\beta' \Sigma \pm p_\alpha p_\beta' q_\gamma q_\delta' =$$
$$\tfrac{1}{2}(q_\alpha q_\beta' - q_\beta q_\alpha')(pp'qq')(\alpha\beta\gamma\delta)$$

$$r_\gamma^2 r_\delta'^2 (p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha') = \begin{vmatrix} p_\alpha & p_\beta & p_\gamma & p_\delta \\ p_\alpha' & p_\beta' & p_\gamma' & p_\delta' \\ r_\gamma r_\alpha & r_\gamma r_\beta & r_\gamma^2 & r_\gamma r_\delta \\ r_\delta' r_\alpha' & r_\delta' r_\beta' & r_\delta' r_\gamma' & r_\delta'^2 \end{vmatrix} = r_\gamma r_\delta' \Sigma \pm p_\alpha p_\beta' r_\gamma r_\delta' =$$
$$\tfrac{1}{2}(r_\gamma r_\delta' - r_\delta r_\gamma')(pp'rr')(\alpha\beta\gamma\delta)$$

also:

$$q_\alpha^2 q_\beta'^2 r_\gamma^2 r_\delta'^2 (p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha')(p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma')$$
$$= \tfrac{1}{4}(q_\alpha q_\beta' - q_\beta q_\alpha')(r_\gamma r_\delta' - r_\delta r_\gamma')(pp'qq')(pp'rr')(\alpha\beta\gamma\delta)^2$$

ist; da sich die übrigen Terme der Formel (4) in ähnlicher Weise umgestalten, nimmt diese, wenn auf beiden Seiten der Factor $(\alpha\beta\gamma\delta)^2$ fortgelassen wird, die Gestalt an:

$$-8\Lambda'(\alpha\beta\gamma\delta) = (pp'qq')(pp'rr') \times$$
$$[(q_\alpha q_\beta' - q_\beta q_\alpha')(r_\gamma r_\delta' - r_\delta r_\gamma') + (q_\gamma q_\delta' - q_\delta q_\gamma')(r_\alpha r_\beta' - r_\beta r_\alpha')$$
$$+ (q_\alpha q_\gamma' - q_\gamma q_\alpha')(r_\delta r_\beta' - r_\beta r_\delta') + (q_\delta q_\beta' - q_\beta q_\delta')(r_\alpha r_\gamma' - r_\gamma r_\alpha')$$
$$+ (q_\alpha q_\delta' - q_\delta q_\alpha')(r_\beta r_\gamma' - r_\gamma r_\beta') + (q_\beta q_\gamma' - q_\gamma q_\beta')(r_\alpha r_\delta' - r_\delta r_\alpha')]$$
$$= (pp'qq')(pp'rr') \begin{vmatrix} q & q_\beta & q_\gamma & q_\delta \\ q_\alpha' & q_\beta' & q_\gamma' & q_\delta' \\ r_\alpha & r_\beta & r_\gamma & r_\delta \\ r_\alpha' & r_\beta' & r_\gamma' & r_\delta' \end{vmatrix} = (pp'qq')(pp'rr')(qq'rr')(\alpha\beta\gamma\delta),$$

oder $8\Lambda' = (qrq'r')(rpr'p')(pqp'q')$.

Setzt man also:

$$(5) \qquad \Lambda = (qrq'r')(rpr'p')(pqp'q'),$$

so ist die Determinante $(3) = \frac{1}{64}\Lambda^2$.

Es besteht nun folgender Satz: Ist die Determinante eines Systems von einer geraden Anzahl linearer, homogener Gleichungen gauche symétrique, so besitzt dieses System entweder — falls dieselbe nicht verschwin-

def — (ausser dem nichtssagenden, aus lauter Nullen bestehenden) gar kein, oder — falls sie verschwindet — im Allgemeinen zwei von einander linear unabhängige*) Auflösungssysteme, also abgesehen von einem Proportionalitätsfactor eine einfache Mannigfaltigkeit solcher**).

Hieraus folgt, dass die Gleichungen ($2^a$) im Allgemeinen keine gemeinsame Lösung haben; ist aber die Bedingung $\Lambda = 0$ erfüllt, so wird ihnen von je einer einfachen Mannigfaltigkeit von Punkten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ genügt. Die Auflösung derselben ergiebt, wenn $P$ die Discriminante von $p_x^2$ und $\pi_i$ die Symbole der adjungirten Form von $p_x^2$ bedeuten:

$$(6) \qquad \begin{cases} \pi P \cdot \eta_i = \varkappa q_\xi q_\pi \pi_i, \\ \pi P \cdot \xi_i = \varrho r_\xi r_\pi \pi_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

$$(7) \qquad q_\pi r_\pi \sum_\lambda (qr)_{i\lambda} \xi_\lambda = 0.$$

Die Determinante der letzten vier Gleichungen kann sich nur durch einen Factor von $\Lambda^2$ unterscheiden, und man kann auch auf diesem Wege $\Lambda$ auf die Form (5) reduciren. Verschwindet diese, so bleiben nur zwei von den vier Gleichungen von einander linear unabhängig; der Punkt $\xi$ und in derselben Weise $\eta$ und $\zeta$ sind daher nur auf je eine Gerade beschränkt, aber in der Weise, dass jedem Punkte der einen Geraden je ein ganz bestimmter Punkt der beiden anderen Geraden zugeordnet ist, wie es die Gleichungen (6) verlangen. Diese Geraden sollen ihrer Bedeutung wegen kurz als die Polgeraden der Flächen $p_x^2 = 0$, resp. $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ bezeichnet werden. Die Gleichung der Polgeraden in Liniencoordinaten $(uv)_{\varkappa\lambda}$ ergiebt sich aus (7) ohne Weiteres; für $p_x^2 = 0$ lautet sie $q_\pi r_\pi (qruv) = 0$, und dies ist in der That wegen der Bedingung $\Lambda = 0$ die Gleichung eines speciellen Complexes, d. h. einer Geraden. Allgemeiner ist jeder Oberfläche des Netzes, das durch $p_x^2 = 0$, $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ bestimmt ist, eine Polgerade zugeordnet***). Dem beliebigen Punkte $\xi$ auf der Polgeraden von $p_x^2 = 0$ entspricht auf jeder Polgeraden ein einziger bestimmter Punkt; die Coordinaten des entsprechenden Punktes auf der Polgeraden von

*) D. h. sämmtliche Auflösungssysteme setzen sich aus zweien linear zusammen.

**) Zum Beweise dieses Satzes sei bemerkt, dass — wie sich namentlich unter Benutzung von Baltzer a. a. O. § 7, 2 leicht ergiebt — mit einer Determinante gauche symétrique geraden Grades zugleich ihre ersten Unterdeterminanten verschwinden, die zweiten hingegen im Allgemeinen nicht mehr; dies verbinde man mit dem ibid. § 8, 2 angegebenen Satze von Kronecker.

***) Im Falle eines allgemeinen Netzes stellt $q_\pi r_\pi (qruv) = 0$ nur dann eine Gerade dar, wenn $p_x^2 = 0$ ein Kegel des Netzes ist, und zwar ist dies diejenige Gerade, in der sich die Polarebenen der Spitze dieses Kegels in Bezug auf alle Flächen des Netzes schneiden; durch die Bedingung $\Lambda = 0$ ist aber jeder Fläche, auch wenn sie kein Kegel ist, eine Gerade zugeordnet, nämlich die Polgerade.

$\lambda p_x^2 + \mu q_x^2 + \nu r_x^2 = 0$ sind in Analogie mit den Gleichungen (6) proportional den Grössen:

$$(\lambda p_\xi p_\pi + \mu q_\xi q_\pi + \nu r_\xi r_\pi)\pi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Nun ist aber allgemein:

$$p_x p_\pi u_\pi = p_x (pp'p''p''')\,(up'p''p''')$$

und dies nach einer der Identität (I) analog gebildeten:

$$= (pp'p''p''')\,[u_x(pp'p''p''') + p_x'(upp''p''') - p_x''(upp'p''') + p_x'''(upp'p'')]$$

oder nach geeigneter Vertauschung gleichwerthiger Symbole:

$$= (pp'p''p''')[u_x(pp'p''p''') - p_x(up'p''p''') - p_x(up'p''p''') - p_x(up'p''p''')]$$

$$= u_x p_\pi^2 - 3 p_x p_\pi u_\pi,$$

also

$$p_x p_\pi u_\pi = \tfrac{1}{4} p_\pi^2 \cdot u_x . \qquad (\omega)$$

Daher ist $p_\xi p_\pi \pi_i$ proportional zu $\xi_i$, ebenso wegen (6) $q_\xi q_\pi \pi_i$ zu $\eta_i$ und $r_\xi r_\pi \pi_i$ zu $\zeta_i$, und es werden demnach die obigen Coordinaten proportional Ausdrücken von der Form $\lambda' \xi_i + \mu' \eta_i + \nu' \zeta_i$; daraus folgt: Einander entsprechende Punkte auf den Polgeraden des Netzes liegen in ein und derselben Ebene. (Ebenso wird klar, dass einander entsprechende Punkte auf denjenigen Polgeraden, die einem aus dem Netze herausgenommenen Büschel entsprechen, auf ein und derselben Geraden liegen.) Durchläuft ein Punkt eine Polgerade, so beschreiben die entsprechenden Punkte projectivische Punktreihen; die Ebenen, in denen einander entsprechende Punkte liegen, umhüllen daher eine abwickelbare Fläche vierter Ordnung, deren Rückkehrcurve eine Raumcurve dritter Ordnung $C_3$ ist*). Es ist dies eine covariante Curve des Netzes, die erst in Folge seiner Eigenthümlichkeit, die Bedingung $\Lambda = 0$ zu befriedigen, zu den covarianten Gebilden des Netzes hinzutritt.

Der Zusammenhang zwischen den Polgeraden und dieser Raumcurve $C_3$ wird durch den folgenden, aus den Gleichungen (2) sich sofort ergebenden Satz klar: Ist $\xi$ ein Punkt der zu $p_x^2 = 0$ gehörigen Polgeraden und $\xi'$ der Schnittpunkt der Polarebenen von $\xi$ in Bezug

*) Setzen wir

$$p_x q_x r_x (pqru) = l_x^3 u_\lambda$$

und sind $\xi$ und $\xi'$ zwei Punkte der Polgeraden von $p_x^2$, bezeichnen wir ferner

$$l_\xi^3 p_\lambda p_x = A_x, \quad l_\xi^2 l_{\xi'} p_\lambda p_x = B_x, \quad l_\xi l_{\xi'}^2 p_\lambda p_x = C_x, \quad l_{\xi'}^3 p_\lambda p_x = D_x,$$

so ist die Gleichung der Fläche 4. Ordnung

$$4(A_x C_x - B_x^2)(B_x D_x - C_x^2) - (A_x D_x - B_x C_x)^2 = 0,$$

und die Raumcurve $C_3$ ist dargestellt durch:

$$A_x : B_x : C_x : D_x = 1 : \sigma : \sigma^2 : \sigma^3.$$

auf die Flächen des Netzes, so ist die Polare von $\xi'$ bezüglich $p_x^2 = 0$ eine Schmiegungsebene der Raumcurve $C_3$ und zwar diejenige, die durch $\xi$ geht; durchläuft daher $\xi$ die Polgerade, so umhüllt gleichzeitig diese Polare die Raumcurve $C_3$.

Schliesslich möge noch eine Interpretation der Gleichungen (2) erwähnt werden; multiplicirt man diese nach der Reihe mit drei beliebigen Constanten $A$, $B$, $\Gamma$ und addirt, so ergiebt sich:

$$\pi p_{(\Gamma\eta - B\zeta)} p_x + \varkappa q_{(A\zeta - \Gamma\xi)} q_x + \varrho r_{(B\xi - A\eta)} r_x = 0;$$

demnach haben die drei Ebenen

$$p_{(\Gamma\eta - B\zeta)} p_x = 0, \quad q_{(A\zeta - \Gamma\xi)} q_x = 0, \quad r_{(B\xi - A\eta)} r_x = 0$$

eine Gerade gemein, woraus der Satz folgt: Sind $\xi$, $\eta$, $\zeta$ drei Punkte, die den Gleichungen (2) genügen, und trifft eine Gerade das von ihnen gebildete Dreiseit in drei Punkten und zwar die Gerade $(\eta\zeta)$ in $\alpha$, $(\xi\xi)$ in $\beta$ und $(\xi\eta)$ in $\gamma$, so haben die Polaren von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in Bezug auf $p_x^2 = 0$, resp. $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ wenigstens eine Gerade gemein.

## § 4.

Im vorigen § hat sich die Bedingung $\Lambda = 0$ als eine für die Existenz eigentlicher Lösungen des Problems nothwendige herausgestellt. Sie ergab sich als solche bei der nunmehr vollständig durchgeführten Auflösung der Gleichungen (2), die eine Folge der Gleichungen (1) waren. Um nun auch diese und damit das an die Spitze des § 3. gestellte Problem vollständig zu lösen, wäre zweierlei nachzuweisen: *einmal*, falls die Auflösungen der Gleichungen (2) *sämmtlich* den Gleichungen (1) genügen sollen, dass die Gleichungen (2) die einzigen zwischen $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ bestehenden Gleichungen sind, die sich durch Elimination der Coefficienten von $a_x^3$ aus den Gleichungen (1) ergeben; *dann:* wie viel von den Gleichungen (1) zur Bestimmung dieser Coefficienten noch übrig bleiben und von einander unabhängig sind.

Dieser directe Weg für die weitere Behandlung des Problems würde erhebliche Schwierigkeiten bieten, deren uns folgendes einfache, dem des § 2. ganz analoge Verfahren überhebt. Es soll nämlich die Gleichung einer Fläche dritter Ordnung, die den Gleichungen (1) genügt, wirklich hergestellt und dabei nur vorausgesetzt werden, dass die in ihr auftretenden Grössen den Gleichungen (2) genügen; hiermit ist dann der erste Nachweis geliefert. Sodann wird mit Hülfe der gewonnenen Lösung die allgemeinste cubische quaternäre Form angegeben werden, die die Gleichungen (1) befriedigt.

Zunächst möge der allgemeinen cubischen quaternären Form eine zweckdienliche Gestalt gegeben werden. Die Identität (I) liefert folgende identische Gleichungen:

$$a_x^3 \quad (\xi\eta\zeta y) = a_x^2 \quad [a_\xi(x\eta\zeta y) + a_\eta(x\zeta\xi y) + a_\zeta(x\xi\eta y)] + a_x^2 a_y \quad (\xi\eta\zeta x),$$
$$a_x^2 a_y \quad (\xi\eta\zeta z) = a_x a_y \quad [a_\xi(x\eta\zeta z) + a_\eta(x\zeta\xi z) + a_\zeta(x\xi\eta z)] + a_x a_y a_z (\xi\eta\zeta x),$$
$$a_x a_y a_z \, (\xi\eta\zeta t) = a_y a_z \quad [a_\xi(x\eta\zeta t) + a_\eta(x\zeta\xi t) + a_\zeta(x\xi\eta t)] + a_y a_z a_t (\xi\eta\zeta x).$$

Wird die erste mit $(\xi\eta\zeta z)\,(\xi\eta\zeta t)$, die zweite mit $(\xi\eta\zeta x)\,(\xi\eta\zeta t)$, die dritte mit $(\xi\eta\zeta x)^2$ multiplicirt und darauf addirt, so resultirt die gewünschte Darstellung von $a_x^3$, die darauf führt, eine Lösung $a_x^3$ der Gleichungen (1) in folgender Form zu suchen:

$$\begin{aligned}(8)\quad a_x^3\,(\xi\eta\zeta y)\,(\xi\eta\zeta z)\,(\xi\eta\zeta t) &= [\pi p_x^2 \quad (x\eta\zeta y) + \varkappa q_x^2 \quad (x\zeta\xi y) + \varrho r_x^2 \quad (x\xi\eta y)]\,(\xi\eta\zeta z)\,(\xi\eta\zeta t)\\ &+ [\pi p_x p_y (x\eta\zeta z) + \varkappa q_x q_y (x\zeta\xi z) + \varrho r_x r_y (x\xi\eta z)]\,(\xi\eta\zeta t)\,(\xi\eta\zeta x)\\ &+ [\pi p_y p_z (x\eta\zeta t) + \varkappa q_y q_z (x\zeta\xi t) + \varrho r_y r_z (x\xi\eta t)]\,(\xi\eta\zeta x)^2.\end{aligned}$$

In der That erweist sich diese Behauptung auch ganz direct als richtig unter alleiniger Annahme, dass $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ ein Lösungssystem der Gleichungen (2) ist. Dazu polarisire man nach $\xi_i$, dann lassen sich aus dem Resultate mit Hülfe der Gleichungen (2) die Symbole $q_i$ und $r_i$ beseitigen, und die Anwendung der Identität (I) führt sofort auf $a_x^2 a_\xi = \pi p_x^2$; ebenso ergiebt sich $a_x^2 a_\eta = \varkappa q_x^2$, $a_x^2 a_\zeta = \varrho r_x^2$, w. z. b. w.

In der gewonnenen Lösung (8) sind $y_i$, $z_i$, $t_i$ ganz beliebige Grössen, und sie scheint daher eine sehr grosse Mannigfaltigkeit von verschiedenen Formen zu umfassen; ausserdem lassen noch $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ im Wesentlichen eine einfache Mannigfaltigkeit von Werthen zu. Eine ebenfalls schon im § 2. angewendete Schlussweise ergiebt nun aber, dass es überhaupt nur eine zweifache Mannigfaltigkeit von Lösungen für die Gleichungen (1) giebt. Es sei $a_x^3$ die in (8) gegebene Lösung und $A_x^3$ eine beliebige, mit der alleinigen Beschränkung, dass beiden ein und dasselbe, den Gleichungen (2) genügende Werthsystem $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ zu Grunde liegen soll; dann ist:

$$A_x^2 A_\xi = \pi' p_x^2, \quad A_x^2 A_\eta = \varkappa' q_x^2, \quad A_x^2 A_\zeta = \varrho' r_x^2;$$
$$a_x^2 a_\xi = \pi p_x^2, \quad a_x^2 a_\eta = \varkappa q_x^2, \quad a_x^2 a_\zeta = \varrho r_x^2,$$

worin $\pi'$, $\varkappa'$, $\varrho'$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ und $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ Lösungssysteme von (2) sind; denselben Grössen $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ entsprechen aber, wie aus (2) sofort zu erkennen ist, Grössen $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$, die sich nur um einen allen dreien gemeinsamen Factor ändern können, d. h. $\pi' : \varkappa' : \varrho' = \pi : \varkappa : \varrho$ oder $\frac{\pi'}{\pi} = \frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{\varrho'}{\varrho} = \mu$. Setzt man daher $A_x^3 - \mu a_x^3 = h_x^3$, so ergiebt sich aus den obigen Gleichungen hierfür:

$$h_x^2 h_\xi = 0, \quad h_x^2 h_\eta = 0, \quad h_x^2 h_\zeta = 0;$$

d. h. $h_x^3 = 0$ ist eine Fläche mit drei dreifachen Punkten $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$, woraus

$$h_x^3 = \nu\,(\xi\eta\zeta x)^3$$

bei beliebigem $\nu$ folgt.

Demnach ist

$$A_x^3 = \mu a_x^3 + \nu(\xi\eta\zeta x)^3 \tag{9}$$

die allgemeinste Lösung von (1), worin $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ irgend ein Lösungssystem von (2) und $a_x^3$ die particuläre Lösung (8) bedeutet; und, da die Gleichungen (2) eine einfache Mannigfaltigkeit solcher Systeme liefern, so existirt im Allgemeinen eine einfache Mannigfaltigkeit von Flächenbüscheln dritter Ordnung, d. i. eine doppelte Unendlichkeit*) von Lösungen des Problems, immer unter der Voraussetzung, dass der Bedingung $\Lambda = 0$ genügt wird.

Für $a_x^3$ ist in (9) eine beliebige der in (8) enthaltenen Formen zu setzen; es bietet sich hier nicht, wie bei dem Problem im § 2. eine einzige, ausgezeichnete und hinreichend einfache Form dar, die hierzu besonders geeignet wäre. Setzt man in (8) $z_i = t_i = y_i$, so wird:

$$\begin{aligned}(10)\quad & a_x^3(\xi\eta\zeta y)^3 \\ &= [\pi p_x^2\ (x\eta\zeta y) + \varkappa q_x^2\ (x\zeta\xi y) + \varrho r_x^2\ (x\xi\eta y)](\xi\eta\zeta y)^2 \\ &+ [\pi p_x p_y (x\eta\zeta y) + \varkappa q_x q_y (x\zeta\xi y) + \varrho r_x r_y (x\xi\eta y)](\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta x) \\ &+ [\pi p_y^2\ (x\eta\zeta y) + \varkappa q_y^2\ (x\zeta\xi y) + \varrho r_y^2\ (x\xi\eta y)](\xi\eta\zeta x)^2.\end{aligned}$$

Dann wird $a_y^3 = 0$, und es stellen daher die in (10) definirten Flächen $a_x^3 = 0$ diejenigen Oberflächen der Schaar (9) dar, die durch den Punkt $y$ gehen; für beliebig gelassene $y_i$ vertritt daher (10) die Gleichung (9) vollständig. Aus (10) folgt:

$$\begin{aligned}a_x^2 a_y(\xi\eta\zeta y)^2 = {} & [\pi p_x p_y (x\eta\zeta y) + \varkappa q_x q_y (x\zeta\xi y) + \varrho r_x r_y (x\xi\eta y)](\xi\eta\zeta y) \\ & + [\pi p_y^2\ (x\eta\zeta y) + \varkappa q_y^2\ (x\zeta\xi y) + \varrho r_y^2\ (x\xi\eta y)](\xi\eta\zeta x)\end{aligned}$$

und weiter:

$$a_x a_y^2(\xi\eta\zeta y) = \pi p_y^2 (x\eta\zeta y) + \varkappa q_y^2 (x\zeta\xi y) + \varrho r_y^2 (x\xi\eta y).$$

Für $p_y^2 = 0$, $q_y^2 = 0$, $r_y^2 = 0$, d. h. so oft $y$ ein Basispunkt des Netzes ist, verschwindet daher $a_x a_y^2$ identisch, und $a_x^3 = 0$ enthält einen Doppelpunkt $y$. Jede Lösung $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ der Gleichungen (2) liefert demnach — entsprechend den 8 Basispunkten — 8 Flächen 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt. Der Berührungskegel in einem solchen hat die Gleichung:

$$s_x^2 = \pi p_x p_y (x\eta\zeta y) + \varkappa q_x q_y (x\zeta\xi y) + \varrho r_x r_y (x\xi\eta y) = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Identitäten $s_x s_\xi = p_x p_y$, $s_x s_\eta = q_x q_y$, $s_x s_\zeta = r_x r_y$, die den Zusammenhang der Pole mit den Tangentenebenen an die Flächen des Netzes in seinen Basispunkten leicht erkennen lassen.

Wie aus (9) hervorgeht, findet zwischen den Flächen des zu einer jeden Lösung $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ gehörigen Büschels eine doppelte Berührung

*) Der eine Parameter dieser Schaar tritt im ersten Grade auf, der andere im achten Grade, der sich nicht erniedrigen zu lassen scheint.

in einer ebenen Curve dritter Ordnung statt; diese liegt in der durch $\xi, \eta, \zeta$ gehenden Ebene und ist diejenige Curve dritter Ordnung, deren Polarkegelschnittnetz identisch ist mit demjenigen Netze, das von jener Ebene aus dem gegebenen Flächennetze zweiter Ordnung ausgeschnitten wird.

Ausser den 8 erwähnten Oberflächen mit einem Doppelpunkt und der dreifach gezählten Ebene durch $\xi, \eta, \zeta$ giebt es in jedem einer Lösung $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ entsprechenden Büschel keine Oberfläche mit vielfachem Punkte; denn durch einen solchen müssten auch ihre Polarflächen gehen, also $p_x^2 = 0$, $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ in ihm einen gemeinsamen Punkt haben, was nur für die 8 Basispunkte der Fall ist.

Hiermit ist das Problem vollständig gelöst, und es möge hier beiläufig darauf aufmerksam gemacht werden, dass es auch mit Hülfe der Theorie der simultanen, partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung behandelt und umgekehrt als eine Anwendung derselben verwerthet werden kann. Es ist nämlich offenbar identisch mit der Aufgabe, eine Function $f$ von $x_1 x_2 x_3 x_4$ zu bestimmen, welche den Differentialgleichungen genügt:

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \xi_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 3\varkappa p^2$$

$$\eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \eta_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 3\varkappa q_x^2$$

$$\zeta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \zeta_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \zeta_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 3\varrho r_x^2,$$

wozu noch die Bedingung der Homogeneität tritt:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 3f.$$

Die Integration dieses Systems simultaner, partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung ergiebt sich aus einem von Herrn Mayer*) bewiesenen Satze, (der die Grundlage der Lie'schen Integrationsmethode bildet und) dem in Rücksicht auf den vorliegenden Fall die Form gegeben werden kann:

„Sind $F_1, \cdots, F_{m-1}$ solche $m-1$ Functionen von $q_1, \cdots, q_n$, „$p_{m+1}, \cdots, p_n$, $f$, (wo $p_x$ zur Abkürzung für $\frac{\partial f}{\partial q_x}$ gesetzt ist), welche „den Bedingungsgleichungen:

*) Math. Annalen Bd. VI, p. 188, Satz IX. Statt desselben kann man ebenso bequem auch die Jacobi-Mayer'sche Methode (Math. Annalen Bd. V, p. 466) anwenden, die in dem vorliegenden Falle mit der du Bois-Reymond'schen Methode zur Integration derjenigen linearen totalen Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht (Borchardt's Journal Bd. 70, p. 312), zusammenfällt.

„(α) $(F_i - p_i, F_\lambda - p_\lambda) = \sum_1^n \varkappa \left\{ \frac{\partial (F_i - p_i)}{\partial q_\varkappa} \frac{\partial (F_\lambda - p_\lambda)}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial (F_i - p_i)}{\partial p_\varkappa} \frac{\partial (F_\lambda - p_\lambda)}{\partial p_\varkappa} \right\} = 0$

„identisch genügen, so besitzen die $m - 1$ partiellen Differentialglei-„chungen mit zusammen $n$ unabhängigen Variabeln:

„(β) $$\frac{\partial V}{\partial q_1} = F_1, \cdots, \frac{\partial V}{\partial q_{m-1}} = F_{m-1}$$

„eine gemeinsame vollständige Lösung mit $n - m + 2$ willkürlichen „Constanten, und diese Lösung lässt sich durch vollständige Integration „einer einzigen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit nur „noch $n - m + 1$ unabhängigen Variabeln in folgender Weise finden:

„Man führe an Stelle von $q_1 \cdots q_{m-1}$ die Grössen $x x_1 \cdots x_{m-1}$ als „neue Variable durch die Gleichungen:

„(γ)
$$\begin{cases} q_1 = a_1 + (x - a) x_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{m-1} = a_{m-1} + (x - a) x_{m-1} \end{cases}$$

„ein, in denen $a a_1 \cdots a_{m-1}$ unbestimmte Constanten sind; hierdurch „verwandeln sich die Gleichungen (α) in folgende:

„(δ) $$\frac{\partial V}{\partial x} = \sum_1^{m-1} \varkappa x_\varkappa F_\varkappa, \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = F_1 (x - a), \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_{m-1}} = F_{m-1} (x - a).$$

„Ist nun $V = \psi (x x_1 \cdots x_{m-1} q_m \cdots q_n b_m \cdots b_n b)$ eine beliebige „vollständige Lösung der ersten Gleichung (δ), in der $x_1 \cdots x_{m-1}$ als „Constante zu betrachten sind, so setze man $V = \psi + \sum_m^n \varkappa c_\varkappa a_\varkappa$ und sub-„stituire darin für $a_m \cdots a_n\, b_m \cdots b_n$ ihre Werthe aus den $2(n - m + 1) + 1$ „Gleichungen:

„ $$\frac{\frac{\partial \psi'}{\partial b_\varkappa}}{\frac{\partial \psi}{\partial b_\varkappa}} = \frac{\frac{\partial \psi'}{\partial b}}{\frac{\partial \psi}{\partial b}}, \quad \frac{\partial \psi'}{\partial a_\varkappa} = c_\varkappa \frac{\frac{\partial \psi'}{\partial b}}{\frac{\partial \psi}{\partial b}}, \quad \psi' = c, \quad \varkappa = m, \cdots, n,$$

„worin $\psi'$ durch die Substitution $x = a$, $q_m = a_m$, $\cdots$, $q_n = a_n$ aus $\psi$ „entsteht.

„Man erhält hierdurch eine Function $V$ von $x x_1 \cdots x_{m-1} q_m \cdots q_n$ „und den willkürlichen Constanten $c_m \cdots c_n\, c$, die eine gemeinschaft-„liche, vollständige Lösung von (δ) ist und daher durch die umgekehrte „Substitution (γ) übergeht in eine vollständige Lösung der gegebenen „Gleichungen (β)".

Wendet man diesen Satz auf das vorliegende System von 4 partiellen Differentialgleichungen mit 4 unabhängigen Variablen an, so ergeben die Gleichungen ($\alpha$) als nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer gemeinsamen Lösung wiederum die obigen 12 Gleichungen ($2^a$), die die Grössen $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ in der angegebenen Weise bestimmen. Um nach Vorschrift des Satzes die vollständige Lösung selbst zu finden, löse man zunächst das System nach $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\frac{\partial f}{\partial x_4}$ auf; dies giebt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{3}{\tau_x}\left[f\cdot\tau_i - \left\{\pi p_x^2(\eta\zeta x)_i + \varkappa q_x^2(\xi\xi x)_i + \varrho r_x^2(\xi\eta x)_i\right\}\right],\quad i=1,2,3,4,$$

wo $\tau_i = (\xi\eta\zeta)_i$ ist. Sodann wende man die Substitution:

$$x_1 = y_1 + t\cdot t_1,\quad x_2 = y_2 + t\cdot t_2,\quad x_3 = y_3 + t\cdot t_3,\quad x_4 = y_4 + t\cdot t_4$$

auf die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_1^4 t_i\cdot\frac{3}{\tau_x}\left\{f\cdot\tau_i - [\pi p_x^2(\eta\zeta x)_i + \varkappa q_x^2(\xi\xi x)_i + \varrho r_x^2(\xi\eta x)_i]\right\}$$

an, wodurch dieselbe übergeht in:

$$(\tau_y + t\cdot\tau_t)\frac{\partial f}{\partial t} - 3\tau_t\cdot f = -3(A_1 + 2A_2 t + A_3 t^2),$$

wo zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
&\pi p_y^2\ (t\eta\zeta y) + \varkappa q_y^2\ (t\xi\xi y) + \varrho r_y^2\ (t\xi\eta y) = A_1,\\
&\pi p_y p_t\,(t\eta\zeta y) + \varkappa q_y q_t\,(t\xi\xi y) + \varrho r_y r_t\,(t\xi\eta y) = A_2,\\
&\pi p_t^2\ (t\eta\zeta y) + \varkappa q_t^2\ (t\xi\xi y) + \varrho r_t^2\ (t\xi\eta y) = A_3
\end{aligned}$$

gesetzt ist, und integrire diese Gleichung, wo $t$ allein als unabhängige Variabele zu betrachten ist. Die Lagrange'sche Methode der Variation der Constanten ergiebt dann als vollständige Lösung:

$$f = b(\tau_y + t\cdot\tau_t)^3 + \frac{A_3}{\tau_t^3}(\tau_y + t\cdot\tau_t)^2 + \frac{1}{\tau_t^2}(A_2 + A_3 t)(\tau_y + t\cdot\tau_t)$$
$$+ \frac{1}{\tau_t}(A_1 + 2A_2 t + A_3 t^2) = \psi(t t_1 t_2 t_3 t_4 b).$$

Es erübrigt jetzt nur noch, für $b$ seinen Werth aus

$$\psi' = \psi(0\ t_1 t_2 t_3 t_4 b) = b\tau_y^3 + \frac{A_3\tau_y^2}{\tau_t^3} + \frac{A_2\tau_y}{\tau_t^2} + \frac{A_1}{\tau_t} = c$$

in $f = \psi$ einzusetzen und schliesslich die Substitution:

$$t_1 = \frac{x_1 - a_1}{t},\quad t_2 = \frac{x_2 - a_2}{t},\quad t_3 = \frac{x_3 - a_3}{t},\quad t_4 = \frac{x_4 - a_4}{t}$$

zu machen, so ergiebt sich als vollständige Lösung des vorliegenden Problems ganz in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (10) und (9):

$$f\cdot(\xi\eta\zeta y)^3 \quad c(\xi\eta\zeta x)^3+[\pi p_x^2\ (x\eta\zeta y)+\varkappa q_x^2\ (x\zeta\xi y)+\varrho r_x^2\ (x\xi\eta y)](\xi\eta\zeta y)^2$$
$$+[\pi p_x p_y(x\eta\zeta y)+\varkappa q_x q_y(x\zeta\xi y)+\varrho r_x r_y(x\xi\eta y)](\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta x)$$
$$+[\pi p_y^2\ (x\eta\zeta y)+\varkappa q_y^2\ (x\zeta\xi y)+\varrho r_y^2\ (x\xi\eta y)](\xi\eta\zeta x)^2.$$

## § 5.

Um die algebraische Bedeutung der für das behandelte Problem fundamentalen Combinante $\Lambda = (qrq'r')(rpr'p')(pqp'q')$ klar zu Tage treten zu lassen, soll ihr Zusammenhang mit anderen Combinanten des Netzes aufgesucht werden. Dass $\Lambda$ in der That eine Combinante ist, ergiebt sich rein algebraisch unmittelbar aus einem Satze von Herrn Gordan*). Gelegentlich und ohne Beweis theilt Frahm**) mit, dass sich sämmtliche Combinanten des Netzes als invariante Bildungen der beiden Combinanten $L=p_xq_xr_x(pqru)$ und $M=(qruv)(rpuv)(pquv)$ darstellen lassen, was sich mittelst eines Verfahrens leicht bewahrheiten lässt, analog einem von Herrn Prof. Rosanes bei ähnlicher Gelegenheit angewendeten***).

Bekanntlich†) ist jede Combinante der Formen $p_x^2$, $q_x^2$, $r_x^2$ eine Invariante, Covariante, etc. der Form $R = \Sigma \pm p_x^2\, q_y^2 r_z^2$. Es braucht also nur gezeigt zu werden, dass sich diese Form $R$ durch die Coefficienten der Formen $L$ und $M$ allein darstellen lässt. Zu diesem Zwecke mögen für die Formen $L$, $M$ eigene Symbole eingeführt werden, und zwar:

$$(11) \qquad L = p_xq_xr_x(pqru) = l_x^{v3}u_\lambda,$$

$$(12) \qquad M = (qruv)(rpuv)(pquv) = (mnuv)^3\dagger\dagger).$$

Durch Polarisation erhalten wir:

$$(\alpha) \qquad 3l_x^2l_yu_\lambda = (pqru)(p_yq_xr_x + q_yr_xp_x + r_yp_xq_x)$$

$$(\beta) \quad 3(mnuv)(m_xn_y-m_yn_x)^2 = (qruv)(r_xp_y-r_yp_x)(p_xq_y-p_yq_x)$$
$$+(rpuv)(p_xq_y-p_yq_x)(q_xr_y-q_yr_x)$$
$$+(pquv)(q_xr_y-q_yr_x)(r_xp_y-r_yp_x).$$

Multipliciren wir $(\alpha)$ mit $v_y$ und wenden rechts die aus (I) fliessende Identität an:

*) Gordan, über Combinanten; Math. Ann. Bd. V, p. 116.

**) A. a. O.

***) Math. Ann. Bd. VI, p. 278 f.

†) Gordan a. a. O.

††) In Betreff der Zulässigkeit der letzteren, symbolischen Darstellung eines Complexes vgl. Clebsch, Math. Ann. Bd. II, p. 1 ff.

$$-v_x(pqru) = p_x(qruv) + q_x(rpuv) + r_x(pquv) - u_x(pqrv),$$

subtrahiren von der so erhaltenen Gleichung die aus ihr durch Vertauschung von $u$ und $v$ entstehende und schliesslich noch die Gleichung ($\beta$), so ergiebt sich nach einigen Vereinfachungen:

$$(\gamma)\quad 3l_x^2 l_y(u_y v_\lambda - v_y u_\lambda) - 3(mnuv)(m_x n_y - m_y n_x)^2$$
$$= (qruv)(2p_y^2 q_x r_x + p_x^2 q_y r_y) + (rpuv)(2q_y^2 r_x p_x + q_x^2 r_y p_y)$$
$$+ (pquv)(2r_y^2 p_x q_x + r_x^2 p_y q_y).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit 2 und zieht dann von ihr diejenige Gleichung ab, die aus ($\gamma$) durch Vertauschung von $x$ und $y$ folgt, so erhält man:

$$(13)\quad p_y^2 q_x r_x (qruv) + q_y^2 r_x p_x (rpuv) + r_y^2 p_x q_x (pquv)$$
$$= 2l_x^2 l_y(u_y v_\lambda - v_y u_\lambda) - l_x l_y^2 (u_x v_\lambda - v_x u_\lambda)\cdot (m_x n_y - m_y n_x)^2 (mnuv).$$

Wird diese Gleichung nach $z_i$ polarisirt und schliesslich $(uv)_{ik} = (zx)_{i'k'}$ gesetzt, so wird endlich:

$$(14)\quad R = 4l_x l_y l_z (xyz\lambda) + 2(m_y n_z - m_z n_y)(m_z n_x - m_x n_z)(m_x n_y - m_y n_x).$$

Hiermit ist die gewünschte Darstellung geliefert; $\Lambda$ muss sich daher als Invariante von $L$ und $M$ darstellen lassen; ganz direct erkennt man sofort, dass:

$$(15)\qquad \Lambda = (mnm'n')^3$$

ist, wo $m'$, $n'$ neue Symbole der Form $M$ sind. Die Combinante $\Lambda$ ist somit auch eine sehr einfache Invariante der Form $M$ und zwar in ihren Coefficienten ebenfalls quadratisch. Ihre Bildungsweise kann einfach dahin angegeben werden: man bilde neben $M = (qruv)(rpuv)(pquv)$ auch $M$ in den Coordinaten $(xy)_{\varkappa\lambda} = (uv)_{\varkappa'\lambda'}$, dann entsteht $\Lambda$, wenn die Producte entsprechender Coefficienten beider Formen addirt werden. Die Bedeutung des Verschwindens derartig aus den Coefficienten zweier Formen gleichen Grades mit contragredienten Variabeln gebildeter Invarianten ist z. B. für ternäre quadratische Formen von Herrn Prof. Rosanes einer eingehenden Behandlung*) unterworfen worden. Bei Complexgleichungen reicht, da eine solche sowohl in Coordinaten $(uv)_{\varkappa\lambda}$, als $(xy)_{\varkappa\lambda}$ geschrieben werden kann, schon eine einzige zur Bildung einer derartigen Invariante hin. Das aus dem Verschwinden derselben resultirende Verhalten eines Complexes scheint bisher einer Untersuchung noch nicht unterworfen worden zu sein; ein linearer Complex wird in diesem Falle zu einem speciellen.

*) Math. Ann. Bd. VI, p. 264—312; für Formen mit mehreren Variabeln und von beliebigem Grade vgl. Rosanes, Borch. J. Bd. 76.

Die geometrische Bedeutung der Gleichung $M = 0$ ist eine zwiefache; einerseits stellt sie, wie das Clebsch'sche Uebertragungsprincip*) sofort ergiebt, den Inbegriff sämmtlicher Geraden dar, die die Flächen des Netzes in involutorischen Punktreihen schneiden, andererseits den sämmtlicher Tangenten an dieselben.

Die Formel (13) liefert die Mittel die Form $q_\pi r_\pi (qruv)$, die gleich Null gesetzt die Polgerade von $p_x^2 = 0$ darstellt, allein durch die Coefficienten von $p_x^2$ und den Combinanten $L$ und $M$ auszudrücken; hierzu hat man nur die ganz beliebigen Grössen $x_i$ mit den Symbolen $\pi_i$ zu identificiren. Nun ist aber, wie schon früher (Gl. ($\omega$) des § 3.) gezeigt worden ist, $p_x p_\pi u_\pi = \frac{1}{4} p_\pi^2 \cdot u_x$; ersetzt man hierin $x_i$ durch $(quv)_i$ und $u_i$ durch $q_i$, so ergiebt sich:

$$p_\pi q_\pi (pquv) = 0$$

und ebenso:

$$r_\pi p_\pi (rpuv) = 0.$$

Daher geht in diesem Falle (13) über in:

$$p_y^2 \cdot q_\pi r_\pi (qruv) = 2 l_\pi^2 l_y (u_y v_\lambda - u_\lambda v_y) - l_\pi l_y^2 (u_\pi v_\lambda - u_\lambda v_\pi) - (m_\pi n_y - m_y n_\pi)^2 (mnuv),$$

wo $y_i$ willkürliche Grössen sind; hiermit ist die geforderte Darstellung geliefert.

## § 6.

Besonders interessant erweist sich das betrachtete Flächennetz zweiter Ordnung dadurch, dass die Beschränkung, der es unterworfen ist, ebenso hinreichend, als nothwendig für eine andere Forderung ist, die an ein Flächennetz zweiter Ordnung gestellt werden kann. Zwei quadratische quaternäre Formen lassen sich stets als Summen derselben 4 Quadrate darstellen, und zwar in eindeutiger Weise; dagegen ist eine gleichzeitige Darstellung von drei quadratischen Formen als Summen derselben 5 Quadrate im Allgemeinen nicht ausführbar.

Ist nämlich:

$$p_x^2 = \sum_1^5 p_i g_{ix}^2, \quad q_x^2 = \sum_1^5 q_i g_{ix}^2, \quad r_x^2 = \sum_1^5 r_i g_{ix}^2,$$

wo $g_{ix} = g_{i1} x_1 + g_{i2} x_2 + g_{i3} x_3 + g_{i4} x_4$ ist, so verschwindet hierfür $\Lambda$ von selbst. Denn durch Einführung der wirklichen Coefficienten dieser kanonischen Formen an Stelle der Symbole geht $\Lambda$ über in:

$$\Lambda = (qrq'r')(rpr'p')(pqp'q')$$
$$= -\Sigma p_\varkappa p_\lambda q_\mu q_\nu r_\varrho r_\sigma (g_\varkappa g_\lambda g_\mu g_\nu)(g_\mu g_\nu g_\varrho g_\sigma)(g_\varrho g_\sigma g_\varkappa g_\lambda)^{**}),$$

*) Borch. J. Bd. 59.

**) Für eine solche Ueberführung vergl. Gordan: über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung, Math. Ann. Bd. V, p. 365 u. 366.

wo die Summation über alle Indices von 1 bis 5 zu erstrecken ist. Dass aber diese Summe verschwindet, ist auf den ersten Blick zu erkennen; es wird dies nämlich für jeden ihrer Terme der Fall sein, in dem zwei Indices gleiche Nummern bedeuten; denn dann verschwindet immer wenigstens eine der drei in jedem Gliede enthaltenen viergliederigen Determinanten; um also nicht zu verschwinden, müsste ein solches 6 verschiedene Indices enthalten; da aber nur über 5 verschiedene Indices verfügt werden kann, verschwinden sämmtliche Terme und somit $\Lambda$ selbst.

Aber $\Lambda = 0$ ist nicht bloss eine nothwendige, sondern auch hinreichende Bedingung für die in Rede stehende Darstellbarkeit. Dies zu beweisen, macht insofern mehr Schwierigkeiten, als von dem Satze, dass jede cubische quaternäre Form sich als Summe von 5 Cuben darstellen lässt, nicht Gebrauch gemacht, vielmehr hierfür in dem Folgenden ein neuer Beweis gegeben werden soll.

Ist die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung durch 5 Quadrate darstellbar $p_x^2 = \sum_1^5 p_i g_{ix}^2$, so heisst bekanntlich das von den 5 Ebenen $g_{1x} = 0, \cdots g_{5x} = 0$ gebildete Pentaeder ein Pentaeder der Fläche $p_x^2 = 0$. Man erhält durch Polarisation $p_x p_y = \sum_1^5 p_i g_{ix} g_{iy}$; setzt man hierin an Stelle von $y_i$ die Coordinaten einer Pentaederecke, z. B. die, in der sich die Ebenen $g_{3x} = 0$, $g_{4x} = 0$, $g_{5x} = 0$ schneiden, so ergiebt sich:

$$p_x(pg_3g_4g_5) = p_1 g_{1x}(g_1g_3g_4g_5) + p_2 g_{2x}(g_2g_3g_4g_5).$$

Daraus folgt: Die Polare einer Pentaederecke geht durch die ihr gegenüberliegende Kante. — Dieser Satz gestattet die Umkehrung: Hat ein Pentaeder die Eigenschaft, dass die Polaren seiner Ecken in Bezug auf ein und dieselbe Oberfläche zweiter Ordnung durch die gegenüberliegenden Kanten gehen, so ist es ein Pentaeder dieser Fläche. Unter Zugrundelegung der in der Annahme dieses Satzes geforderten Gleichungen $(pg_hg_ig_k)(pg_lg_mu) = 0$, wo die Indices die Zahlen $1, \cdots, 5$ in jeder möglichen Reihenfolge bedeuten und die $u_i$ ganz beliebige Grössen sind, lässt sich nämlich $p_x^2$ namentlich unter Anwendung der Identität (I) (§ 1.) in höchst einfacher Weise als Summe der 5 mit gewissen Constanten multiplicirten Quadrate $g_{ix}^2$ darstellen*).

Hieraus ist klar, dass der geforderte Nachweis geliefert sein wird, wenn gezeigt wird, dass unter der Voraussetzung $\Lambda = 0$ wenigstens ein Pentaeder von der Art existirt, dass die Polaren seiner Ecken in Bezug auf räumliche Flächen des Netzes durch die gegenüberliegenden Kanten gehen.

*) Derartige Darstellungen findet man bei Gordan, Math. Annalen Bd. V, p. 361 f., und bei Rosanes, ibid. Bd. VI. p. 307 ff. und Borch. J. Bd. 76.

Zu diesem Zwecke werde zunächst ein *Hülfssatz* bewiesen, der gleichzeitig eine interessante Eigenschaft des betrachteten Netzes liefert; derselbe basirt hauptsächlich auf der Darstellung von $\Lambda$, wie sie in der Formel (4) des § 3. gegeben ist; danach kann die Bedingung $\Lambda = 0$ auch ausgedrückt werden durch:

$$\begin{aligned}(\alpha)\quad & (q_\alpha^2 q_\beta'^2 r_\gamma^2 r_\delta'^2 + q_\gamma^2 q_\delta'^2 r_\alpha^2 r_\beta'^2)(p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha')(p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') \\ & + (q_\alpha^2 q_\gamma'^2 r_\delta^2 r_\beta'^2 + q_\delta^2 q_\beta'^2 r_\alpha^2 r_\gamma'^2)(p_\alpha p_\gamma' - p_\gamma p_\alpha')(p_\delta p_\beta' - p_\beta p_\delta') \\ & + (q_\alpha^2 q_\delta'^2 r_\beta^2 r_\gamma'^2 + q_\beta^2 q_\gamma'^2 r_\alpha^2 r_\delta'^2)(p_\alpha p_\delta' - p_\delta p_\alpha')(p_\beta p_\gamma' - p_\gamma p_\beta') = 0,\end{aligned}$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die Ecken des gemeinschaftlichen Poltetraeders von $q_x^2 = 0$ und $r_x^2 = 0$ bedeuten; ausserdem ist identisch:

$$(\beta)\qquad 0 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} p_\alpha & p_\beta & p_\gamma & p_\delta \\ p_\alpha' & p_\beta' & p_\gamma' & p_\delta' \\ p_\alpha & p_\beta & p_\gamma & p_\delta \\ p_\alpha' & p_\beta' & p_\gamma' & p_\delta' \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha')(p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') \\ &+ (p_\alpha p_\gamma' - p_\gamma p_\alpha')(p_\delta p_\beta' - p_\beta p_\delta') \\ &+ (p_\alpha p_\delta' - p_\delta p_\alpha')(p_\beta p_\gamma' - p_\gamma p_\beta').\end{aligned}$$

Wird überdies $(p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha')(p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') = 0$ vorausgesetzt, so gehen $(\alpha)$ und $(\beta)$ in folgende Gleichungen über:

$$\begin{aligned}& (q_\alpha^2 q_\gamma'^2 r_\delta^2 r_\beta'^2 + q_\delta^2 q_\beta'^2 r_\alpha^2 r_\gamma'^2)(p_\alpha p_\gamma' - p_\gamma p_\alpha')(p_\delta p_\beta' - p_\beta p_\delta') \\ & + (q_\alpha^2 q_\delta'^2 r_\beta^2 r_\gamma'^2 + q_\beta^2 q_\gamma'^2 r_\alpha^2 r_\delta'^2)(p_\alpha p_\delta' - p_\delta p_\alpha')(p_\beta p_\gamma' - p_\gamma p_\beta') = 0, \\ & (p_\alpha p_\gamma' - p_\gamma p_\alpha')(p_\delta p_\beta' - p_\beta p_\delta') + (p_\alpha p_\delta' - p_\delta p_\alpha')(p_\beta p_\gamma' - p_\gamma p_\beta') = 0.\end{aligned}$$

Beachtet man, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} q_\alpha^2 q_\gamma'^2 r_\delta^2 r_\beta'^2 + q_\delta^2 q_\beta'^2 r_\alpha^2 r_\gamma'^2 & q_\alpha^2 q_\delta'^2 r_\beta^2 r_\gamma'^2 + q_\beta^2 q_\gamma'^2 r_\alpha^2 r_\delta'^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (q_\alpha^2 r_\beta^2 - q_\beta^2 r_\alpha^2)(q_\gamma'^2 r_\delta'^2 - q_\delta'^2 r_\gamma'^2)$$

nicht verschwindet — denn es müssten dann zwei Ecken des Poltetraeders $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ zusammenfallen —, so erkennt man als nothwendige Folge dieser beiden Gleichungen:

$$(p_\alpha p_\gamma' - p_\gamma p_\alpha')(p_\delta p_\beta' - p_\beta p_\delta') = 0, \quad (p_\alpha p_\delta' - p_\delta p_\alpha')(p_\beta p_\gamma' - p_\gamma p_\beta') = 0.$$

Die geometrische Bedeutung dieses Resultates ist eine sehr einfache. Einem beliebigen Punkte $\alpha$ des Raumes ist nämlich in Bezug auf das Netz ein ganz bestimmter Punkt *conjugirt*, d. i. der Schnittpunkt seiner Polarebenen in Bezug auf sämmtliche Flächen des Netzes, dessen Coordinaten sich aus den Gleichungen $p_\alpha p_x = 0$, $q_\alpha q_x = 0$, $r_\alpha r_x = 0$ ergeben; ist aber $\alpha$ die Spitze eines der im Netze vorhandenen Kegel, so haben die drei Ebenen $p_\alpha p_x = 0$, $q_\alpha q_x = 0$, $r_\alpha r_x = 0$ eine Gerade gemein; den *Kegelspitzen* des Netzes ist demnach nicht je ein Punkt, sondern je eine *Gerade conjugirt*; dieselben erfüllen bekanntlich eine Raumcurve 6. Ordnung $C_6$. Die Ecken des Poltetraeders, das den Flächen eines im Netze enthaltenen Büschels gemeinsam angehört,

sind gleichzeitig Kegelspitzen des Netzes. Sind nun $\alpha\beta\gamma\delta$, wie bisher, die Spitzen der in dem Büschel $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ enthaltenen Kegel, so erhält man die Bedingung, unter der sich die conjugirten Geraden zweier derselben, z. B. $\alpha$ und $\beta$ treffen, durch Elimination von $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ aus den vier Gleichungen $p_\alpha p_x = 0$, $q_\alpha q_x = 0$, $p_\beta p_x = 0$, $q_\beta q_x = 0$ zunächst in der Gestalt: $p_\alpha q_\alpha p_\beta' q_\beta' (pqp'q') = 0$. Multiplicirt man diese Gleichung mit der im Allgemeinen nicht verschwindenden Determinante $(\alpha\beta\gamma\delta)$ und benutzt die in § 3. abgeleitete Gleichung $(4^a)$:

$$q_\alpha q_\beta' (pp'qq')(\alpha\beta\gamma\delta) = q_\alpha^2 q_\beta'^2 (p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma'),$$

so wird, da $q_x^2 = 0$ als ohne Doppelpunkt vorausgesetzt werden darf, jene Bedingung identisch mit $p_\alpha p_\beta' (p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') = 0$ oder auch:

$$(p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha')(p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') = 0.$$

Aus dieser für das Treffen der conjugirten Geraden von $\alpha$ und $\beta$ nothwendigen und hinreichenden Bedingung ergiebt sich für das allgemeine Netz beiläufig der Satz: Schneiden sich die conjugirten Geraden zweier Kegelspitzen, so treffen sich auch die conjugirten Geraden derjenigen zwei Kegelspitzen, die mit jenen zusammen ein Quadrupel bilden. Unter *Quadrupel* sollen nämlich vier Kegelspitzen des Netzes verstanden werden, die einem seiner Büschel angehören.

Das obige Resultat lässt sich daher nun dahin interpretiren: *Erfüllt ein Flächennetz zweiter Ordnung die durch $\Lambda = 0$ dargestellte Bedingung, und treffen sich zwei von den den Punkten eines Quadrupels conjugirten Geraden, so liegen überhaupt sämmtliche, den Punkten dieses Quadrupels conjugirte Geraden in ein und derselben Ebene.*

Mit Hülfe dieses Satzes wird es nun leicht sein, die Existenz nicht blos einer, sondern unendlich vieler Pentaeder, die den Flächen des der Bedingung $\Lambda = 0$ unterworfenen Netzes gemeinsam sind, nachzuweisen. Es ist von vornherein klar, dass die Ecken eines solchen Kegelspitzen sein müssen; denn nur diese besitzen die den Pentaederecken nothwendig zukommende Eigenschaft, dass ihre Polarebenen in Bezug auf alle Flächen des Netzes eine Gerade gemein haben.

Zuvörderst sollen nun einige Sätze über die Kegelspitzen eines allgemeinen Netzes vorausgeschickt werden*). Aus einer ganz allgemeinen, algebraischen Betrachtung wird leicht klar, dass von einem beliebigen Punkte der Kegelspitzencurve $C_6$ und überhaupt jeder Raumcurve eine endliche Anzahl von Geraden möglich ist, die sie ausserdem noch in zwei Punkten treffen. Seien daher $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ drei in einer Geraden liegende Kegelspitzen des durch $p_x^2 = 0$, $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ definirten Netzes und zwar — wie, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu

*) Vgl. Sturm, über das Flächennetz zweiter Ordnung; Borch. J. Bd. 70, p. 212—240.

thun, vorausgesetzt werden darf, $\alpha$ die Spitze der als Kegel angenommenen Oberfläche $p_x^2 = 0$ und $\beta$, $\gamma$ zwei Kegelspitzen des durch $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ definirten Büschels, $\alpha'$, $\alpha''$ die beiden übrigen Kegelspitzen desselben: dann bestehen Identitäten von folgender Form:

$$(16)\quad p_\alpha p_x \equiv 0,\quad q_\beta q_x - \mu r_\beta r_x \equiv 0,\quad q_\gamma q_x - \nu r_\gamma r_x \equiv 0,\quad q_{\alpha'} q_x - \lambda' r_{\alpha'} r_x \equiv 0,$$
$$q_{\alpha''} q_x - \lambda'' r_{\alpha''} r_x \equiv 0$$

und ausserdem die Gleichungen:

$$(17)\qquad l\alpha_i + m\beta_i + n\gamma_i = 0,\quad i = 1, 2, 3, 4;$$

und es ist — allgemein unter $G_x$ die conjugirte Gerade einer Kegelspitze $x$ verstanden — die Gerade

$G_\alpha$ definirt durch die Gleichungen $q_\alpha q_x = 0$, $r_\alpha r_x = 0$,

$G_\beta$ " " " " $p_\beta p_x = 0$, $q_\beta q_x \equiv \mu r_\beta r_x = 0$,

$G_\gamma$ " " " " $p_\gamma p_x = 0$, $q_\gamma q_x \equiv \nu r_\gamma r_x = 0$,

$G_{\alpha'}$ " " " " $p_{\alpha'} p_x = 0$, $q_{\alpha'} q_x \equiv \lambda' r_{\alpha'} r_x = 0$,

$G_{\alpha''}$ " " " " $p_{\alpha''} p_x = 0$, $q_{\alpha''} q_x \equiv \lambda'' r_{\alpha''} r_x = 0$.

Aus der Bedeutung der Punkte $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\alpha''$ ergeben sich sofort die Gleichungen

$$q_{\alpha'} q_\beta = 0,\quad q_{\alpha'} q_\gamma = 0,\quad q_{\alpha''} q_\beta = 0,\quad q_{\alpha''} q = 0$$

und hieraus in Folge von (17):

$$q_{\alpha'} q_\alpha = 0,\quad q_{\alpha''} q_\alpha = 0;$$

da nun wegen (16) auch $p_{\alpha'} p_\alpha = 0$, $p_{\alpha''} p_\alpha = 0$ ist, so ist ersichtlich, dass $G_{\alpha'}$ und $G_{\alpha''}$ durch $\alpha$ gehen, und weiter, dass $G_\alpha$ durch $\alpha'$ und $\alpha''$ geht.

Aus der Verbindung von (16) und (17) gehen die Identitäten:

$$A = mp_\beta p_x \equiv -np_\gamma p_x,$$
$$B = l(q_\alpha q_x - \mu r_\alpha r_x) \equiv -n(q_\gamma q_x - \mu r_\gamma r_x),$$
$$C = l(q_\alpha q_x - \nu r_\alpha r_x) \equiv -m(q_\beta q_x - \nu r_\beta r_x)$$

hervor. Wie hieraus, aus den Gleichungen von $G_\alpha$, $G_\beta$ und $G_\gamma$ und (16) ersichtlich ist, geht die Ebene $A = 0$ durch $G_\beta$, $G_\gamma$ und $\alpha$, ebenso die Ebene $B = 0$ durch $G_\gamma$, $G_\alpha$ und $\beta$ und die Ebene $C = 0$ durch $G_\alpha$, $G_\beta$ und $\gamma$; und hieraus folgt, da $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ verschiedene Ebenen darstellen, dass $G_\alpha$, $G_\beta$, $G_\gamma$ sich in einem Punkte $\theta$ treffen müssen; die Gleichungen von $G_\alpha$, $G_\beta$ und $G_\gamma$ liefern dann:

$$p_\alpha p_\theta = 0,\quad q_\alpha q_\theta = 0,\quad r_\alpha r_\theta = 0,$$
$$p_\beta p_\theta = 0,\quad q_\beta q_\theta = 0,\quad r_\beta r_\theta = 0,$$
$$p_\gamma p_\theta = 0,\quad q_\gamma q_\theta = 0,\quad r_\gamma r_\theta = 0;$$

d. h. die drei Ebenen $p_\theta p_x = 0$, $q_\theta q_x = 0$, $r_\theta r_x = 0$ schneiden sich in ein und derselben Geraden $(\alpha\beta\gamma)$; mit andern Worten: $\theta$ ist eine

Kegelspitze und die Gerade $(\alpha\beta\gamma)$ ihre conjugirte Gerade. Da $(\alpha\beta\gamma)$ eine beliebige, die Kegelspitzencurve dreimal treffende Gerade ist, so folgt hieraus der Satz: *Jede die Kegelspitzencurve dreifach treffende Gerade ist die conjugirte Gerade einer Kegelspitze* und zwar derjenigen, in der sich die conjugirten Geraden derjenigen Kegelspitzen schneiden, in denen jene Gerade die Kegelspitzencurve trifft; und weiter, da $\alpha$ eine beliebige Kegelspitze ist und $G_\alpha$ durch $\theta$, $\alpha'$, $\alpha''$, geht: *Jede einer Kegelspitze conjugirte Gerade trifft die Kegelspitzencurve in drei Punkten.*

Aus alledem ergiebt sich nun folgender Satz: Ist $\theta$ irgend eine Kegelspitze, so trifft $G_\theta$ die Kegelspitzencurve in drei Punkten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, deren conjugirte Geraden $G_\alpha$, $G_\beta$, $G_\gamma$ sich in dem Punkte $\theta$ treffen. Durch diese drei Geraden lassen sich daher drei Ebenen legen, je eine durch $G_\beta$ und $G_\gamma$, $G_\gamma$ und $G_\alpha$, $G_\alpha$ und $G_\beta$, die von $G_\theta$ bez. in den Punkten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ geschnitten werden. Zwei Kegelspitzen bestimmen zwei andere, die jene zu einem Quadrupel ergänzen; bilden nun $\beta\gamma\alpha'\alpha''$, $\gamma\alpha\beta'\beta''$, $\alpha\beta\gamma'\gamma''$ je ein Quadrupel, so liegen die Punktepaare $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ auf der Geraden $G_\alpha$ resp. $G_\beta$, $G_\gamma$, so dass:

die durch $G_\beta$ und $G_\gamma$ gehende Ebene die Kegelspitzencurve in den 6 Punkten $\theta\ \alpha\ \beta'\ \beta''\ \gamma'\ \gamma''$,

die durch $G_\gamma$ und $G_\alpha$ gehende Ebene die Kegelspitzencurve in den 6 Punkten $\theta\ \beta\ \gamma'\ \gamma''\ \alpha'\ \alpha''$,

die durch $G_\alpha$ und $G_\beta$ gehende Ebene die Kegelspitzencurve in den 6 Punkten $\theta\ \gamma\ \alpha'\ \alpha''\ \beta'\ \beta''$

schneidet; endlich gehen $G_{\alpha'}$, $G_{\alpha''}$ durch $\alpha$, $G_{\beta'}$, $G_{\beta''}$ durch $\beta$, $G_{\gamma'}$, $G_{\gamma''}$ durch $\gamma$.

Die so definirten 10 Punkte $\theta\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \alpha''\ \beta''\ \gamma''$ lassen sich im Allgemeinen nicht als Ecken eines Pentaeders auffassen; denn sonst müsste auch das allgemeine Flächennetz ein Pentaeder besitzen; hierdurch würde aber die Bedingung $\Lambda=0$ erfüllt werden, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Dagegen soll gezeigt werden, dass die Bedingung $\Lambda=0$ ausreicht, um jene Auffassung zu ermöglichen. Nach dem bewiesenen Hülfssatze werden nämlich in diesem Falle, da $G_\alpha$, $G_\beta$, $G_\gamma$ sich in einem Punkte treffen und $\beta\gamma\alpha'\alpha''$, $\gamma\alpha\beta'\beta''$, $\alpha\beta\gamma'\gamma''$ je ein Quadrupel bilden, folgende drei mal vier Gerade je in einer Ebene liegen:

$$G_\beta G_\gamma G_{\alpha'} G_{\alpha''};\quad G_\gamma G_\alpha G_{\beta'} G_{\beta''};\quad G_\alpha G_\beta G_{\gamma'} G_{\gamma''}.$$

In jeder beliebigen Ebene liegen höchstens 6 Kegelspitzen, da diese sämmtlich auf einer Raumcurve 6. Ordnung enthalten sind; da nun ferner auf jeder der 4 Geraden $G_\beta\ G_\gamma\ G_{\alpha'}\ G_{\alpha''}$ drei Kegelspitzen und diese Geraden selbst in einer Ebene sich befinden, in der die 6 Kegelspitzen $\theta\ \alpha\ \beta'\ \beta''\ \gamma'\ \gamma''$ liegen, so ergiebt sich mit Nothwendigkeit, dass

$\alpha\ \beta'\ \gamma'$ auf $G_{\alpha'}$ und $\alpha\ \beta''\ \gamma''$ auf $G_{\alpha''}$

liegen. Ebenso liegen $\beta\ \gamma'\ \alpha'$ auf $G_{\beta'}$, $\gamma\ \alpha'\ \beta'$ auf $G_{\gamma'}$, $\beta\ \gamma''\ \alpha''$ auf $G_{\beta''}$ und $\gamma\ \alpha''\ \beta''$ auf $G_{\gamma''}$. Hieraus ist unmittelbar zu erkennen, dass ebenso wie $\theta\ \alpha\ \beta'\ \beta''\ \gamma'\ \gamma''$, $\theta\ \beta\ \gamma'\ \gamma''\ \alpha'\ \alpha''$, $\theta\ \gamma\ \alpha'\ \alpha''\ \beta'\ \beta''$ auch $\alpha\ \beta\ \gamma\ \alpha'\ \beta'\ \gamma'$ und $\alpha\ \beta\ \gamma\ \alpha''\ \beta''\ \gamma''$ je in einer Ebene liegen, was zu zeigen war.

Die angegebene Construction des Pentaeders enthält ein willkürliches Element, den Punkt $\theta$, der ganz beliebig auf der Kegelspitzencurve gewählt werden kann; daher folgt endlich der Satz:

*Drei quaternäre quadratische Formen lassen sich immer und nur dann als Summen derselben fünf Quadrate* (und zwar in einfach unendlich vielfacher Weise) *darstellen, wenn sie sich als Polaren ein und derselben cubischen Form auffassen lassen.*

Unter dieser Bedingung wird demnach folgende Darstellung der drei quaternären quadratischen Formen berechtigt sein:

$$p_x^2 = \sum_1^5 p_i g_{ix}^2, \quad q_x^2 = \sum_1^5 q_i g_{ix}^2, \quad r_x^2 = \sum_1^5 r_i g_{ix}^2.$$

Die cubischen Formen, als deren Polaren sie sich auffassen lassen, sind nach § 4. [Gleichung (9) und (10)] gegeben durch: $A_x^3 = \mu a_x^3 + \nu(\xi\eta\zeta x)^3$, wo

$$a_x^3(\xi\eta\zeta y)^3 = \sum_1^5 \{g_{ix}^2(\xi\eta\zeta y)^2 + g_{ix}g_{iy}(\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta x) + g_{iy}^2(\xi\eta\zeta x)^2\} \cdot \{\pi p_i(x\eta\zeta y) + \varkappa q_i(x\zeta\xi y) + \varrho r_i(x\xi\eta y)\}$$

$$= \sum_1^5 \{g_{ix}^3(\xi\eta\zeta y)^3 - g_{iy}^3(\xi\eta\zeta x)^3\} \frac{\pi p_i(x\eta\zeta y) + \varkappa q_i(x\zeta\xi y) + \varrho r_i(x\xi\eta y)}{g_{ix}(\xi\eta\zeta y) - g_{iy}(\xi\eta\zeta x)}$$

$$= \sum_1^5 \{g_{ix}^3(\xi\eta\zeta y)^3 - g_{iy}^3(\xi\eta\zeta x)^3\} \frac{\pi p_i(x\eta\zeta y) + \varkappa q_i(x\zeta\xi y) + \varrho r_i(x\xi\eta y)}{g_{i\xi}(x\eta\zeta y) + g_{i\eta}(x\zeta\xi y) + g_{i\zeta}(x\xi\eta y)}$$

ist und $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ beliebige, aber bestimmte Werthe haben sollen. Die Coordinaten $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ haben den Identitäten (2) des § 3. zu genügen, die jetzt lauten:

$$\sum_1^5 g_{ix}(\varkappa q_i g_{i\zeta} - \varrho r_i g_{i\eta}) = 0,$$

$$\sum_1^5 g_{ix}(\varrho r_i g_{i\xi} - \pi p_i g_{i\zeta}) = 0,$$

$$\sum_1^5 g_{ix}(\pi p_i g_{i\eta} - \varkappa q_i g_{i\xi}) = 0.$$

Zwischen den 5 Grössen $g_{1x}, \cdots, g_{5x}$ besteht nur *eine* lineare, homogene Relation:

$$\sum_1^5 c_i g_{ix} \equiv \begin{vmatrix} g_{1x} & g_{2x} & g_{3x} & g_{4x} & g_{5x} \\ g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} & g_{51} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} & g_{52} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} & g_{53} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} & g_{51} \end{vmatrix} = 0.$$

Nach der Methode der Lagrange'schen Multiplicatoren zerlegen sich daher die eben angeführten Identitäten unter Einführung dreier neuen Unbekannten $\lambda$, $\mu$, $\nu$ in die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\varkappa q_i g_{i\zeta} - \varrho r_i g_{i\eta} + \lambda c_i = 0, \\ &\varrho r_i g_{i\xi} - \pi p_i g_{i\zeta} + \mu c_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \\ &\pi p_i g_{i\eta} - \varkappa q_i g_{i\xi} + \nu c_i = 0, \end{aligned}$$

Multiplicirt man dieselben mit $g_{i\xi}$, resp. $g_{i\eta}$, $g_{i\zeta}$ und addirt, so folgen die 5 Gleichungen;

$$\lambda g_{i\xi} + \mu g_{i\eta} + \nu g_{i\zeta} = 0,$$

die, wenn nicht über das Pentaeder eine sehr beschränkende Annahme gemacht werden soll, nur durch:

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0$$

befriedigt werden können. Dies liefert die höchst einfachen Beziehungen:

$$\pi p_i : \varkappa q_i : \varrho r_i = g_{i\xi} : g_{i\eta} : g_{i\zeta}$$

oder hiermit gleichbedeutend:

$$\pi p_i = \omega_i g_{i\xi}, \quad \varkappa q_i = \omega_i g_{i\eta}, \quad \varrho r_i = \omega_i g_{i\zeta}, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

In Folge dessen kann nun den cubischen Formen die Gestalt gegeben werden:

$$\begin{aligned} A_x^3 &= \frac{\mu}{(\xi\eta\zeta y)^3} \sum_1^5 \omega_i \left\{ g_{ix}^3 (\xi\eta\zeta y)^3 - g_{iy}^3 (\xi\eta\zeta x)^3 \right\} + \nu (\xi\eta\zeta x)^3 \\ &= \mu \sum_1^5 \omega_i g_{ix}^3 - (\xi\eta\zeta x)^3 \left\{ \frac{\mu \sum_1^5 \omega_i g_{iy}^3}{(\xi\eta\zeta y)^3} - \nu \right\}. \end{aligned}$$

Wir wissen, dass $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ eine einfache Mannigfaltigkeit entsprechender Werthe annehmen können; ist $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ ein beliebiger dieser Werthsysteme, so lässt sich dann $\frac{\nu}{\mu}$ so bestimmen, dass

$$\mu \frac{\sum \omega_i g_{iy}^3}{(\xi\eta\zeta y)^3} - \nu = 0$$

wird, und $A_x^3$ sich als Summe von 5 Cuben darstellt:

$$A_x^3 = \mu \sum_1^5 \omega_i g_{ix}^3 ;$$

sämmtliche zweifach unendlich vielen cubischen Formen, als deren Polaren sich die drei gegebenen quadratischen Formen auffassen lassen, sind daher darstellbar als Summen von 5 Cuben; und zwar je eine einfache Mannigfaltigkeit derselben durch *dieselben* 5 Cuben.

Indem man nun von irgend drei Polaren einer cubischen quaternären Form ausgeht, wird man zu einer Darstellung derselben als Summe von 5 Cuben gelangen; dies beweist den Satz:

*Jede quaternäre cubische Form lässt sich im Allgemeinen als Summe von* 5 *Cuben darstellen.*

Dass dies stets nur auf eine einzige Weise möglich ist, lässt sich nachträglich leicht zeigen.

Lissa, im November 1876.

# Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(Zweite Abhandlung.)

Von Sophus Lie in Christiania.

In zwei grösseren Arbeiten, die in diesem Journale gedruckt sind, habe ich versucht die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. (Math. Annalen Bd. IX, p. 245) und die verwandte Theorie der Berührungstransformationen (Math. Ann. Bd. VIII, p. 215) zu entwickeln*). Diese neue Abhandlung schliesst sich als Fortsetzung an jene beiden an. Im ersten Abschnitte entwickle ich, indem ich zugleich das Mayer'sche Theorem (Math. Annalen Bd. V, p. 466) als bekannt voraussetze, mehrere neue und nach meiner Auffassung äusserst merkwürdige Integrationstheorien der partiellen Differentialgleichungen 1. O.

Im zweiten Abschnitte begründe ich eine allgemeine Theorie der infinitesimalen Transformationen, die mit der Euler'schen Theorie des *Integrabilitätsfactors* und der Jacobi'schen Theorie des *letzten Multiplicators* in Verbindung steht. Ich dehne den Multiplicatorbegriff auf vollständige Systeme linearer partieller Differentialgleichungen aus. Indem ich diese neuen Theorien auf partielle Differentialgleichungen 1. O. anwende, finde ich die Resultate des ersten Abschnittes in neuer Weise wieder.

Im dritten Abschnitte behandle ich die schwierige Frage, ob es denkbar sei, dass die jetzigen Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen 1. O. künftig einmal durch noch einfachere ersetzt werden könnten. Indem ich zwei Hypothesen, deren Richtigkeit kaum bezweifelt werden wird, als Axiome aufstelle, gelingt es mir nachzuweisen, dass die von mir in dieser und in jenen Abhandlungen ent-

*) Derjenige, welcher meine Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen und Berührungstransformationen zu studiren wünscht, fängt am besten mit meiner Abhandlung in Bd. IX dieses Journals an. Darnach mag er die Abhandlung in Bd. VIII und schliesslich meine jetzige Arbeit lesen. Die beiden letzten Abhandlungen setzen das Mayer'sche Theorem als bekannt voraus.

wickelten Theorien, die bekanntlich theilweise der Jacobi-Mayer'schen Integrationsmethode (Math. Annalen Bd. V) äquivalent sind, das Grösstmögliche leisten. — Den Schluss meiner Arbeit bilden einige Noten.

## Abschnitt I.

Zuerst bestimme ich den allgemeinsten Fall, in welchem man aus gewissen bekannten Lösungen des vollständigen Systems

$$(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0, \text{ wo } (f_i f_k) = 0,$$

die fehlenden Lösungen durch ausführbare Operationen ableiten kann. Unter den übrigen Resultaten dieses Abschnittes hebe ich noch hervor, dass die Bestimmung von $2m+1$ fehlenden Lösungen des obigen vollständigen Systems im Allgemeinen nicht schwieriger ist als die Bestimmung von $2m$ fehlenden Lösungen dieses Systems. Dieser Satz giebt, wenn $m=0$ gesetzt wird, den von Jacobi herrührenden Satz, dass die Bestimmung der letzten Lösung immer eine ausführbare Operation ist*).

### § 1.

### Ein neuer Fundamentalsatz.

In diesem Paragraphen gebe ich eine Reihe neuer Fälle an, in denen man aus gewissen bekannten Lösungen des vollständigen Systems

$$(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0, \text{ wo } (f_i f_k) = 0,$$

die fehlenden Lösungen durch ausführbare Operationen herleiten kann.

**1.** Satz 1. *Sind $f_1 \cdots f_r$ bekannte Functionen von $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$, die eine Relation von der Form*

$$(1) \qquad p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + dU$$

*erfüllen, so lassen sich die Grössen $F_k$ durch eine Anzahl Differentiationen bestimmen, nachdem $U$ durch eine Quadratur gefunden ist.*

Beweis. Ich drücke $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ als Functionen von $f_1 \cdots f_r$ und von $2n-r$ passend gewählten weiteren Grössen $u_1 \cdots u_{2n-r}$ aus, und führe sodann die $f$ und $u$ als unabhängige Variable ein. Hierdurch erhält die gegebene Gleichung die Form:

$$\sum_i \sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} du_i + \sum_j \sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial f_j} df_j = \sum_j F_j df_j + \sum_i \frac{\partial U}{\partial u_i} du_i + \sum_j \frac{\partial U}{\partial f_j} df_j,$$

*) Die Hauptresultate dieses Abschnitts finden sich in der Abhandlung „Resumé einer neuen Integrationstheorie", Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. I, Christiania 1876.

und zerfällt daher in die beiden Systeme:

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = \sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i}, \tag{2}$$

$$F_j = -\frac{\partial U}{\partial f_j} + \sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial f_j}. \tag{3}$$

Das erste System giebt, wenn man es mit $du_i$ multiplicirt, nach $i$ summirt und hierauf integrirt:

$$U = \int \sum_i \sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} du_i + \Omega(f_1 \cdots f_r), \tag{4}$$

wo die Integrationsconstante $\Omega$ eine arbiträre Function der $f$ ist. Nachdem $U$ in dieser Weise durch eine Quadratur gefunden ist, ergeben sich die $F_j$ vermöge der Formel (3) durch blosse Differentiationen, was eben zu beweisen war. — Man erhält übrigens einen eleganteren Ausdruck für $F_j$, wenn man $U$ aus den Gleichungen (2) und (3) eliminirt. Dies giebt:

$$\frac{\partial F_j}{\partial u_i} = \sum_k \left( \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial f_j} - \frac{\partial p_k}{\partial f_j} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \right),$$

woraus durch Multiplication mit $du_i$, Summation nach $i$ und Integration folgt:

$$F_j = \int \sum_i \sum_k \left( \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial f_j} - \frac{\partial p_k}{\partial f_j} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \right) du_i.$$

Diese Formel enthält als Integrationsconstante eine arbiträre Function der $f$, die durch Einsetzung in (1) bestimmt wird. Wendet man dagegen die Formeln (4) und (3) an, so kann $\Omega$ ganz willkürlich als Function der $f$ gewählt werden.

Satz 2. *Die Gleichungen*

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + dU, \tag{1}$$

$$(f_1 f_2) = 0, \quad (f_1 f_3) = 0, \cdots (f_1 f_r) = 0 \tag{5}$$

*ziehen die Relationen*

$$(f_1 F_1) = 1, \quad (f_1 F_k) = 0, \quad [f_1, z - U] = 0$$

*nach sich.*

Beweis. Die Bedingungsgleichung (1) löst sich in die $2n$ folgenden Gleichungen auf:

$$p_k = \sum_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U}{\partial x_k}, \tag{6}$$

$$0 = \sum_i F_i \frac{\partial f_i}{\partial p_k} + \frac{\partial U}{\partial p_k}, \tag{7}$$

woraus durch Differentiation, indem wir die $x$ und $p$ als von einander unabhängig auffassen,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_h}\sum_i F_i\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_i F_i\frac{\partial f_i}{\partial x_h},$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial p_h}\sum_i F_i\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_i F_i\frac{\partial f_i}{\partial p_h},$$

$$1 = \frac{\partial}{\partial p_k}\sum_i F_i\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_i F_i\frac{\partial f_i}{\partial p_k},$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial p_h}\sum_i F_i\frac{\partial f_i}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k}\sum_i F_i\frac{\partial f_i}{\partial p_h},$$

und durch Ausführung:

$$0 = \sum_{i=1}^{i=r}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_h}\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\frac{\partial f_i}{\partial x_h}\right),$$

$$0 = \sum_{i=1}^{i=r}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_h}\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\frac{\partial f_i}{\partial p_h}\right),$$

$$1 = \sum_{i=1}^{i=r}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\frac{\partial f_i}{\partial p_k}\right),$$

$$0 = \sum_{i=1}^{i=r}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_h}\frac{\partial f_i}{\partial p_k} - \frac{\partial F_i}{\partial p_k}\frac{\partial f_i}{\partial p_h}\right)$$

entsteht. Diese Relationen zeigen, dass die Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{aligned} u_i &= \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}y_k + \frac{\partial f_i}{\partial p_k}z_k\right)\\ v_i &= \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}y_k + \frac{\partial F_i}{\partial p_k}z_k\right)\end{aligned}\qquad (i = 1\cdots r)$$

die $2n$ folgenden nach sich ziehen:

$$\sum_{i=1}^{i=r}\left(u_i\frac{\partial F_i}{\partial p_h} - v_i\frac{\partial f_i}{\partial p_h}\right) = y_h,$$

$$\sum_{i=1}^{i=r}\left(u_i\frac{\partial F_i}{\partial x_h} - v_i\frac{\partial f_i}{\partial x_h}\right) = -z_h.$$

Setzen wir diese Werthe der $y$ und $z$ in (8) ein, so kommt:

$$u_i = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} u_\varrho\,(f_i F_\varrho) + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} v_\varrho\,(f_\varrho f_i),$$

und, wenn wir insbesondere $i = 1$ setzen und dabei die Relationen (5) berücksichtigen:

$$u_1 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} u_\varrho (f_1 F_\varrho). \tag{9}$$

Da nun aber $f_1, f_2, \cdots f_r$ unabhängige Functionen der $x\ p$ sind, und es in Folge dessen unmöglich ist, zwischen den $r$ Gleichungen (8) die Grössen $y_k$ und $z_k$ zu eliminiren, so muss die Gleichung (9) an sich identisch und folglich

$$1 = (f_1 F_1), \quad (f_1 F_2) = 0, \quad (f_1 F_3) = 0, \cdots (f_1 F_r) = 0$$

sein. Setzen wir andererseits die Werthe (6) und (7) der Differentialquotienten von $U$ in

$$[f_1, z - U] = -\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial f_1}{\partial p_k} - \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial p_k} - \frac{\partial f_1}{\partial p_k} \frac{\partial U}{\partial x_k} \right)$$

ein, so erhalten wir:

$$[f_1, z - U] = \sum_{i=1}^{i=r} F_i (f_1 f_i),$$

oder, da alle $(f_1 f_i)$ gleich Null sind,

$$[f_1, z - U] = 0.$$

Hiermit ist unser Satz erwiesen.

Satz 3. *Besteht die Gleichung*

$$(1)\ p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + dU$$

*und sind dabei $f_1 \cdots f_q \cdots f_r$ gemeinsame Lösungen des vollständigen Systems*

$$(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0, \tag{10}$$

*so sind $F_{q+1} \cdots F_r$ die fehlenden Lösungen dieses Systems und die Grösse $U$ erfüllt die Relationen:*

$$[f_1, z - U] = 0, \cdots [f_q, z - U] = 0. \tag{11}$$

Beweis. Nach der Theorie des Pfaff'schen Problems verlangt das Bestehen der Gleichung (1), dass $2n$ von den $2r$ Grössen $F_k$ und $f_k$ von einander unabhängig sind. Demzufolge müssen unter den $2r - q$ Grössen

$$f_1 \cdots f_r\ F_{q+1} \cdots F_r$$

jedenfalls $2n - q$ von einander unabhängige vorkommen. Nach dem vorhergehenden Satze sind aber alle diese $2r - q$ Grössen Lösungen des vollständigen Systems (10), weil nach Voraussetzung $f_1 \cdots f_r$ demselben genügen. Nun besitzt dieses System eben nur $2n - q$ unabhängige Lösungen, also sind alle Lösungen desselben Functionen von

$f_1 \cdots f_r\, F_{q+1} \cdots F_r$. Dass andererseits $U$ den Gleichungen (11) genügt, folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Satze.

Theorem I. *Kennt man von den Lösungen des vollständigen Systems*

$$(f_1 f) = 0, \quad (f_2 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0, \text{ wo } (f_i f_k) = 0,$$

*eine so grosse Anzahl, etwa $f_1 \cdots f_q \cdots f_r$, dass eine Relation der Form*

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + dU$$

*stattfindet, so verlangt die Integration des Involutionssystems*

$$f_1 = \alpha_1, \cdots f_q = \alpha_q,$$

*nachdem $U$ durch eine Quadratur gefunden ist, nur gewiss Differentiationen und Eliminationen.*

Beweis. Wir bestimmen (Satz 1.) $U$ durch eine Quadratur und hierauf $F_{q+1} \cdots F_r$ durch Differentiation. Hiermit kennen wir (Satz 3.) alle Lösungen des vollständigen Systems $(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0$, und ausserdem eine Lösung des Systems $[f_1, z - U] = 0, \cdots [f_q, z - U] = 0$. Also können wir mit Hülfe der erweiterten Cauchy'schen Methode eine vollständige Lösung des vorgelegten Involutionssystems durch blosse Eliminationsoperationen ermitteln.

2. Um die Wichtigkeit und Tragweite des aufgestellten Theorems klar hervortreten zu lassen, werden wir zwei weitere allgemeine Sätze entwickeln.

Satz 4. *Kennt man unter den Lösungen des vollständigen Systems*

$$(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0, \text{ wo } (f_i f_k) = 0,$$

*eine so grosse Anzahl, $f_1 \cdots f_q \cdots f_r$, dass die von den $f$ erzeugte Gruppe $n$-gliedrige Involutionssysteme enthält, so verlangt die Integration des Involutionssystems*

$$f_1 = \alpha_1, \cdots f_q = \alpha_q$$

*nur noch ausführbare Operationen.*

Beweis. Die aus den $f$ durch Anwendung des Poisson-Jacobi'schen Theorems hervorgehende Gruppe $f_1 \cdots f_q \cdots f_r \cdots f_s$ besitzt unter der gemachten Voraussetzung die kanonische Form $X_1 \cdots X_n$ $P_1 \cdots P_m$*). Folglich besteht eine Relation der Form**):

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = Q_1 dX_1 + \cdots + Q_n dX_n + dV,$$

und da die $X_k$ Functionen von $f_1 \cdots f_s$ sind, so besteht auch eine Relation von der Form

---

*) Vgl. Math. Annalen Bd. VIII, p. 267.

**) Ibid. p. 228, Satz 6.

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_s df_s + dV,$$

und also kann nach Theorem 1. die Integration des vorgelegten Involutionssystems vermöge ausführbarer Operationen bewirkt werden.

Satz 5. *Besteht die Gleichung*

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + dU,$$

*so besitzt die von* $f_1 \cdots f_r$ *erzeugte Gruppe die kanonische Form* $X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_m$.

Beweis. Sei $X_1 \cdots X_\alpha P_1 \cdots P_\beta$ eine kanonische Gruppe, welche die Grössen $f_1 \cdots f_r$ enthält. Drücken wir die $f$ als Functionen von $X_1 \cdots X_\alpha P_1 \cdots P_\beta$ aus, so erhält die vorgelegte Bedingungsgleichung die Form:

$$\sum_k p_k dx_k = \sum_{i=1}^{i=\alpha} A_i dX_i + \sum_{i=1}^{i=\beta} B_i dP_i + dV.$$

Bilden andererseits $X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n$ ein System kanonischer Variabeln, so ist

$$\sum_k p_k dx_k = P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n + dW,$$

und also kommt:

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i dX_i = \sum_{i=1}^{i=\alpha} A_i dX_i + \sum_{i=1}^{i=\beta} B_i dP_i + d(V - W).$$

Wären nun $\alpha$ und $\beta$ beide kleiner als $n$, und dabei etwa $\beta \leqq \alpha$, so würde man durch die Substitutionen:

$$X_1 = \text{Const.} \cdots X_\alpha = \text{Const.}, \quad P_1 = \text{Const.} \cdots P_\beta = \text{Const.}$$

hieraus die Gleichung erhalten:

$$P_{\alpha+1} dX_{\alpha+1} + \cdots + P_n dX_n = d(V - W).$$

Diese ist aber wegen der Unabhängigkeit der Grössen $P_{\alpha+1} \cdots P_n$ $X_{\alpha+1} \cdots X_n$ unmöglich. Also muss die grösste der beiden Zahlen $\alpha$ und $\beta$ gleich $n$ sein, was eben zu beweisen war.

## § 2.

## Bekannte Specialfälle des aufgestellten Theorems.

3. Jacobi's Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O. liegt u. A. der folgende Satz zu Grunde:

Bestimmen die Gleichungen $f_1 = \alpha_1, \cdots f_n = \alpha_n$, in denen die $f$ Functionen von $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$, die $\alpha$ constante Parameter bezeichnen, die Grössen $p_1 \cdots p_n$ derart als Functionen von $x_1 \cdots x_n$, dass $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ ein vollständiges Differential $dU$ wird, so ist $z - U = a$ eine vollständige Lösung einer jeden Gleichung $f_k = \alpha_k$,

und die Differentialquotienten von $U$ hinsichtlich $\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}\, \alpha_{k+1} \cdots \alpha_n$ bilden zusammen mit den Grössen $f$ die Lösungen der Gleichung $(f_k f) = 0$.

Diesen Satz verallgemeinerte ich schon längst folgendermassen:

Sind $f_1 \cdots f_n$ bekannte Functionen von $x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n$, die in solcher gegenseitigen Beziehung stehen, dass die Gleichungen $f_1 =$ Const., $\cdots f_n =$ Const. den Ausdruck $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ in ein vollständiges Differential umwandeln, so dass also eine Relation von der Form

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n + dV$$

besteht, so findet man eine vollständige Lösung einer jeden Gleichung $f_k = \alpha_k$ und zugleich alle Lösungen der Gleichung $(f_k f) = 0$ durch eine Quadratur und gewisse Differentiations- und Eliminationsoperationen.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass sowohl die besprochene Jacobi'sche Theorie wie meine Verallgemeinerung derselben Specialfälle meines Theorems I. sind.

4. Mehr überraschend ist es, dass die Bestimmung der letzten Lösung der Gleichung $(f\varphi) = 0$, die Jacobi vermöge seiner Theorie des letzten Multiplicators ausführt, in allen Fällen, die nicht schon durch das Poisson-Jacobi'sche Theorem erledigt werden, auch durch mein Theorem I. geleistet wird.

Kennt man nämlich von den Lösungen der Gleichung $(f_1 f) = 0$ alle, ausgenommen die letzte, und ist es dabei unmöglich, die fehlende Lösung ohne Quadratur durch das Poisson-Jacobi'sche Theorem zu erhalten, so bilden die bekannten Lösungen eine Gruppe, welche $n$-gliedrige Involutionssysteme enthält*). Folglich wird die Bestimmung der letzten Lösung durch Satz 4., oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch Theorem I. geleistet.

Doch ist es keineswegs so, dass die betreffende Specialisation meines Theorems sich mit der entsprechenden Jacobi'schen Theorie deckt. Die Jacobi'sche Theorie leistet insofern mehr, als sie die letzte Lösung auch dann durch eine Quadratur liefert, wenn dieselbe sich einfacher durch das Poisson-Jacobi'sche Theorem finden lässt. Auf

---

*) Setzt man in der That $f_1 = X_1$ und nimmt an, dass $X_1 \cdots X_\alpha\, P_2 P_3 \cdots P_\beta$ die kanonische Form der von den bekannten Lösungen gebildeten Gruppe sei, so ist bei unserer Voraussetzung

$$\alpha + \beta - 1 = 2n - 2, \text{ also } \alpha + \beta = 2n - 1.$$

Weiter ist

$$\alpha \leqq n \text{ und } \beta \leqq n.$$

Also muss entweder $\alpha$ oder $\beta$ gleich $n$ sein, sodass unsere Gruppe entweder die Form $X_1 \cdots X_n\, P_2 \cdots P_{n-1}$ oder die Form $X_1 \cdots X_{n-1}\, P_2 \cdots P_n$ besitzt. Diese beiden, übrigens äquivalenten Formen zeigen, dass unsere Gruppe $n$-gliedrige Involutionssysteme enthält.

der anderen Seite ist *meine Behandlungsweise insofern vollkommner, als sie vermöge einer Quadratur nicht allein die fehlende Lösung von* $(f_1 f) = 0$, *sondern auch eine Lösung von* $[f_1, z - U] = 0$ *giebt, so dass eine vollständige Lösung von* $f_1 = \alpha_1$ *sich ohne weitere Quadratur aufstellen lässt.* Die Jacobi'sche Theorie braucht dagegen eine zweite Quadratur zur Aufstellung einer vollständigen Lösung der letzten Gleichung.

Soll also die Gleichung $f_1 \; \alpha_1$ integrirt werden, so bringt, wenn nur noch eine Lösung von $(f_1 f) = 0$ fehlt, im Allgemeinen die Anwendung von Theorem I. mehr Vortheil als die Jacobi'sche Methode. Nur wenn die fehlende Lösung von $(f_1 f) = 0$ sich schon durch das Poisson-Jacobi'sche Theorem bestimmen lässt, ist die Jacobi'sche Theorie ebenso vortheilhaft wie die meinige.

**5.** Es giebt Fälle, in denen mein Theorem solche Lösungen giebt, die sich auch durch das Poisson-Jacobi'sche Theorem bestimmen lassen. Kennt man nämlich von den Lösungen des vollständigen Systems

$$(f_1 f) = 0, \; \cdots \; (f_q f) = 0, \; \text{wo} \; (f_i f_k) = 0,$$

eine so grosse Anzahl $f_1 \cdots f_q \cdots f_r$, dass eine Bedingungsgleichung der Form

$$\sum_k p_k dx_k = F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + dU$$

stattfindet, so giebt mein Theorem unter allen Umständen die fehlenden Lösungen. Bilden nun $f_1 \cdots f_q \cdots f_r$ keine Gruppe — es ist leicht, Beispiele zu construiren, in denen dies nicht der Fall ist —, so giebt das Poisson-Jacobi'sche Theorem jedenfalls einige, und unter Umständen sogar alle fehlenden Lösungen durch Differentiation. Wenn aber auch alle Lösungen ohne Quadratur gefunden werden, so verlangt doch die Aufstellung einer vollständigen Lösung des Involutionssystems $f_1 = \alpha_1, \; \cdots \; f_q = \alpha_q$, gerade so wie nach meiner Methode, immer noch eine Quadratur.

## § 3.

## Allgemeine Verwerthung mehrerer bekannter Lösungen.

In diesem Paragraphen entwickele ich ein zweites *Fundamentaltheorem.* Zuerst ein Hülfssatz.

**6.** Satz 6. *Enthält eine gegebene Gruppe* $f_1 \cdots f_r$ *m ausgezeichnete Functionen* $\Omega_1 \cdots \Omega_m$, *so ist es, auch wenn die* $\Omega$ *unbekannt sind, möglich, ein vollständiges System aufzustellen, das dem System* $(\Omega_1 f) = 0, \; \cdots \; (\Omega_m f) = 0$ *äquivalent ist.*

Beweis. Unter den gemachten Voraussetzungen verschwindet (Math. Annalen Bd. VIII, p. 255) sowohl die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} (f_1 f_1) & (f_1 f_2) & \cdots & (f_1 f_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (f_r f_1) & (f_r f_2) & \cdots & (f_r f_r) \end{vmatrix}$$

als auch ihre sämmtlichen Unterdeterminanten $1^{ter}$, $2^{ter}$ $\cdots$ $(m-1)^{ter}$ Ordnung, während es jedenfalls eine nicht verschwindende Unterdeterminante $m^{ter}$ Ordnung giebt.

Führen wir nun statt $x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n$ neue unabhängige Variable ein, nämlich $f_1 \cdots f_r$ zusammen mit $2n-r$ weiteren Grössen $u_1 \cdots u_{2n-r}$, so wird

$$(f_k f) = \sum_i (f_k f_i) \frac{\partial f}{\partial f_i} + \sum_i (f_k u_i) \frac{\partial f}{\partial u_i};$$

und da die Determinante $D$ verschwindet, so ist es möglich, aus den Gleichungen

$$(f_1 f) = 0, \cdots (f_r f) = 0$$

die Differentialquotienten von $f$ hinsichtlich $f_1 \cdots f_r$ zu eliminiren. Hierdurch erhält man $m$ Gleichungen der Form:

$$B_k(f) = \sum_i \varphi_{ki} (f_1 \cdots f_r\, u_1 \cdots u_{2n-r}) \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0,$$

die von einander unabhängig sind. Bedenkt man nun, dass die Gleichungen $(\Omega_k f) = 0$ sowohl die Form

$$\sum_i \frac{\partial \Omega_k}{\partial f_i} (f_i f) = 0,$$

als auch die Form

$$\sum_i (\Omega_k u_i) \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$$

erhalten können, und dabei unabhängig von einander sind, so sieht man, dass die beiden Gleichungssysteme

$$(\Omega_1 f) = 0, \cdots (\Omega_m f) = 0$$

und

$$B_1(f) = 0, \cdots B_m(f) = 0$$

einander äquivalent sind.

7. Sei nun $f_1 = \alpha_1, \cdots f_q = \alpha_q$ ein vorgelegtes Involutionssystem, und seien $f_{q+1} \cdots f_r$ bekannte Lösungen des Systems:

$$(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0,$$

die eine Gruppe bilden, welche ausser $f_1 \cdots f_q$ noch $m$ ausgezeichnete Functionen $\Omega_1 \cdots \Omega_m$ enthält. Indem wir den Regeln der vorangehenden Nummer folgen, erhalten wir ein vollständiges System

$$B_1(f) = 0, \cdots B_{q+m}(f) = 0,$$

das dem Systeme

(12) $(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0, \quad (\Omega_1 f) = 0, \cdots (\Omega_m f) = 0$

äquivalent ist. Und da $f_1 \cdots f_r$ bekannte Lösungen dieses $(q+m)$-gliedrigen Systems sind, so giebt das Mayer'sche Theorem eine weitere Lösung $\psi_1$ desselben durch eine Operation $2n-r-q-m$.

Es können nun verschiedene Fälle eintreten, die wir successiv betrachten wollen.

Es ist zunächst möglich, dass die Grössen $f_1 \cdots f_r \psi_1$ eine Gruppe bilden, in der selbstverständlicherweise $f_1 \cdots f_q\ \Omega_1 \cdots \Omega_m$ ausgezeichnete Functionen sind. Hätte diese Gruppe keine weitere ausgezeichnete Functionen, so müsste die Zahl

$$(r+1)-(q+m)$$

als Differenz zwischen der Zahl der Glieder und der Zahl der ausgezeichneten Functionen eine gerade Zahl sein (Math. Ann. Bd. VIII, p. 259). Dies ist jedoch unmöglich, da die $r$-gliedrige Gruppe $f_1 \cdots f_r$ $q+m$ ausgezeichnete Functionen enthält, und also die Zahl $r-(q+m)$ gerade ist. Folglich enthält die Gruppe $f_1 \cdots f_r \psi_1$ $q+m+1$ ausgezeichnete Functionen*). Hiermit hat unser Problem die folgende Gestalt gewonnen: Vorgelegt zur Integration ist ein $q$-gliedriges Involutionssystem $f_1 = \alpha_1, \cdots f_q = \alpha_q$, und man kennt $r+1$ Lösungen des Systems $(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0$, die eine Gruppe mit $q+m+1$ ausgezeichneten Functionen $f_1 \cdots f_q\ \Omega_1 \cdots \Omega_{m+1}$ bilden. Dieses neue Problem hat ganz dieselbe Gestalt wie das ursprüngliche, nur sind die Zahlen $r$ und $m$ bezüglich in $r+1$ und $m+1$ übergegangen. Wir können daher ganz so wie vorhin weitergehen; wir stellen also dasjenige vollständige System auf, welches dem Systeme

$$(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0, \quad (\Omega_1 f) = 0, \cdots (\Omega_{m+1} f) = 0$$

äquivalent ist, und bestimmen, da wir schon $r+1$ Lösungen desselben kennen, eine weitere Lösung vermöge einer Operation $2n-(r+1)-(q+m+1)$. Die Ordnung dieser Operation ist, wie man sieht, um *zwei* Einheiten geringer als diejenige der ersten Integrationsoperation.

Es ist aber auch denkbar, dass die bekannten Lösungen $f_1 \cdots f_r \psi_1$ des Systems (12) keine Gruppe bilden. Alsdann giebt das Poisson-Jacobi'sche Theorem noch weitere Lösungen, etwa $\psi_2 \cdots \psi_s$. In der hierdurch hervorgehenden Gruppe $f_1 \cdots f_r\ \psi_1 \cdots \psi_s$ sind jedenfalls $f_1 \cdots f_q\ \Omega_1 \cdots \Omega_m$ und unter Umständen noch einige weitere Grössen $\Omega_{m+1} \cdots \Omega_{m+m'}$ ausgezeichnete Functionen. Und unser Problem hat wiederum seine ursprüngliche Gestalt angenommen, nur dass die Zahlen

---

*) Es gilt überhaupt der Satz: „Enthält eine $r$-gliedrige Gruppe $u_1 \cdots u_r$ $m$ ausgezeichnete Functionen, so enthält jede $(r-q)$-gliedrige Untergruppe $u_1 \cdots u_{r-q}$ $(q<m)$ jedenfalls $m-q$ ausgezeichnete Functionen." Dieser Satz ergiebt sich als directes Corollar aus dem Theorem VIII., Math. Annalen Bd. VIII, p. 256.

$r$ und $m$ sich respective in $r+s$ und $m+m'$ verwandelt haben. Daher hat die nächste Integrationsoperation die Ordnung

$$2n-(r+s)-(q+m+m'),$$

welche Zahl, da $s>2$ ist, mindestens um zwei Einheiten niedriger ist als die Ordnung der ersten Integrationsoperation.

In beiden Fällen ist also die Ordnung der zweiten Integrationsoperation jedenfalls um zwei Einheiten niedriger als diejenige der ersten. Dem entsprechend ist die Ordnung der dritten Integrationsoperation jedenfalls um zwei Einheiten niedriger als diejenige der zweiten u. s. w.

In dieser Weise fährt man nun fort bis man so viele Lösungen $f_1 \cdots f_\varrho$ des Systems

$$(f_1 f)=0, \cdots (f_q f)=0$$

gefunden hat, dass die Gruppe $f_1 \cdots f_\varrho$ so viel ausgezeichnete Functionen $f_1 \cdots f_q \Omega_1 \cdots \Omega_\mu$ besitzt, dass das vollständige System

$$(f_1 f)=0, \cdots (f_q f)=0, \quad (\Omega_1 f)=0, \cdots (\Omega_\mu f)=0$$

keine weiteren Lösungen als $f_1 \cdots f_\varrho$ zulässt. Alsdann enthält unsere Gruppe $n$-gliedrige Involutionssysteme*), und folglich (Satz 4.) verlangt die Integration unseres Involutionssystems nur noch eine Quadratur.

Da die Differenz zwischen der Zahl der Glieder und der Zahl der ausgezeichneten Functionen einer Gruppe eine gerade Zahl sein muss, so ist

$$r-(q+m)=2t,$$

wo $t$ eine ganze Zahl bezeichnet. Folglich ist

$$r+(q+m)=2(t+q+m)$$

und

$$2n-r-q-m=2(n-t-q-m),$$

das heisst die Ordnung der ersten Integrationsoperation ist immer eine gerade Zahl. Und da die folgenden Integrationsoperationen ganz von derselben Art wie die erste sind, so folgt, dass sie sämmtlich von gerader Ordnung sind.

---

*) In der That, setzt man:

$$f_1=X_1, \cdots f_q=X_q, \quad \Omega_1=X_{q+1}, \cdots \Omega_\mu=X_{q+\mu},$$

so besitzt die Gruppe $f_1 \cdots f_\varrho$ die kanonische Form

$$X_1 \cdots X_{q+\mu} \cdots X_\omega \; P_{q+\mu+1} \cdots P_\omega.$$

Wäre nun $\omega<n$, so gäbe es ausser $f_1 \cdots f_\varrho$ gegen die Voraussetzung noch weitere Functionen, die mit $X_1 \cdots X_{q+\mu}$ in Involution liegen.

Hiermit ist das folgende fundamentale Theorem bewiesen.

Theorem II. *Soll das Involutionssystem*

$$f_1 = a_1, \cdots f_q = a_q$$

*integrirt werden, und kennt man bereits eine Anzahl Lösungen des vollständigen Systems*

$$(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0,$$

*etwa $f_{q+1} \cdots f_r$, so sucht man zunächst weitere Lösungen vermöge des Poisson-Jacobi'schen Theorems zu bestimmen. Sei $f_1 \cdots f_q \cdots f_r \cdots f_s$ die hierdurch bestimmte Gruppe, die ausser $f_1 \cdots f_q$ noch $m$ unbekannte ausgezeichnete Functionen enthalten mag. Alsdann verlangt die Integration des vorgelegten Involutionssystems im ungünstigsten Falle nur noch die Operationen*

$$2n-q-s-m, \quad 2n-q-s-m-2, \cdots 6, 4, 2.$$

*Unter Umständen können einige dieser Integrationsoperationen wegfallen.*

## § 4.

## Schematische Beispiele.

8. Um die grosse Wichtigkeit des Theorems II. hervortreten zu lassen, behandle ich einige Beispiele schematisch.

Sei $f_1 = a_1, \cdots f_q = a_q$ das vorgelegte Involutionssystem, und seien $f_{q+1} \cdots f_s$ bekannte Lösungen des Systems

$$(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0.$$

Ich setze successiv voraus, dass 2, 3, 4, 5 Lösungen fehlen, und zähle die verschiedenen Fälle auf, die bei ihrer Bestimmung eintreten können. Hierbei hat man sich daran zu erinnern, dass, wenn die Gruppe $f_1 \cdots f_q \cdots f_s$ ausser $f_1 \cdots f_q$ noch $m$ ausgezeichnete Functionen enthält, stets (Math. Annalen Bd. VIII, p. 259 u. p. 269)

$$s-(q+m) = \text{gerade}$$

und

$$s+(q+m) \leq 2n$$

ist, sodass man, wenn die Anzahl $2n-q-s$ der fehlenden Lösungen des vorgelegten Systems durch $\mu$ bezeichnet wird,

$$\mu - m = \text{gerade und} \geq 0$$

hat. Fehlen insbesondere eine ungerade Anzahl Lösungen, so erlauben meine neuen Theorien *immer* die zurückstehenden Integrationsoperationen wesentlich zu vereinfachen.

1) Fehlen zwei Lösungen, so sind zwei Fälle möglich. Entweder enthält die Gruppe der $f$ ausser $f_1 \cdots f_q$ keine weiteren ausgezeichneten Functionen, alsdann brauche ich eine Operation 2 und eine Quadratur, welche letzte Operation ich der Kürze wegen als eine Operation 0 bezeichnen werde. Oder aber diese Gruppe enthält noch zwei ausgezeichnete Functionen; alsdann genügt eine Quadratur zur Aufstellung einer vollständigen Lösung. Früher (das heisst, indem man die Cauchy'sche, oder die erweiterte Cauchy'sche Methode benutzte) brauchte man in beiden Fällen die Operationen 2, 1, 0. War insbesondere $q = 1$, so konnte man die Jacobi'sche Theorie des letzten Multiplicators anwenden, und brauchte dann nur die Operationen 2, 0, 0.

Ich resumire dieses Beispiel durch das folgende Schema:

| | |
|---|---|
| keine ausgezeichnete Functionen | 2, 0 |
| 2 " " | 0 |
| früher, wenn $q > 1$ | 2, 1, 0 |
| früher, wenn $q = 1$ | 2, 0, 0. |

2) Fehlen 3 Lösungen, so sind zwei Fälle möglich. Entweder enthält die Gruppe der $f$ ausser $f_1 \cdots f_q$ noch eine ausgezeichnete Function; alsdann brauche ich die Operationen 2, 0. Oder aber es giebt noch 3 ausgezeichnete Functionen; alsdann genügt eine Quadratur zur Aufstellung einer vollständigen Lösung. Früher brauchte man die Operationen 3, 2, 1, 0; nur in dem Falle $q = 1$ genügten die Operationen 3, 2, 0, 0. Wir haben hier also folgendes Schema:

| | |
|---|---|
| 1 ausgezeichnete Function | 2, 0 |
| 3 " Functionen | 0 |
| früher, wenn $q > 1$ | 3, 2, 1, 0 |
| früher, wenn $q = 1$ | 3, 2, 0, 0. |

Man sieht, dass es nach meiner neuen Theorie nicht schwieriger ist, 3 fehlende als 2 fehlende Lösungen zu bestimmen.

3) Fehlen 4 Lösungen, so enthält die Gruppe der $f$ entweder 4 oder 2 oder keine ausgezeichneten Functionen ausser $f_1 \cdots f_q$. Die entsprechenden Integrationsoperationen sind:

| | |
|---|---|
| keine ausgezeichnete Function | 4, 2, 0 |
| 2 " Functionen | 2, 0 |
| 4 " " | 0 |
| früher, wenn $q > 1$ | 4, 3, 2, 1, 0 |
| früher, wenn $q = 1$ | 4, 3, 2, 0, 0. |

4) Fehlen 5 Lösungen, so sind die folgenden Fälle möglich:

| | |
|---|---|
| 1 ausgezeichnete Function | 4, 2, 0 |
| 3 " Functionen | 2, 0 |
| 5 " " | 0 |
| früher, wenn $q > 1$ | 5, 4, 3, 2, 1, 0 |
| früher, wenn $q = 1$ | 5, 4, 3, 2, 0, 0. |

Man sieht also, dass die Integration des gegebenen Involutionssystems gleich-viele und gleich-schwierige Integrationen verlangt, wenn 4 und wenn 5 Lösungen fehlen.

Und ebenso ergiebt sich aus Theorem II. allgemein:

Satz 7. *Die Bestimmung von* $2m+1$ *fehlenden Lösungen des Systems*

$$(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0, \text{ wo } (f_i f_k) = 0,$$

*verlangt nicht schwierigere Integrationsoperationen als diejenige von* $2m$ *fehlenden Lösungen.*

**9.** Ich werde eine Anwendung des Theorems II. auf die Mechanik machen. Hierdurch erreiche ich in der einfachst möglichen Weise diejenigen Resultate, die sich aus Mayer's und meinen Arbeiten aus dem Jahre 1872, verbunden mit den früheren Untersuchungen über diesen Gegenstand ergaben.

Sei

$$f_1 (x_1 \cdots x_9 p_1 \cdots p_9) = a$$

diejenige partielle Differentialgleichung, auf die sich das allgemeine Problem dreier Körper nach Hamilton und Jacobi zurückführen lässt. Seien ferner $f_2 f_3 \cdots f_q$ diejenigen Lösungen von $(f_1 f) = 0$, die den Schwerpunktsintegralen und den Flächensätzen entsprechen. Bildet man nun (Math. Annalen Bd. VIII, p. 284) die Determinante, deren Elemente die $(f_i f_k)$ sind, so erkennt man, dass die Gruppe der $f_k$ ausser $f_1$ noch 2 ausgezeichnete Functionen enthält. Folglich schliessen wir unmittelbar aus Theorem II., dass die Integration der vorgelegten Gleichung im ungünstigsten Falle nur noch die Operationen 6, 4, 2 verlangt.

In ganz entsprechender Weise behandelt man ein jedes mechanische Problem, das sich auf eine partielle Differentialgleichung 1. O. mit gewissen bekannten Lösungen reduciren lässt. Das betreffende mechanische Problem braucht sich nicht auf den Euclidischen Raum, sondern kann sich auf einen jeden Raum von $n$ Dimensionen mit constantem Krümmungsmaasse beziehen.

## § 5.

## Partielle Differentialgleichungen 1. O., welche die unbekannte Function enthalten.

Um die vorangehenden Theorien auf Gleichungen, welche die unbekannte Function explicite enthalten, auszudehnen, brauchen wir nur wie gewöhnlich die betreffenden Gleichungen auf die Form

$$f\left(x_1 \cdots x_n \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = a$$

zu bringen. Hierbei treten unter Umständen gewisse Vereinfachungen ein.

**10.** Zunächst ist zu bemerken, dass die in Theorem I. besprochene Quadratur zuweilen wegfällt, indem das betreffende Integral gleich Null gesetzt werden kann. Dies soll jetzt gezeigt werden.

Satz 8. *Sind $N_1 \cdots N_r H$ homogene Functionen bez. nullter und erster Ordnung, die eine Gruppe von der kanonischen Form $X_1 \cdots X_n$ $P_1 \cdots P_m$ bilden, so besteht eine Relation von der Form:*

$$\sum_k p_k dx_k = K_1 dN_1 + \cdots + K_r dN_r + dU,$$

*in der $U$ eine arbiträre Function der $N$ ist, und daher im Besondern gleich Null gesetzt werden kann.*

Beweis. Es sei $X_1 \cdots X_n$ $P_1 \cdots P_m$ die kanonische Form unserer Gruppe, und $X_1 \cdots X_n$ $P_1 \cdots P_n$ ein System kanonischer Variabeln. Alsdann ist bekanntlich

$$\sum p\, dx = \sum P\, dX,$$

und wenn man hier die $X_k$, die von nullter Ordnung sind, als Functionen von $N_1 \cdots N_r$ ausdrückt, so erhält man eine Relation der Form:

$$\sum p\, dx = \sum K\, dN,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Satz 9. *Sind $N_1 \cdots N_r H$ homogene Functionen bez. nullter und erster Ordnung, die eine Gruppe von der kanonischen Form $X_1 \cdots X_m$ $P_1 \cdots P_n$ bilden, so besteht, wenn $m < n$ ist, niemals eine Relation von der Form:*

$$\sum p\, dx = \sum K dN + dU.$$

Beweis. Bestände in der That eine solche Relation, so würde man, wenn man die $N$ als Functionen von $X_1 \cdots X_m \frac{P_2}{P_1} \cdots \frac{P_n}{P_1}$ ausdrückte, eine Gleichung von der Form:

$$\sum p\,dx = Q_1\,dX_1 + \cdots + Q_m\,dX_m + R_2\,d\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + \cdots + R_n\,d\left(\frac{P_n}{P_1}\right) + dU,$$

oder wenn $X_1 \cdots X_n\ P_1 \cdots P_n$ ein System kanonischer Variabeln bezeichnen, von der Form:

$$P_1\,dX_1 + \cdots + P_n\,dX_n = Q_1\,dX_1 + \cdots + Q_m\,dX_m + R_2\,d\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + \cdots + R_n\,d\left(\frac{P_n}{P_1}\right) + dU$$

erhalten, woraus:

$$P_k = Q_k + \frac{\partial U}{\partial X_k} \quad (k = 1 \cdots m),$$

$$P_k = \frac{\partial U}{\partial X_k} \quad (k = m+1 \cdots n),$$

$$0 = -\frac{R_2 P_2 + \cdots + R_n P_n}{P_1^2} + \frac{\partial U}{\partial P_1},$$

$$0 = \frac{R_k}{P_1} + \frac{\partial U}{\partial P_k} \quad (k = 2 \cdots n).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt durch Elimination der $R_k$:

$$P_1 \frac{\partial U}{\partial P_1} + \cdots + P_n \frac{\partial U}{\partial P_n} = 0$$

und die zweite Gleichung giebt:

$$U = P_{m+1} X_{m+1} + \cdots + P_n X_n + V(X_1 \cdots X_m\ P_1 \cdots P_n).$$

Also folgt

$$P_{m+1} X_{m+1} + \cdots + P_n X_n + P_1 \frac{\partial V}{\partial P_1} + \cdots + P_n \frac{\partial V}{\partial P_n} = 0,$$

welche Gleichung indess unmöglich ist, da die Grössen $X_{m+1} \cdots X_n$ nicht in $V$ vorkommen.

Also ist unsere Annahme, dass eine Relation von der Form

$$\sum p\,dx = \sum K\,dN + dU$$

bestände, unrichtig.

**11.** Die beiden aufgestellten Sätze erlauben das angekündigte Resultat zu erreichen. Um aber diese Theorie möglichst eingehend zu behandeln, werden wir einige weitere Sätze entwickeln.

Hülfsatz. *Ist der Ausdruck*

$$\Phi_1\,du_1 + \cdots + \Phi_r\,du_r$$

*ein vollständiges Differential und sind die $\Phi$ homogen von nullter Ordnung hinsichtlich der $u$, so ist $\Phi_1 u_1 + \cdots + \Phi_r u_r$ das Integral des vorgelegten Differentials.*

Beweis. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_k \Phi_k u_k = \Phi_i + \sum_k u_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_i}$$

und, da

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial u_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k}$$

ist, folgt:

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_k \Phi_k u_k = \Phi_i + \sum_k u_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k},$$

oder, da $\Phi_i$ von nullter Ordnung ist:

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_k \Phi_k u_k = \Phi_i,$$

woraus durch Integration:

$$\sum_k \Phi_k u_k = \int (\Phi_1 du_1 + \cdots + \Phi_r du_r),$$

wie behauptet wurde.

Satz 10. *Sind $N_1 \cdots N_r$ Functionen nullter Ordnung, die eine Relation von der Form:*

$$\sum p dx = K_1 dN_1 + \cdots + K_r dN_r + dU$$

*erfüllen, so ist $U$ eine arbiträre Function der $N$, und kann also gleich Null gesetzt werden.*

Beweis. Früher (Satz 1.) fanden wir die Formel:

$$U = \int \sum_i \sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} du_i + \Omega(N_1 \cdots N_r),$$

in welcher die unabhängigen Variabeln $u_1 \cdots u_{2n-r}$ nur der Beschränkung unterworfen sind, von einander und von den $N$ unabhängig zu sein. Wählen wir nun, wie es erlaubt ist, die $u$ homogen von erster Ordnung hinsichtlich der $p$, so werden umgekehrt die $x_k$ und $p_k$, aufgefasst als Functionen von den $N$ und $u$, homogen hinsichtlich der $u$, und zwar werden die $x_k$ homogen von nullter, die $p_k$ homogen von erster Ordnung. Folglich sind die Ausdrücke

$$\sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i}$$

homogen von nullter Ordnung, und nach dem vorangehenden Satze wird daher:

$$U = \sum_i u_i \sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} + \Omega(N_1 \cdots N_r),$$

oder:

$$U = \sum_k p_k \sum_i u_i \frac{\partial x_k}{\partial u_i} + \Omega(N_1 \cdots N_r);$$

und, da

$$\sum_i u_i \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = 0$$

ist, so folgt:

$$U = \Omega(N_1 \cdots N_r),$$

wie behauptet wurde.

Theorem III. *Ist ein Involutionssystem nullter Ordnung*

$$N_1 = a_1, \cdots N_q = a_q$$

*zur Integration vorgelegt, und kennt man von den Lösungen nullter Ordnung des Systems*

(13) $$(N_1 N) = 0, \cdots (N_q N) = 0$$

*eine so grosse Anzahl* $N_{q+1} \cdots N_r$, *dass eine Bedingungsgleichung der Form:*

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = K_1 dN_1 + \cdots + K_r dN_r + dU$$

*und also auch eine Relation der einfacheren Form:*

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = K_1 dN_1 + \cdots + K_r dN_r$$

*stattfindet, so verlangt die Integration des vorgelegten Involutionssystems nur gewisse Eliminationen und Differentiationen, dagegen keine Quadratur.*

Beweis. Die $K$ sind bestimmt durch die Formel

$$K_i = \sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial N_i};$$

wählt man daher die unabhängigen Variabeln $u$ wie bei dem Beweise des vorangehenden Satzes, so werden die $K$ homogen von erster Ordnung hinsichtlich der $u$. Also sind sie, aufgefasst als Functionen von $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$, auch homogen von erster Ordnung hinsichtlich der $p$. Auf der anderen Seite wissen wir (Satz 3.), dass $K_{q+1} \cdots K_r$ die fehlenden Lösungen des Systems (13) sind. Also sind die Verhältnisse dieser $K$ die fehlenden Lösungen nullter Ordnung dieses Systems. Und da diese Lösungen ohne Quadratur gefunden werden, so verlangt die Integration unseres Involutionssystems wirklich nur gewisse Differentiationen und Eliminationen.

Aus den vorangehenden Sätzen ergiebt sich das folgende Corollar.

Corollar. *Soll das Involutionssystem nullter Ordnung* $N_1 = a_1, \cdots N_q = a_q$ *integrirt werden, so giebt es, wenn eine Anzahl Lösungen des Systems:*

$$(N_1 N) = 0, \cdots (N_q N) = 0, \quad \sum p \frac{\partial N}{\partial p} = 0,$$

*etwa* $N_{q+1} \cdots N_r$, *gefunden sind, zwei distincte Fälle, in denen die Integration geleistet werden kann. Besitzt die von* $N_1 \cdots N_q \cdots N_r$ *erzeugte homogene Gruppe die kanonische Form* $X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_m$,

*so verlangt die Integration nicht einmal eine Quadratur, sondern nur Differentiationen und Eliminationen. Hat sie dagegen die Form* $X_1 \cdots X_m P_1 \cdots P_n$, *so ist noch eine Quadratur erforderlich.*

**12.** Auch bei der Anwendung der in § 2. entwickelten Theorie auf Involutionssysteme nullter Ordnung giebt es ausgezeichnete Fälle, die eine weitere Integrationserniedrigung gestatten.

Satz 11. *Sind* $N_1 \cdots N_r H$ *homogene Functionen bez. nullter und erster Ordnung, die eine homogene Gruppe mit* $q'$ *ausgezeichneten Functionen, sämmtlich von nullter Ordnung, bilden, so verschwindet eine jede Determinante mit* $r - q' + 2$ *Reihen und Colonnen, die der Matrix*

$$M = \begin{vmatrix} (N_1 N_1) & \cdots & (N_1 N_r) & (N_1 H) \\ (N_2 N_1) & \cdots & (N_2 N_r) & (N_2 H) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ (N_r N_1) & \cdots & (N_r N_r) & (N_r H) \\ (H N_1) & \cdots & (H N_r) & (H H) \\ 0 & \cdots & 0 & H \end{vmatrix}$$

*entnommen ist. Dagegen giebt es jedenfalls eine nicht-verschwindende Determinante desselben Ursprungs mit* $r - q' + 1$ *Reihen und Colonnen.*

Beweis. Fasst man $U$ als Function von $N_1 \cdots N_r$ auf, so haben die $(r+1)$ Gleichungen

$$(N_1 U) = 0, \cdots (N_r U) = 0, \quad (H U) = 0$$

nach Voraussetzung $q'$ gemeinsame Lösungen. Daher verschwindet eine jede Determinante mit $(r - q' + 1)$ Reihen und Colonnen, die der Matrix

$$V = \begin{vmatrix} (N_1 N_1) & \cdots & (N_1 N_r) \\ (N_2 N_1) & \cdots & (N_2 N_r) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (N_r N_1) & \cdots & (N_r N_r) \\ (H N_1) & \cdots & (H N_r) \end{vmatrix}$$

entnommen ist. Dagegen giebt es jedenfalls eine nicht-verschwindende Determinante desselben Ursprungs, die $r - q'$ Reihen und Colonnen besitzt. Vergleicht man nun die Ausdrücke $V$ und $M$, so erkennt man sogleich die Richtigkeit unseres Satzes. —

Ich setze nun voraus, dass ein Involutionssystem nullter Ordnung $N_1 = \alpha_1, \cdots N_q = \alpha_q$ integrirt werden soll, und dass man gewisse Lösungen des Systems

$$(N_1 N) = 0, \cdots (N_q N) = 0, \quad \sum p \frac{\partial N}{\partial p} = 0,$$

etwa $N_{q+1} \cdots N_r$, kennt, die eine homogene Gruppe $N_1 \cdots N_q \cdots N_r H$ bestimmen. Ausser $N_1 \cdots N_q$ möge unsere Gruppe noch $m$ ausge-

zeichnete Functionen $\Omega_1 \cdots \Omega_{m1}$, die sämmtlich von nullter Ordnung sind, enthalten.

Ich kann voraussetzen, dass die Polargruppe von $N_1 \cdots N_r H$ nicht aus lauter Functionen nullter Ordnung besteht. Sonst nämlich würden (Math. Annalen Bd. VIII, p. 287) ihre $2n-(r+1)$ Glieder ein Involutionssystem bilden und daher sämmtlich ausgezeichnete Functionen auch der gegebenen Gruppe $N_1 \cdots N_r H$ sein. Es müsste dann also

$$2n-(r+1) = q+m, \text{ oder } 2n-(q+m) = r+1$$

sein. Die kanonische Form einer $(r+1)$-gliedrigen homogenen Gruppe, deren sämmtliche $q+m$ ausgezeichnete Functionen von nullter Ordnung sind, ist aber (ib. p. 294, Cor. 1) $X_1 \cdots X_\alpha X_{\alpha+1} \cdots X_{\alpha+m+q}$ $P_1 \cdots P_\alpha$, wo $2\alpha+q+m = r+1$ ist. Also würde $\alpha+q+m = n$ und $X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_{n-q-m}$ die kanonische Form der Gruppe $N_1 \cdots N_r H$ sein, sodass die Integration des vorgelegten Involutionssystems bereits durch das Corollar von Nr. 11. absolvirt würde.

Bei diesen Voraussetzungen ist

$$(14)\quad (N_1\Phi) = 0, \cdots (N_r\Phi) = 0; \quad (H\Phi) = 0, \quad \sum_k p_k \frac{\partial\Phi}{\partial p_k} = 0$$

ein vollständiges System. Führt man nun an Stelle von $x_1 \cdots x_n$ $p_1 \cdots p_n$ neue unabhängige Variable ein, nämlich $N_1 \cdots N_r H$ zusammen mit $2n-r-1$ anderen Grössen $u_1 u_2 \cdots$, so nimmt dieses System die Gestalt an:

$$(N_1 N_1)\frac{\partial\Phi}{\partial N_1} + \cdots + (N_1 N_r)\frac{\partial\Phi}{\partial N_r} + (N_1 H)\frac{\partial\Phi}{\partial H} + \sum_i (N_1 u_i)\frac{\partial\Phi}{\partial u_i} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(N_r N_1)\frac{\partial\Phi}{\partial N_1} + \cdots + (N_r N_r)\frac{\partial\Phi}{\partial N_r} + (N_r H)\frac{\partial\Phi}{\partial H} + \sum_i (N_r u_i)\frac{\partial\Phi}{\partial u_i} = 0,$$

$$(H N_1)\frac{\partial\Phi}{\partial N_1} + \cdots + (H N_r)\frac{\partial\Phi}{\partial N_r} + (H H)\frac{\partial\Phi}{\partial H} + \sum_i (H u_i)\frac{\partial\Phi}{\partial u_i} = 0,$$

$$H\frac{\partial\Phi}{\partial H} + \sum_i \left(\sum_k p_k \frac{\partial u_i}{\partial p_k}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial u_i} = 0.$$

Berücksichtigt man daher Satz 11., so sieht man, dass die Elimination der Differentialquotienten:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial N_1}, \cdots \frac{\partial\Phi}{\partial N_r}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial H}$$

aus diesem System $q+m+1$ Gleichungen von der Form

$$(15)\qquad B_k(\Phi) = \sum_i \Theta_{ki}(N_1 \cdots N_r H u_1 u_2 \cdots)\frac{\partial\Phi}{\partial u_i} = 0$$

ergiebt.

Hätte man andererseits dieselben Differentialquotienten zwischen den Gleichungen

$$(N_1\Phi) = 0, \cdots (N_r\Phi) = 0, \quad (H\Phi) = 0$$

eliminirt, so würde man (§ 3., Nr. 7.) $q + m$ Gleichungen erhalten haben, die dem vollständigen Systeme

$$(16) \quad (N_1\Phi) = 0, \cdots (N_q\Phi) = 0, \quad (\Omega_1\Phi) = 0, \cdots (\Omega_m\Phi) = 0$$

äquivalent wären.

Hieraus schliessen wir, dass die Lösungen des Systems (15) zugleich auch das System (16) erfüllen. Und da das vollständige System (15) $q + m + 1$ Gleichungen und $2n - r - 1$ unabhängige Variable enthält, so finden wir eine Lösung $\Phi_1$ von (16) durch eine Operation

$$2n - (r+1) - (q+m+1).$$

Bilden nun $N_1 \cdots N_r H\Phi_1$ wiederum eine Gruppe, so wissen wir, dass diese Gruppe ausser $N_1 \cdots N_q$ noch $m + 1$ ausgezeichnete Functionen enthält. Ich behaupte, dass diese ausgezeichneten Functionen sämmtlich von nullter Ordnung sind.

Um dies nachzuweisen, wollen wir die $q+m+1$ Gleichungen (15), die sich aus dem System (14) durch Elimination der Differentialquotienten von $\Phi$ nach $N_1, \cdots N_r, H$ ergaben, etwas näher ins Auge fassen.

Nehmen wir an, dass $X_1 \cdots X_q \cdots X_{q+m} \cdots X_{q'} P_{q+m+1} \cdots P_{q'}$ die kanonische Form der Gruppe $N_1 \cdots N_r H$ und zugleich $X_1 \cdots X_n$ $P_1 \cdots P_n$ ein System kanonischer Variabeln sei. Dann können wir das System (14) ersetzen durch die Gleichungen:

$$(X_1\Phi)=0, \cdots (X_{q'}\Phi)=0, \quad (P_{q+m+1}\Phi)=0, \cdots (P_{q'}\Phi)=0, \quad \sum_k p_k \frac{\partial\Phi}{\partial p_k} = 0,$$

oder, wenn wir unsere kanonischen Variabeln einführen, durch

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P_1}=0, \cdots \frac{\partial\Phi}{\partial P_{q'}}=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial X_{q+m+1}}=0, \cdots \frac{\partial\Phi}{\partial X_{q'}}=0, \quad \sum_{k=1}^{k=n} P^k \frac{\partial\Phi}{\partial P_k}=0.$$

In Folge dessen genügen die Lösungen des Systems (14) zugleich auch den $q + m + 1$ Gleichungen:

$$(17) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial P_1}=0, \cdots \frac{\partial\Phi}{\partial P_{q+m}}=0, \quad P_{q'+1}\frac{\partial\Phi}{\partial P_{q'+1}} + \cdots + P_n\frac{\partial\Phi}{\partial P_n}=0.$$

Auf der anderen Seite, da $N_1, \cdots N_r, H$ blosse Functionen von $X_1 \cdots X_{q'} P_{q+m+1} \cdots P_{q'}$ sind, ist klar, dass durch Wiedereinführung der Variabeln $N_1 \cdots N_r H u_1 u_2 \cdots$ die Gleichungen (17) die Form

$$\sum_i V_{ki}(N_1 \cdots N_r H u_1 u_2 \cdots) \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 0$$

annehmen. Und da sich aus dem System (14) nur $q+m+1$ Gleichungen dieser Form ableiten lassen, so sehen wir, dass die Systeme (15) und (17) einander äquivalent sind. Folglich besitzen die Lösungen des Systems (15) die Form:

$$\Phi = \Phi\left(X_1 \cdots X_n\, P_{q+m+1} \cdots P_{q'}\, \frac{P_{q'+1}}{P_n} \cdots \frac{P_{n-1}}{P_n}\right).$$

Sei nun $\Phi_1$ eine solche Lösung, die mit $X_1 \cdots X_{q'}\, P_{q+m+1} \cdots P_{q'}$ eine Gruppe bildet. Jede ausgezeichnete Function $\Phi$ dieser Gruppe hat zunächst als blosse Function von $X_1 \cdots X_{q'}\, P_{q+m+1} \cdots P_{q'}$ und $\Phi_1$ nothwendig die obige Form; sie befriedigt aber überdies die Gleichungen:

$$(X_k \Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} = 0, \quad (k = 1, \cdots q'),$$

$$(P_i \Phi) = -\frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = 0, \quad (i = q+m+1, \cdots q');$$

also hat jede solche Function die Form:

$$\Phi = \Phi\left(X_1 \cdots X_{q+m}\, X_{q'+1} \cdots X_n\, \frac{P_{q'+1}}{P_n}, \cdots \frac{P_{n-1}}{P_n}\right),$$

und ist folglich eine Function nullter Ordnung, wie oben behauptet worden war.

Durch Auffindung einer solchen Lösung $\Phi_1$ des Systems (15), die mit $N_1 \cdots N_r H$ eine Gruppe bildet, ist somit das ursprüngliche Problem zurückgeführt auf eins von ganz derselben Form, in welchem nur die Zahlen $r$ und $m$ respective in $r+1$ und $m+1$ übergegangen sind. Wir können daher das neue Problem seinerseits wieder in genau derselben Weise einen Schritt weiter bringen und bedürfen hierzu nur einer Integrationsoperation, deren Ordnung um zwei Einheiten niedriger ist, als diejenige der ersten Operation.

Nehmen wir andererseits an, dass die gefundene Lösung $\Phi_1$ des Systems (15) und die Functionen $N_1 \cdots N_r H$ keine Gruppe bilden. Sind dann $\Phi_2 \cdots \Phi_s$ diejenigen weiteren Lösungen des Systems (16), die man durch Anwendung des Poisson-Jacobi'schen Satzes erhält, so besitzt die Gruppe $N_1 \cdots N_r H\, \Phi_1 \cdots \Phi_s$ jedenfalls $q+m$ ausgezeichnete Functionen nullter Ordnung, nämlich $N_1 \cdots N_q\, \Omega_1 \cdots \Omega_m$, und folglich ist auch in diesem Falle die Ordnung der zweiten Integrationsoperation wenigstens um zwei Einheiten niedriger als diejenige der ersten.

Indem wir daher ganz analog wie in Nr. 7. weiter schliessen, werden wir zu dem folgenden Satze geführt:

Theorem IV. *Vorgelegt sei ein Involutionssystem nullter Ordnung*

$$N_1 = \alpha_1, \cdots N_q = \alpha_q,$$

*und seien* $N_1 \cdots N_q \cdots N_r H$ *bekannte Lösungen des Systems:*

$$(N_1\Phi) = 0, \cdots (N_q\Phi) = 0,$$

*die eine homogene Gruppe mit* $q+m$ *ausgezeichneten Functionen, sämmtlich von nullter Ordnung, bilden. Alsdann verlangt die Bestimmung der fehlenden* $2l+m$ *Lösungen im ungünstigsten Falle nur noch die Operationen*

$$2l-1,\ 2l-3, \cdots 5,\ 3,\ 1.$$

*Sind dagegen die* $q+m$ *ausgezeichneten Functionen nicht sämmtlich von nullter Ordnung, so sind im ungünstigsten Falle die Operationen*

$$2l,\ 2l-2, \cdots 6,\ 4,\ 2$$

*nothwendig.*

## Abschnitt II.

### Theorie der Differentialgleichungen, die bekannte infinitesimale Transformationen gestatten.

In einer bekannten Abhandlung untersucht Abel diejenigen algebraischen Gleichungen, welche die Eigenschaft besitzen, dass eine gewisse *bekannte* rationale Function $f(x)$ einer beliebigen Wurzel $x$ selbst wieder eine Wurzel der Gleichung ist. Er zeigt, dass die Auflösung einer solchen Gleichung entweder vollständig geleistet werden, oder doch auf die Auflösung von gewissen Hülfsgleichungen, deren Grad ein Divisor des Grades der vorgelegten Gleichung ist, zurückgeführt werden kann. Diese Gleichungen können dadurch charakterisirt werden, dass sie eine gewisse rationale Transformation

$$x' = f(x)$$

gestatten. Und die betreffende Abhandlung Abel's giebt, können wir sagen, eine Theorie für die Auflösung von algebraischen Gleichungen, die entweder eine oder auch mehrere bekannte *permutable* Transformationen gestatten.

In der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen kann man sich, wie Klein und ich es gethan haben*), ein analoges Problem

*) Math. Annalen Bd. IV.

stellen. Um mich möglichst klar ausdrücken zu können, werde ich zuerst einige einfache Beispiele betrachten. Sei

$$f\left(x\, y\, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

eine vorgelegte Differentialgleichung mit dem Integrale

$$\varphi\,(xy) = a = \text{Const.},$$

und man betrachte $x$ und $y$ wie gewöhnlich als Cartesische Punktcoordinaten in einer Ebene. Alsdann definirt $\varphi = a$ einfach unendlich viele Curven, die sogenannten Integralcurven. Führe ich nun auf die Ebene eine Translationsbewegung aus, z. B. parallel mit der $x$-Axe, so verwandeln sich die Integralcurven in die Curvenschaar

$$\varphi\,(x + \alpha, y) = \text{Const.},$$

die im Allgemeinen von der ursprünglichen Schaar verschieden ist. Besteht indess zufälligerweise eine Relation von der Form

$$\varphi\,(x + \alpha, y) = \Omega\,(\varphi),$$

so ist die neue Schaar mit der ursprünglichen identisch, während jedoch im Allgemeinen jede Integralcurve in eine neue übergegangen ist. In diesem Falle sage ich, dass die Differentialgleichung $f = 0$ die betreffende Translation gestattet. Es ist insbesondere möglich, dass $f = 0$ eine *infinitesimale* Translation längs der $x$-Axe gestattet. Dies tritt ein, wenn $f = 0$ die Form

$$f\left(y\, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

besitzt. In diesem Falle hat nämlich das Integral die Form

$$\Phi(y) + x = \text{Const.},$$

welche Gleichung zeigt, dass eine infinitesimale Translation längs der $x$-Axe jede Integralcurve in eine benachbarte überführt. Zu bemerken ist übrigens, dass $f = 0$ in diesem Falle zugleich jede *endliche* Translation längs der $x$-Axe gestattet.

Betrachten wir als zweites Beispiel eine Gleichung $f = 0$, deren Integral die Form

$$\Phi\,(y^2 + x^2) + \text{arc. tg.}\, \frac{y}{x} = \text{Const.}$$

besitzt. Führt man auf die Ebene eine infinitesimale Rotation um den Anfangspunkt aus, so geht jede Integralcurve in eine benachbarte Integralcurve über. In diesem Falle sage ich, dass $f = 0$ die betreffende infinitesimale Rotation gestattet. Man sieht, dass alsdann $f = 0$ zugleich jede *endliche* Rotation um den Anfangspunkt gestattet.

Wenn überhaupt*) die infinitesimale Transformation, vermöge deren $x$ und $y$ die Incremente

$$\delta x = \xi(xy)\delta t, \quad \delta y = \eta(xy)\delta t$$

erhalten, jede Integralcurve der Gleichung $f = 0$ in eine benachbarte Integralcurve überführt, so sage ich, dass diese Gleichung die betreffende infinitesimale Transformation gestattet. In der citirten Abhandlung zeigten nun Klein und ich, dass die Integration einer Gleichung $f = 0$ mit einer *bekannten* infinitesimalen Transformation

$$\delta x = \xi\delta t, \quad \delta y = \eta\delta t$$

vermöge einer Quadratur geleistet werden kann, wenn zuerst die Gleichung

$$\eta dx - \xi dy = 0$$

integrirt worden ist**). Diese anscheinend triviale Bemerkung erlaubte uns mehrere bekannte Integrationstheorien unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte zu vereinigen.

Es lag nun nahe, überhaupt zu untersuchen, *welcher Vortheil sich für die Integration von beliebigen vorgelegten Differentialgleichungen aus bekannten inf. Transformationen derselben ziehen lässt.* Dieses allgemeine Problem behandle ich in diesem Abschnitte für lineare partielle Differentialgleichungen. Ich erhalte in dieser Weise mehrere bemerkenswerthe Resultate, unter denen ich hier nur den genauen Zusammenhang der Theorie der infinitesimalen Transformationen mit der Theorie des Integrabilitätsfactors und der Theorie des letzten Multiplicators hervorheben werde. Meine neue Theorie steht übrigens auch in genauem Zusammenhange mit meiner Theorie der Transformationsgruppen, die indess hier keineswegs als bekannt vorausgesetzt wird.

Um die Tragweite meiner neuen Theorie an einem guten Beispiele zu illustriren, betrachte ich das vollständige System

$$(f_1\varphi) = 0, \cdots (f_q\varphi) = 0, \text{ wo } (f_i f_k) = 0,$$

und setze dabei voraus, dass gewisse Lösungen desselben gefunden sind. Ich zeige zunächst, dass jede bekannte Lösung unmittelbar eine infinitesimale Transformation aufzustellen erlaubt, welche das vollständige System invariant lässt. Sodann wende ich meine allgemeine Theorie auf diesen speciellen Fall an und finde dadurch in neuer Weise

---

*) Ich definire später *analytisch* den Sinn, den ich mit dem Ausdrucke, dass eine Differentialgleichung $f = 0$ eine gewisse infinitesimale Transformation gestattet, verbinde.

**) In dem ersten Paragraphen dieses Abschnittes zeige ich, dass die Integration der Hülfsgleichung

$$\eta dx - \xi dy = 0$$

unnöthig ist.

die Hauptresultate des vorangehenden Paragraphen wieder, die übrigens eben in dieser Weise zuerst*) gewonnen wurden**).

## § 6.

## Infinitesimale Transformationen einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. O.

**13.** Eine Transformation, die $x$ und $y$ bezüglich durch

$$x + \xi\delta t, \quad y + \eta\delta t$$

ersetzt, wobei $\xi$ und $\eta$ gewisse Functionen von $x$ und $y$ sind, und $\delta t$ eine infinitesimale Grösse bezeichnet, nenne ich eine *infinitesimale Transformation.* Ich bezeichne dieselbe durch die Gleichungen:

$$\delta x = \xi\delta t, \quad \delta y = \eta\delta t.$$

Führe ich diese Transformation auf irgend eine Function $\Omega(xy)$ aus, so erhalte ich die neue Function

$$\Omega(x + \xi\delta t, \; y + \eta\delta t),$$

oder, wenn ich von infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung absehe:

$$\Omega + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\eta\right)\delta t.$$

Sei nun $Ydx - Xdy = 0$ eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. O. und $\varphi$ ein Integral derselben, alsdann ist

---

*) Durch geometrische Untersuchungen wurde ich schon längst zur allgemeinen Betrachtung solcher infinitesimalen Transformationen geführt, die ein vorgelegtes geometrisches Gebilde invariant lassen. In diesem Sinne untersuchte ich im Besondern zusammen mit Klein diejenigen Curven, die $\infty^1$, und diejenigen Flächen, die $\infty^2$ permutable lineare Transformationen zulassen. Bei dieser Gelegenheit stellten wir, wenngleich nur implicite, das im Texte besprochene allgemeine Problem. Klein machte mich aufmerksam auf die Analogie zwischen diesem Probleme und der Abel'schen Theorie solcher algebraischen Gleichungen, die bekannte permutable Transformationen zulassen. In der Arbeit „Ueber Complexe" (Math. Annalen Bd. V, p. 200) betrachtete ich partielle Differentialgleichungen 1. O. mit bekannten inf. Transformationen; in späteren Arbeiten habe ich bei mehreren Gelegenheiten kurze Andeutungen über diese Theorie gemacht.

**) Was die Theorie der inf. Transformationen in ihrer Anwendung auf partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung betrifft, so beschränke ich mich hier auf den folgenden Satz: Gestattet eine partielle Differentialgleichung $m^{ter}$ Ordnung zwischen $n$ Variabeln eine bekannte inf. Berührungstransformation, so ist es möglich, eine Gleichung derselben Ordnung mit $n-1$ Variabeln aufzustellen, deren Integrale ohne Weiteres Integrale der vorgelegten Gleichung liefern. Diese Bemerkung lässt sich z. B. anwenden auf die partielle Differentialgleichung 3. O. zwischen 4 Variabeln, welche alle Orthogonalsysteme des Raumes bestimmt. Man kennt nämlich alle inf. Transformationen, welche diese Gleichung invariant lassen. Nimmt man z. B. eine beliebige inf. Bewegung, so ist es möglich, eine Gleichung 3. O. zwischen $z$, $x$, $y$ aufzustellen, deren Integralflächen jedesmal einem Orthogonalsysteme angehören, das bei der betreffenden Bewegung invariant bleibt.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\eta$$

im Allgemeinen nicht wieder ein Integral dieser Gleichung; ist dies jedoch der Fall, so dass also eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\eta = \Omega(\varphi)$$

stattfindet, so sage ich, dass unsere Differentialgleichung die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi \delta t$, $\delta y = \eta \delta t$ gestattet, oder dass diese inf. Transformation die Gleichung $Ydx - Xdy = 0$ in sich überführt.

Definition. *Die Differentialgleichung* $Ydx - Xdy = 0$ *gestattet die infinitesimale Transformation* $\delta x = \xi \delta t$, $\delta y = \eta \delta t$, *wenn das Integral der Gleichung in ein neues Integral übergeführt wird, wenn also der Ausdruck*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\eta$$

*gleichzeitig mit* $\varphi$ *ein Integral ist.*

Wir werden diejenige Bedingungsgleichung entwickeln, die zwischen $X$ $Y$ $\xi$ und $\eta$ stattfinden muss, wenn unsere Differentialgleichung die betreffende inf. Transformation gestatten soll. Zu diesem Zwecke bilden wir die identische Gleichung:

$$\begin{aligned}(1)\qquad & X\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}\right) + Y\frac{\partial}{\partial y}\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ & - \xi\frac{\partial}{\partial x}\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \eta\frac{\partial}{\partial y}\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ & = \left(X\frac{\partial \xi}{\partial x} + Y\frac{\partial \xi}{\partial y} - \xi\frac{\partial X}{\partial x} - \eta\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\\ & + \left(X\frac{\partial \eta}{\partial x} + Y\frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

und setzen in ihr statt $f$ ein Integral $\varphi$ der Differentialgleichung, das heisst eine Lösung der Gleichung

$$X\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Setzen wir nun voraus, dass unsere Differentialgleichung die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi \delta t$, $\delta y = \eta \delta t$ gestattet, so ist nach dem Vorangehenden auch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\eta$$

eine Lösung, und also kommt:

$$\begin{aligned}0 = & \left(X\frac{\partial \xi}{\partial x} + Y\frac{\partial \xi}{\partial y} - \xi\frac{\partial X}{\partial x} - \eta\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\\ & + \left(X\frac{\partial \eta}{\partial x} + Y\frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y},\end{aligned}$$

was wieder heisst, dass die Differentialgleichung:

$$0 = \left(X\frac{\partial\xi}{\partial x} + Y\frac{\partial\xi}{\partial y} - \xi\frac{\partial X}{\partial x} - \eta\frac{\partial X}{\partial y}\right)dy$$
$$-\left(X\frac{\partial\eta}{\partial x} + Y\frac{\partial\eta}{\partial y} - \xi\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx$$

dasselbe Integral wie die vorgelegte Gleichung

$$0 = Xdy - Ydx$$

zulässt. Es bestehen daher zwei Relationen:

$$(2)\qquad \begin{cases} X\frac{\partial\xi}{\partial x} + Y\frac{\partial\xi}{\partial y} - \xi\frac{\partial X}{\partial x} - \eta\frac{\partial X}{\partial y} = \lambda X, \\ X\frac{\partial\eta}{\partial x} + Y\frac{\partial\eta}{\partial y} - \xi\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta\frac{\partial Y}{\partial y} = \lambda Y, \end{cases}$$

die durch Elimination der unbekannten Grösse $\lambda$ die Bedingungsgleichung

$$\frac{X\frac{\partial\xi}{\partial x} + Y\frac{\partial\xi}{\partial y} - \xi\frac{\partial X}{\partial x} - \eta\frac{\partial X}{\partial y}}{X} = \frac{X\frac{\partial\eta}{\partial x} + Y\frac{\partial\eta}{\partial y} - \xi\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta\frac{\partial Y}{\partial y}}{Y}$$

oder die äquivalente

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X}{X\eta - Y\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Y}{X\eta - Y\xi}\right) = 0$$

ergeben.

Besteht andererseits diese Gleichung, und also auch die äquivalenten Gleichungen (2), so zeigt (1), dass $\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ gleichzeitig mit $\varphi$ ein Integral von $Xdy - Ydx = 0$ ist. Und also haben wir den Satz:

Satz 12. *Soll die Differentialgleichung $Xdy - Ydx = 0$ die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$ gestatten, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass die Bedingungsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X}{X\eta - Y\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Y}{X\eta - Y\xi}\right) = 0$$

*erfüllt ist.*

**14.** Dieser Satz giebt eine merkwürdige Beziehung zwischen der Theorie der infinitesimalen Transformationen einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. O. und der Euler'schen Theorie des Integrabilitätsfactors. Ein Integrabilitätsfactor $M$ der Gleichung $Xdy - Ydx = 0$ ist ja nämlich durch die Gleichung

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} = 0$$

definirt. Wenn wir aber diese Gleichung mit der obenstehenden Bedingungsgleichung vergleichen, so erhalten wir das folgende Theorem.

Theorem V. *Führt die infinitesimale Transformation* $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$ *die Gleichung* $Xdy - Ydx = 0$ *in sich über, so ist* $\frac{1}{X\eta - Y\xi}$ *ein Integrabilitätsfactor. Kennt man andererseits einen Integrabilitätsfactor* $M$, *und bestimmt man darnach zwei Functionen* $\xi$ *und* $\eta$ *durch die Gleichung*

$$X\eta - Y\xi = \frac{1}{M},$$

*so gestattet unsere Differentialgleichung die infinitesimale Transformation* $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$.

Diesen Satz beweist man auch folgendermassen. Man multiplicire die beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ \xi & \eta \end{vmatrix} = \Delta \text{ und } \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

mit einander, so wird bekanntlich

$$\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \begin{vmatrix} X\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial\varphi}{\partial y} & \xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ Y & \eta \end{vmatrix}.$$

Lassen wir hier $\varphi$ eine Lösung von

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

bedeuten, so folgt

$$\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -Y\left(\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),$$

woraus

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{-Y} = \frac{\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\Delta}.$$

Nun ist aber die linke Seite dieser Gleichung der allgemeine Ausdruck eines Integrabilitätsfactors unserer Differentialgleichung. Setzen wir

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{-Y} = N,$$

so kommt

$$N = \frac{\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\Delta},$$

welche Gleichung die Richtigkeit unseres Satzes beweist. In der That, gestattet die vorgelegte Differentialgleichung die inf. Transformation $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$, und besteht somit eine Relation

$$\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \Omega(\varphi),$$

so wird

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Omega(\varphi)} N,$$

was darauf hinauskommt, dass $\frac{1}{\Delta}$ ein Integrabilitätsfactor ist. Auf der anderen Seite, wenn $\frac{1}{\Delta}$ ein Integrabilitätsfactor ist, so zeigt die obenstehende Gleichung, dass

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

das Verhältniss zweier Integrabilitätsfactoren, das heisst ein Integral ist. Folglich gestattet die Differentialgleichung die betreffende Transformation.

Im Vorangehenden ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass die Determinante $\Delta$ von Null verschieden ist. Verschwindet dagegen $\Delta$, ist also

$$X\eta - Y\xi = 0,$$

so lässt sich kein Vortheil aus der bekannten infinitesimalen Transformation ziehen, die jetzt die Form

$$\delta x = \lambda X \delta t, \quad \delta y = \lambda Y \delta t$$

besitzt. Und dies ist keineswegs überraschend, insofern unsere Differentialgleichung *eine jede* inf. Transformation der Form

$$\delta x = \mu X \delta t, \quad \delta y = \mu Y \delta t$$

gestattet. Es sagt daher nichts, eine solche zu kennen.

## § 7.

## Infinitesimale Transformationen eines vollständigen Systems.

**15.** Ich bezeichne die infinitesimale Transformation, welche das Werthsystem $x_1 \cdots x_n$ durch das unendlich benachbarte $x_1 + \xi_1 \delta t, \cdots x_n + \xi_n \delta t$ ersetzt, mit den Gleichungen

$$\delta x_1 = \xi_1 \delta t, \cdots \delta x_n = \xi_n \delta t$$

oder kurzweg mit

$$\delta x_k = \xi_k \delta t.$$

Sie transformirt eine Function der $x$

$$\Pi(x_1 \cdots x_n)$$

in

$$\Pi(x_1 + \xi_1 \delta t, \cdots x_n + \xi_n \delta t),$$

oder, wenn wir infinitesimale Grössen zweiter Ordnung wegwerfen, in

$$\Pi + \delta t \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \xi_1 + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \xi_n \right).$$

Ist $\Pi$ eine Lösung eines vollständigen Systems mit den unabhängigen Variabeln $x_1 \cdots x_n$:

$$A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \cdots A_r(f) = 0,$$

so ist $\Pi + \delta t \sum_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \xi_k$ im Allgemeinen keine solche Lösung. Ist dies indess zufälligerweise der Fall, so ist auch $\sum_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \xi_k$ eine Lösung.

Definition. *Ein vollständiges System*

$$A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \cdots A_r(f) = 0$$

*gestattet die infinitesimale Transformation*

$$\delta x_k = \xi_k \delta t,$$

*wenn durch diese Transformation jede Lösung des Systems wiederum in eine solche übergeführt wird, wenn also der Ausdruck* $\sum_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \xi_k$ *gleichzeitig mit* $\Pi$ *eine Lösung des vollständigen Systems ist.*

Wir setzen voraus, dass das $r$-gliedrige vollständige System

$$A_i(f) = X_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad (i = 1 \cdots r),$$

die infinitesimale Transformation

$$\delta x_k = \xi_k \delta t$$

gestattet, und suchen die in Folge dessen zwischen den $X_k^i$ und $\xi_k$ stattfindenden Relationen.

Wir setzen

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = B(f)$$

und bilden den bekannten Ausdruck $A_i(B(f)) - B(A_i(f))$. Dies giebt für jedes $i$ eine Gleichung von der Form:

$$A_i(B(f)) - B(A_i(f)) = k_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + k_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n}, \tag{3}$$

wo

$$k_k^i = \sum_{m=1}^{m=n} \left( X_m^i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_m} - \xi_m \frac{\partial X_k^i}{\partial x_m} \right).$$

Lässt man jetzt $f$ irgend eine gemeinsame Lösung des vollständigen Systems bezeichnen, so verschwinden sowohl die Grössen $A_i(f)$, als auch die Grössen $A_i(B(f))$, und also wird die linke Seite der Gleichung (3) Null. Jede Lösung des vollständigen Systems genügt also auch der Gleichung:

$$k_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + k_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

was wieder heisst, dass eine Relation von der Form:

$$k_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + k_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha_1^i A_1(f) + \cdots + \alpha_r^i A_r(f),$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung:

$$(4) \quad A_i(B(f)) - B(A_i(f)) = \alpha_1^i A_1(f) + \cdots + \alpha_r^i A_r(f)$$

stattfindet. Hier sind die $\alpha$ gewisse Functionen von $x_1 \cdots x_n$. — Besteht andererseits für jedes $i$ eine Relation von dieser Form, so behaupte ich, dass unsere infinitesimale Transformation das vollständige System $A_i(f) = 0$ in sich selbst überführt. Denn lassen wir in (4) $f$ irgend eine Lösung des vollständigen Systems bezeichnen, so kommt

$$A_i(B(f)) = 0,$$

und also ist $B(f)$ selbst eine Lösung, wie behauptet wurde. Dies giebt:

Theorem VI. *Soll die infinitesimale Transformation* $\delta x_k = \xi_k \delta t$ *sämmtliche Lösungen des vollständigen Systems*

$$A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \cdots A_r(f) = 0$$

*in ebensolche überführen, so ist, wenn wir*

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = B(f)$$

*setzen, dazu nothwendig und hinreichend, dass r Relationen von der Form*

$$A_i(B(f)) - B(A_i(f)) = \alpha_1^i A_1(f) + \cdots + \alpha_r^i A_r(f)$$

*stattfinden, wo die α Functionen der x sind.*

Eine jede der erhaltenen $r$ Bedingungsgleichungen löst sich in $n$ solche auf, indem die Coefficienten der Grössen $\frac{\partial f}{\partial x}$ links und rechts einander identisch gleich sein müssen. Man hat daher die $r \cdot n$ Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{m=1}^{m=n} \left( X_m^i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_m} - \xi_m \frac{\partial X_k^i}{\partial x_m} \right) = \alpha_1^i X_k^1 + \cdots + \alpha_r^i X_k^r;$$

doch ist es im Allgemeinen bequemer, diese $r \cdot n$ Gleichungen in die $r$ in Theorem VI. aufgestellten Relationen zusammenzufassen.

---

Wenn ich im Folgenden kurzweg von der infinitesimalen Transformation

$$(5) \quad B(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

spreche, so verstehe ich darunter immer die inf. Transformation

$$(6) \quad \delta x_k = \xi_k \delta t.$$

Dabei ist Folgendes zu bemerken. Führt man statt $x_1 \cdots x_n$ neue unabhängige Variabeln $x_1' \cdots x_n'$ ein, so erhält man einerseits:

$$\delta x_k' = \left(\frac{\partial x_k'}{\partial x_1}\xi_1 + \cdots + \frac{\partial x_k'}{\partial x_n}\xi_n\right)\delta t,$$

andererseits:

$$B(f) = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial x_k'}{\partial x_1}\xi_1 + \cdots + \frac{\partial x_k'}{\partial x_n}\xi_n\right)\frac{\partial f}{\partial x_k'},$$

so dass die Gleichungen (5) und (6) sich in genau derselben Weise transformiren. Hiermit ist die analytische Berechtigung der eben eingeführten Terminologie nachgewiesen.

## § 8.

## Reduction des Problems.

Ich setze voraus, dass das $r$-gliedrige vollständige System

$$A_i(f) = X_1^i\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

$q$ bekannte infinitesimale Transformationen

$$B_k(f) = \xi_1^k\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n^k\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

gestattet, das heisst dass Relationen der Form

$$(7)\qquad A_i(B_k(f)) - B_k(A_i(f)) = \alpha_1^{ik}A_1 f + \cdots + \alpha_r^{ik}A_r f = (A_i B_k)$$

bestehen. Ich führe in diesem Paragraphen die Aufgabe, diese bekannten inf. Transformationen für die Integration des vollständigen Systems möglichst zu verwerthen, auf den Fall zurück, dass die $B(f)$ durch Relationen von der Form:

$$B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f)) = \sum_m b_m^{ik}B_m(f) + \sum_m a_m^{ik}A_m(f),$$

in denen die $b$ Constanten bezeichnen, verbunden sind und *dass* $q + r = n$ *ist.*

**16.** Es ist zunächst möglich, aus den bekannten inf. Transformationen gewisse weitere inf. Transformationen und zugleich gewisse Lösungen des vollständigen Systems herzuleiten. Hierzu dienen die folgenden Sätze.

Satz 13. *Gestattet unser vollständiges System die inf. Transformationen* $B_k(f)$ *und* $B_{k'}(f)$, *so gestattet es zugleich auch die inf. Transformation, deren Symbol* $B_k(B_{k'}(f)) - B_{k'}(B_k(f))$ *ist.*

Beweis. Wir bilden die Jacobi'sche Identität

$$(A_i(B_kB_{k'})) + (B_k(B_{k'}A_i)) + (B_{k'}(A_iB_k)) = 0$$

und ersetzen $(A_iB_k)$ und $(A_iB_{k'})$ durch ihre Werthe (7). In dieser Weise finden wir, indem wir noch einmal die Formeln (7) anwenden,

dass $(A_i(B_kB_{k'}))$ sich linear durch die $A_i(f)$ ausdrückt. Und folglich ist $(B_kB_{k'})$, oder ausgeführt $B_k(B_{k'}(f)) - B_{k'}(B_k(f))$, das Symbol einer infinitesimalen Transformation des vollständigen Systems.

Theorem VII. *Gestattet das vollständige System*

$$A_1(f) = 0, \cdots A_r(f) = 0$$

*die infinitesimalen Transformationen* $B_1(f), \cdots B_q(f)$ *und sind dabei die* $A(f)$ *und* $B(f)$ *durch m Relationen*

$$\sum_k a_k A_k(f) + \sum_k b_k B_k(f) = 0,$$

*in denen die* $a_k$ *und* $b_k$ *Functionen der x sind, verbunden, so findet man folgendermassen eine Anzahl Lösungen des vollständigen Systems. Man löst die m Relationen nach m von den Grössen* $B(f)$ *auf (dies ist immer möglich, indem keine lineare Relation zwischen den* $A_i(f)$*, die ein vollständiges System bilden, stattfinden darf). Erhält man hierdurch*

$$B_k(f) = \beta^k_{m+1} B_{m+1}(f) + \cdots + \beta^k_q B_q(f) + \sum \alpha A(f), \quad (k = 1 \cdots m),$$

*so sind sämmtliche Grössen* $\beta$ *Lösungen des vollständigen Systems.*

Beweis. Die Gleichung

$$(A_i B_k) = (A_i, \beta^k_{m+1} B_{m+1} + \cdots + \beta^k_q B_q + \sum \alpha A)$$

giebt wegen (7) eine Relation der Form

$$A_i(\beta^k_{m+1}) B_{m+1}(f) + \cdots + A_i(\beta^k_q) B_q(f) + \sum \alpha' A(f) = 0.$$

Nun aber haben wir vorausgesetzt, dass nur $m$ Relationen zwischen den $A$ und $B$ stattfinden, und zwar solche, die sich hinsichtlich $B_1 \cdots B_m$ auflösen lassen. Also müssen die Grössen $A_i(\beta^k_{m+1}) \cdots A_i(\beta^k_q)$ gleich Null sein, indem sonst eine Relation zwischen $B_{m+1}(f) \cdots B_q(f)$ und den $A(f)$ bestände. Und folglich sind die $\beta$ gemeinsame Lösungen unseres vollständigen Systems, was zu beweisen war.

Schliesslich erinnere ich noch daran, dass schon die Definition des Begriffs infinitesimale Transformation $B(f)$ eines vollständigen Systems $A_i(f) = 0$ uns eine Operation zur Auffindung von weiteren Lösungen angiebt. Die Forderung ist ja nämlich die, dass $B(\varphi)$ gleichzeitig mit $\varphi$ eine Lösung sein soll; dabei wird aber $B(\varphi)$ im Allgemeinen eine von $\varphi$ unabhängige Lösung sein.

**17.** Ich setze voraus, dass man durch successive Anwendung der in diesem Paragraphen angegebenen Operationen $\nu$ Lösungen $\Pi_1 \cdots \Pi_\nu$

und $q'$ infinitesimale Transformationen $B_1(f) \cdots B_{q'}(f)$ bestimmt habe, und keine weitere finden könne. Ich verstehe dies so, dass alle übrigen $B_{q'+k}(f)$ und zugleich alle $(B_i B_k)$ sich folgendermassen ausdrücken:

$$\sum_{k=1}^{k=q'} \psi_k(\Pi_1 \cdots \Pi_\nu) B_k(f) + \sum_{i=1}^{i=r} \Theta_i A_i(f),$$

während keine solche Relation zwischen $B_1 \cdots B_{q'}$ und den $A$ bestehen darf, und dass überdies alle $B_i(\Pi_k)$ sich als Functionen von $\Pi_1 \cdots \Pi_\nu$ darstellen lassen.

Ist nun die Zahl $\nu$ der gefundenen Lösungen gleich $n-r$, so ist das Integrationsgeschäft eo ipso erledigt, insofern ein $r$-gliedriges vollständiges System zwischen $n$ Variabeln eben nur $n-r$ Lösungen besitzt. Wir haben daher nur den Fall:

$$\nu < n - r$$

zu betrachten.

Wir führen neue unabhängige Variable ein, nämlich $\Pi_1 \cdots \Pi_{n-\nu}$ zusammen mit $n-\nu$ anderen Grössen, die $x_1' \cdots x_{n-\nu}'$ heissen mögen. Da die $\Pi$ Lösungen sind, so nimmt unser vollständiges System hierdurch die Form an:

$$A_i'(f) = X_1'^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_{n-\nu}'^i \frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu}'} = 0,$$

während seine inf. Transformationen $B_k(f)$ sich in Ausdrücke von der Form verwandeln:

$$B_k'(f) = \xi_1'^k \frac{\partial f}{\partial x_1'} + \cdots + \xi_{n-\nu}'^k \frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu}'} + \sum_i B_k(\Pi_i) \frac{\partial f}{\partial \Pi_i},$$

in denen die $B_k(\Pi_i)$ Functionen der $\Pi$ sind. Und da jede Lösung des ursprünglichen Systems $A_i(f) = 0$ durch Einführung der neuen Variabeln in eine Lösung des transformirten Systems $A_i'(f) = 0$ übergeht, so ist mit $\varphi$ zugleich immer auch $B_k'(\varphi)$ eine Lösung des letzteren Systems.

Verstehen wir daher unter $\psi_1 \cdots \psi_{q'}$ beliebige Functionen von $\Pi_1 \cdots \Pi_\nu$, so gilt dasselbe auch von dem Ausdrucke:

$$B''(f) = \psi_1 B_1'(f) + \cdots + \psi_{q'} B_{q'}'(f)$$

und somit besitzt jede infinitesimale Transformation von der Form $B''(f)$ die Eigenschaft, das vollständige System $A_i'(f) = 0$ in sich selbst überzuführen.

Ist es nun im Besondern, wie ich von jetzt an annehmen will, möglich, die Multiplication $\psi$ so zu wählen, dass die Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial \Pi_i}$ in $B''(f)$ nicht mehr vorkommen, so erhalten wir hierdurch eine oder mehrere, etwa $q''$ infinitesimale Transformationen:

$$B_k''(f) = \xi_1''^k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_{n-\nu}''^k \frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu}'},$$

deren analytische Ausdrücke nur dieselben Differentialquotienten, wie die Gleichungen des transformirten vollständigen Systems enthalten. Wir nehmen im Folgenden nur auf diese infinitesimalen Transformationen $B_k''(f)$ Rücksicht*).

Hiermit ist das vorgelegte Integrationsproblem darauf zurückgeführt, das $r$-gliedrige vollständige System $A_i'(f) = 0$ mit $n - \nu = n'$ unabhängigen Variabeln $x_1' \cdots x_{n'}'$ und mit $q''$ bekannten infinitesimalen Transformationen $B_1''(f), \cdots B_{q''}''(f)$ zu integriren. Jedes $(B_i'' B_k'')$ drückt sich in der Weise aus:

$$(B_i'' B_k'') = \sum_{h=1}^{h=q''} \psi_h^{ik} B_h''(f) + \sum_{\varrho} \Theta_\varrho^{ik} A_\varrho'(f),$$

wo die $\psi_\varrho^{ik}$ Functionen der $\Pi$ und als solche nunmehr als Constanten aufzufassen sind, indem die $\Pi_k$ sowohl in den $A_i'(f)$, wie in den $B_k''(f)$ nur als Constanten auftreten.

Die Zahl $r+q''$ kann nun höchstens gleich $n'$ sein, da sonst lineare Relationen zwischen den $A_i'f$ und $B_k''f$ stattfinden würden, was nach dem Vorangehenden ausgeschlossen ist. Den Fall, dass $r + q'' = n'$ ist, behandeln wir in § 10. Den Fall $r+q'' < n'$ reduciren wir durch Integration auf den ersten Fall. Zu diesem Zwecke bestimmen wir nach den von Mayer und mir gegebenen Regeln die $n'-r-q''$ gemeinsamen Lösungen $\Pi_1' \Pi_2' \cdots$ des vollständigen Systems:

$$A_1'(f) = 0, \cdots A_r'(f) = 0, \quad B_1''(f) = 0, \cdots B_{q''}''(f) = 0,$$

führen sodann neue unabhängige Variabeln:

$$\Pi_1' \cdots \Pi_{n'-r-q''}' \; x_1'' \cdots x_{r+q''}''$$

ein, wodurch die Ausdrücke $A_i'(f)$ und $B_k''(f)$ übergehen mögen in $A_i''(f)$ und $B_k'''(f)$, und erhalten hierdurch schliesslich ein $r$-gliedriges vollständiges System:

$$A_1''(f) = 0, \cdots A_r''(f) = 0$$

mit $r+q''$ unabhängigen Variabeln und mit $q''$ bekannten infinitesimalen Transformationen $B_1'''(f), \cdots B_{q''}'''(f)$, zwischen denen keine lineare Relation von der Form

$$\sum_i \alpha_i A_i''(f) + \sum_k \gamma_k B_k'''(f) = 0$$

*) Bei einer anderen Gelegenheit werde ich nachweisen, dass man wirklich aus den $B_k''(f)$ denselben Vortheil ziehen kann, wie aus den $B_k(f)$ selbst, dass man also im Allgemeinen aus den bekannten inf. Transformationen gar keinen Nutzen ziehen kann, wenn keine $B_k''(f)$ existiren.

besteht, während jedes $(B_i''' B_k''')$ sich linear durch die $B_h'''(f)$ und die $A_\varrho''(f)$ ausdrückt und zwar so, dass in diesen Ausdrücken:

$$(B_i''' B_k''') = \sum_h \gamma_h' B_h'''(f) + \sum_\varrho \alpha_\varrho' A_\varrho''(f)$$

die $\gamma_h'$ Constanten sind.

Hiermit ist die angekündigte Reduction erreicht.

## § 9.

## Multiplicator eines vollständigen Systems.

In diesem Paragraphen dehne ich den Jacobi'schen Multiplicatorbegriff auf vollständige Systeme aus.

**18.** Es sei:

$$A_i(f) = X_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad (i = 1 \cdots n)$$

ein vollständiges System, und $\Pi_1 \cdots \Pi_{n-r}$ ein System Lösungen desselben. Ich bilde das Determinantenverhältniss:

$$M = \begin{pmatrix} \Pi_1 & \cdots & \Pi_{n-r} \\ x_a & \cdots & x_g \end{pmatrix} : (X_k^1 X_l^2 \cdots X_v^r),$$

wo $a \cdots g\,k\,l \cdots v$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots n$ bezeichnen, und beweise eine Reihe Eigenschaften desselben.

Ich zeige zuerst, dass der Werth von $M$ ungeändert bleibt, wenn man die Zahlen $a \cdots g\,k \cdots v$ beliebig permutirt. Eliminirt man nämlich zwischen den $n - r$ Gleichungen:

$$X_1^i \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_n} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_1^i \frac{\partial \Pi_{n-r}}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial \Pi_{n-r}}{\partial x_n} = 0$$

etwa die Grössen $X_1^i \cdots X_{n-r-1}^i$, so kommt:

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 & \cdots & \Pi_{n-r} \\ x_1 & \cdots & x_{n-r} \end{pmatrix} X_{n-r}^i + \begin{pmatrix} \Pi_1 & \cdots & \Pi_{n-r} \\ x_1 & \cdots & x_{n-r-1}\, x_{n-r+1} \end{pmatrix} X_{n-r+1}^i + \cdots = 0,$$

und wenn man dem Index $i$ successiv die Werthe $1, 2 \cdots r$ giebt, und zwischen den entsprechenden $r$ Gleichungen etwa die $r - 1$ ersten Functionaldeterminanten eliminirt, so findet man:

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 \cdots \Pi_{n-r} \\ x_1 \cdots x_{n-r-1}\, x_{n-1} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} X^1_{n-r} \cdots X^1_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ X^r_{n-r} \cdots X^r_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \Pi_1 \cdots \Pi_{n-r} \\ x_1 \cdots x_{n-r-1}\, x_n \end{pmatrix} \begin{vmatrix} X^1_{n-r} \cdots X^1_{n-2}\, X^1_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X^r_{n-r} \cdots X^r_{n-2}\, X^r_n \end{vmatrix} = 0,$$

woraus die Gleichheit zweier Formen von $M$ hervorgeht. Ganz in derselben Weise erkennt man, dass zwei beliebige Formen von $M$ einander gleich sind.

Bildet man das Verhältniss $M$ mit einem anderen Systeme Lösungen $\Omega_1 \cdots \Omega_{n-r}$, so geht der neue Ausdruck aus dem alten durch Multiplication mit einer Function von $\Pi_1 \cdots \Pi_{n-r}$ hervor. Es ist nämlich

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \cdots \Omega_{n-r} \\ x_a \cdots x_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \cdots \Omega_{n-r} \\ \Pi_1 \cdots \Pi_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_1 \cdots \Pi_{n-r} \\ x_a \cdots x_g \end{pmatrix}$$

und hier ist die erste Determinante rechts eine Function von den $\Pi$, und zwar solange das System $\Omega_1 \cdots \Omega_{n-r}$ nicht festgestellt ist, eine *arbiträre* Function jener Grössen. Hiermit ist eine zweite wichtige Eigenschaft von $M$ nachgewiesen.

Endlich zeige ich, dass $M$ sich bei der Einführung neuer unabhängigen Variabeln $y_1 \cdots y_n$ als Invariante verhält, das heisst, nur mit einer Potenz der Transformationsdeterminante

$$D = \begin{pmatrix} y_1 \cdots y_n \\ x_1 \cdots x_n \end{pmatrix}$$

multiplicirt wird. Es ist nämlich, wenn $a \cdots g$ successiv beliebige $n - r$ unter den Zahlen $1 \cdots n$ bezeichnen:

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 \cdots \Pi_{n-r} \\ y_1 \cdots y_{n-r} \end{pmatrix} = \sum_{a \ldots g} \begin{pmatrix} \Pi_1 \cdots \Pi_{n-r} \\ x_a \cdots x_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \cdots x_g \\ y_1 \cdots y_{n-r} \end{pmatrix};$$

ferner ist, wie ich etwas später in diesem Paragraphen beweise

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_{n-r} \\ y_1 \cdots y_{n-r} \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} y_{n-r+1} \cdots y_n \\ x_{n-r+1} \cdots x_n \end{pmatrix},$$

also kommt

$$(9) \qquad \begin{pmatrix} \Pi_1 \cdots \Pi_{n-r} \\ y_1 \cdots y_{n-r} \end{pmatrix} = D^{-1} \sum \begin{pmatrix} \Pi_1 \cdots \Pi_{n-r} \\ x_a \cdots x_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-r+1} \cdots y_n \\ x_k \cdots x_v \end{pmatrix},$$

wo $a \cdots g\, k \cdots v$ eine Permutation der Zahlen $1, 2 \cdots n$ bezeichnen. Auf der anderen Seite nehmen die Gleichungen $A_i(f) = 0$ durch unsere Transformation die Form an:

$$A_i'(f) = Y_1^i \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + Y_n^i \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0,$$

wo

$$Y_k^i = X_1^i \frac{\partial y_k}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial y_k}{\partial x_n}.$$

Also kommt

$$(Y_{n-r+1}^1 Y_{n-r+2}^2 \cdots Y_n^r) = \sum_{k \ldots \varrho} (X_k^1 \cdots X_\varrho^r) \begin{pmatrix} y_{n-r+1} & \cdots & y_n \\ x_k & \cdots & x_\varrho \end{pmatrix},$$

welche Gleichung man nur mit (9) zu vergleichen braucht, um die Richtigkeit unserer Behauptung zu erkennen.

Die Formel (8) beweist man folgendermassen. Man bezeichne mit $D_i^k$ die Unterdeterminante hinsichtlich $\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ von

$$D = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Alsdann ist nach einem bekannten Satze

$$(10) \qquad (D_1^1 D_2^2 \cdots D_\varrho^\varrho) = D^{\varrho - 1} \begin{pmatrix} y_{\varrho+1} & \cdots & y_n \\ x_{\varrho+1} & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Andererseits geben die Gleichungen

$$dy_k = \frac{\partial y_k}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial y_k}{\partial x_n} dx_n$$

durch Auflösung

$$dx_i = \frac{1}{D} \sum D_i^k \, dy_k,$$

woraus

$$D_i^k = D \frac{\partial x_i}{\partial y_k}.$$

Und wenn wir diesen Werth in (10) einsetzen, kommt

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_\varrho \\ y_1 & \cdots & y_\varrho \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} y_{\varrho+1} & \cdots & y_n \\ x_{\varrho+1} & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

wie behauptet wurde.

**19.** Das Verhältniss

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 & \cdots & \Pi_{n-r} \\ x_1 & \cdots & x_{n-r} \end{pmatrix} : (X_{n-r+1}^1 \cdots X_n^r),$$

dessen wesentliche Bedeutung wir nachgewiesen haben, nennen wir den *Multiplicator* des betreffenden vollständigen Systems. Ist $r = 1$, so deckt sich dieser Begriff mit dem Jacobi'schen Multiplicator. Ist $r = n - 1$, so giebt es nur *eine* Lösung, die bekanntlich auch als Integral der totalen Differentialgleichung

$$\sum_k \left(X_1^1 \cdots X_{k-1}^{k-1} X_{k+1}^{k+1} \cdots X_n\right) dx_k = 0$$

definirt werden kann. Offenbar ist der Integrabilitätsfactor dieser Gleichung

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} : \left(X_1^1 \cdots X_{k-1}^{k-1} X_{k+1}^{k+1} \cdots X_n\right)$$

eben der Multiplicator des betreffenden vollständigen Systems.

*Der von mir aufgestellte Begriff Multiplicator eines vollständigen Systems umfasst also als Grenzfälle sowohl den Jacobi'schen Multiplicator einer linearen partiellen Differentialgleichung, wie den Euler'schen Integrabilitätsfactor einer linearen totalen Differentialgleichung.*

Kennt man eine Lösung $\Pi$ eines $r$-gliedrigen vollständigen Systems

$$\sum_{k=1}^{k=n} X_k^i (x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1 \cdots r),$$

so erhält man bekanntlich ein äquivalentes $r$-gliedriges System zwischen $n - 1$ Variabeln

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k (x_1 \cdots x_{n-1} \Pi) \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0,$$

indem man $x_1 \cdots x_{n-1}$ und $\Pi$ als neue unabhängige Variabeln einführt. Kennt man nun zugleich einen Multiplicator $M$ des ursprünglichen Systems, *so ist es immer möglich einen Multiplicator des reducirten Systems aufzustellen.* Nach dem Vorangehenden ist nämlich

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 & \cdots & \Pi_{n-r-1} & \Pi \\ x_{r+1} & \cdots & x_{n-1} & \Pi \end{pmatrix} : (Y_1^1 \; Y_2^2 \cdots Y_r^r) = M : \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} & \Pi \\ x_1 & \cdots & x_n & \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 & \cdots & \Pi_{n-r-1} \\ x_{r+1} & \cdots & x_{n-1} \end{pmatrix} : (Y_1^1 \; Y_2^2 \cdots Y_r^r) = \frac{M}{\frac{\partial \Pi}{\partial x_n}},$$

und da die linke Seite dieser Gleichung der allgemeine Ausdruck eines Multiplicators des reducirten Systems ist, so findet man einen solchen Multiplicator, indem man die Grösse

$$\frac{M}{\frac{\partial \Pi}{\partial x_n}}$$

als Function von $x_1 \cdots x_{n-1}$ und $\Pi$ ausdrückt.

**20.** Der Multiplicator eines vollständigen Systems lässt sich auch definiren als die gemeinsame Lösung von $r$ linearen partiellen Differentialgleichungen, die wir jetzt aufstellen werden.

Zu diesem Zwecke lösen wir die $r$ Gleichungen des vollständigen Systems nach $r$ Differentialquotienten, etwa $\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_r}$ auf. Hierdurch nimmt unser vollständiges System die Form an:

$$\begin{vmatrix} X_1^1 \cdots X_r^1 \\ \cdots\cdots \\ X_1^r \cdots X_r^r \end{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i \begin{vmatrix} X_1^1 \cdots X_{k-1}^1 X_{k+1}^1 \cdots X_r^1 X_{r+i}^1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_1^r \cdots X_{k-1}^r X_{k+1}^r \cdots X_r^r X_{r+i}^r \end{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{r+i}} = 0,$$

$$(k = 1 \cdots r).$$

Von jeder dieser $r$ Gleichungen ist nun

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 & \cdots \Pi_{n-r} \\ x_{r+1} & \cdots x_n \end{pmatrix} : \begin{vmatrix} X_1^1 \cdots X_r^1 \\ \cdots\cdots \\ X_1^r \cdots X_r^r \end{vmatrix}$$

der Jacobi'sche Multiplicator. Unsere $r$ Gleichungen haben also einen gemeinsamen Jacobi'schen Multiplicator, der nach meiner Definition zugleich der Multiplicator des vollständigen Systems ist. Nun aber hat Jacobi gezeigt, dass man den Multiplicator einer linearen partiellen Differentialgleichung auch durch eine partielle Differentialgleichung definiren kann. Daher finden wir unmittelbar $r$ Gleichungen, die der Multiplicator unseres vollständigen Systems befriedigen muss. Und da der Quotient zweier Lösungen dieser neuen $r$ Gleichungen offenbar immer eine Lösung des vollständigen Systems $A_i(f) = 0$ ist, so erkennen wir, dass eine jede Lösung der gefundenen $r$ Gleichungen einen Multiplicator des vollständigen Systems darstellt. Dies giebt

Satz 14. *Bilden die $r$ Gleichungen*

$$F_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=r+1}^{i=n} F_k^i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad (k = 1 \cdots r)$$

*ein vollständiges System, so definiren die $r$ linearen Gleichungen*

$$\frac{\partial (F_k M)}{\partial x_k} + \sum_{i=r+1}^{i=n} \frac{\partial (F_k^i M)}{\partial x_i} = 0, \quad (k = 1 \cdots r)$$

*den Multiplicator dieses vollständigen Systems.*

**21.** Hier möge noch der folgende Satz seinen Platz finden.

Satz 15. *Sind $A_1(f) = 0, \cdots A_r(f) = 0$ lineare partielle Differentialgleichungen, die paarweise in der Beziehung*

$$A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = 0 \tag{11}$$

*stehen, so haben dieselben einen gemeinsamen Jacobi'schen Multiplicator.*

Zum Beweise betrachten wir die $r$ Gleichungen

$$C_i(V) = A_i(V) - M\frac{\partial V}{\partial M}\left(\frac{\partial X_1^i}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n^i}{\partial x_n}\right) = 0$$

und bilden die Ausdrücke

$$C_i(C_k(V)) - C_k(C_i(V))$$

$$= A_i(A_k(V)) - A_k(A_i(V)) - M\frac{\partial V}{\partial M}\sum_j\sum_q\left(X_j^i\frac{\partial^2 X_q^k}{\partial x_j\partial x_q} - X_j^k\frac{\partial^2 X_q^i}{\partial x_j\partial x_q}\right),$$

die sich auf

$$- M\frac{\partial V}{\partial M}\sum_j\sum_q\left(X_j^i\frac{\partial^2 X_q^k}{\partial x_j\partial x_q} - X_j^k\frac{\partial^2 X_q^i}{\partial x_j\partial x_q}\right)$$

reduciren.

Nun aber zerlegt sich die Bedingung (11) in die $2n$ folgenden

$$\sum_j\left(X_j^i\frac{\partial X_q^k}{\partial x_j} - X_j^k\frac{\partial X_q^i}{\partial x_j}\right) = 0,$$

woraus durch Differentiation

$$\sum_j\left(X_j^i\frac{\partial^2 X_q^k}{\partial x_j\partial x_q} - X_j^k\frac{\partial^2 X_q^i}{\partial x_j\partial x_q}\right) + \sum_j\left(\frac{\partial X_j^i}{\partial x_q}\frac{\partial X_q^k}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j^k}{\partial x_q}\frac{\partial X_q^i}{\partial x_j}\right) = 0$$

und durch Summation

$$\sum_q\sum_j\left(X_j^i\frac{\partial^2 X_q^k}{\partial x_j\partial x_q} - X_j^k\frac{\partial^2 X_q^i}{\partial x_j\partial x_q}\right) + \sum_q\sum_j\left(\frac{\partial X_j^i}{\partial x_q}\frac{\partial X_q^k}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j^k}{\partial x_q}\frac{\partial X_q^i}{\partial x_j}\right) = 0,$$

oder, da das letzte Glied identisch verschwindet,

$$\sum_q\sum_j\left(X_j^i\frac{\partial^2 X_q^k}{\partial x_j\partial x_q} - X_j^k\frac{\partial^2 X_q^i}{\partial x_i\partial x_q}\right) = 0$$

folgt. Es verschwinden also alle $C_i(C_k(V)) - C_k(C_i(V))$, was wieder heisst, dass die Gleichungen $C_1(V) = 0, \cdots C_r(V) = 0$ gemeinsame Lösungen besitzen. Ist $V$ eine solche, so findet man durch Auflösung der Gleichung

$$V(x_1 \cdots x_n M) = \text{Const.}$$

hinsichtlich $M$ einen gemeinsamen Jacobi'schen Multiplicator der Gleichungen $A_i(f) = 0$.

## § 10.

### Beziehungen zwischen den Lösungen, Multiplicatoren und inf. Transformationen eines vollständigen Systems.

Zwischen den Lösungen, den Multiplicatoren und den infinitesimalen Transformationen eines vollständigen Systems bestehen mehrere merkwürdige Beziehungen, die jetzt entwickelt werden sollen.

22. Zunächst zeigen wir, dass man einen Multiplicator aufstellen kann, wenn man hinlänglich viele infinitesimale Transformationen gefunden hat.

Theorem VIII. *Gestattet ein r-gliedriges vollständiges System mit n unabhängigen Variabeln*

$$A_i(f) = X_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad (i = 1 \cdots r)$$

*n — r bekannte infinitesimale Transformationen*

$$B_k(f) = \xi_1^k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n^k \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (k = 1 \cdots n-r)$$

*und ist die Determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_1^r & \cdots & X_n^r \\ \xi_1^1 & \cdots & \xi_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^{n-r} & \cdots & \xi_n^{n-r} \end{vmatrix}$$

*von Null verschieden, so ist* $\frac{1}{\Delta}$ *ein Multiplicator des vollständigen Systems* $A_i f = 0$.

Zum Beweis multipliciren wir nach der bekannten Regel die beiden Determinanten $\Delta$ und

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_{n-r}} & \cdots & \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Pi_{n-r}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Pi_{n-r}}{\partial x_{n-r}} & \cdots & \frac{\partial \Pi_{n-r}}{\partial x_n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

wo $\Pi_1 \cdots \Pi_{n-r}$ ein System Lösungen des vollständigen Systems $A_i(f) = 0$ bezeichnen, mit einander, und finden so

$$\Delta \begin{pmatrix} \Pi_1 & \cdots & \Pi_{n-r} \\ x_1 & \cdots & x_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_1(\Pi_1) & \cdots & A_r(\Pi_1) & B_1(\Pi_1) & \cdots & B_{n-r}(\Pi_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1(\Pi_{n-r}) & \cdots & A_r(\Pi_{n-r}) & B_1(\Pi_{n-r}) & \cdots & B_{n-r}(\Pi_{n-r}) \\ X_{n-r+1}^1 & \cdots & X_{n-r+1}^r & \xi_{n-r+1}^1 & \cdots & \xi_{n-r+1}^{n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_n^1 & \cdots & X_n^r & \xi_n^1 & \cdots & \xi_n^{n-r} \end{vmatrix},$$

oder da alle $A_i(\Pi_k)$ gleich Null sind

$$\Delta \cdot \begin{pmatrix} \Pi_1 \cdots \Pi_{n-r} \\ x_1 \cdots x_{n-r} \end{pmatrix} = - \begin{vmatrix} B_1(\Pi_1) & \cdots B_{n-r}(\Pi_1) \\ \cdots & \cdots \\ B_1(\Pi_{n-r}) & \cdots B_{n-r}(\Pi_{n-r}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_{n-r+1}^1 & \cdots X_{n-r+1}^r \\ \cdots & \cdots \\ X_n^1 & \cdots X_n^r \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt, da alle $B_i(\Pi_k)$ Functionen der Lösungen $\Pi_1 \cdots \Pi_{n-r}$ sind, eine Gleichung der Form

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 \cdots \Pi_{n-r} \\ x_1 \cdots x_{n-r} \end{pmatrix} : \begin{vmatrix} X_{n-r+1}^1 & \cdots X_{n-r+1}^r \\ \cdots & \cdots \\ X_n^1 & \cdots X_n^r \end{vmatrix} = \frac{\Omega(\Pi_1 \cdots \Pi_{n-r})}{\Delta}.$$

Und da hier die linke Seite der allgemeine Ausdruck eines Multiplicators ist, so muss auch $\frac{1}{\Delta}$ ein Multiplicator sein, wie behauptet wurde.

**22.** Kennt man andererseits einen Multiplicator und eine infinitesimale Transformation eines vollständigen Systems, so ist es im Allgemeinen möglich eine Lösung des Systems aufzustellen. Hierzu brauchen wir den Satz:

Satz 16. *Sei $M$ ein Multiplicator und*

$$B(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

*eine inf. Transformation des vollständigen Systems $A_i(f) = 0$, so dass*

$$B(A_i(f)) - A_i(B(f)) = \lambda_{i1} A_1(f) + \cdots + \lambda_{ir} A_r(f)$$

*ist. Setzt man nun voraus, dass das vollständige System auf eine solche Form gebracht ist, dass alle $A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f))$ identisch verschwinden, so ist*

$$B(\log M) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=r} \lambda_{\alpha\alpha}$$

*entweder eine Constante oder aber eine Lösung des vollständigen Systems.*

Zum Beweis differentiiren wir die Gleichung

$$\sum_q \left( \xi_q \frac{\partial X_j^i}{\partial x_q} - X_q^i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_q} \right) = \lambda_{i1} X_j^1 + \cdots + \lambda_{ir} X_j^r$$

nach $x_j$, und summiren sodann nach $j$. Dies giebt, wenn wir die sich aufhebenden Glieder weglassen

$$\sum_j \sum_q \left( \xi_q \frac{\partial^2 X_j^i}{\partial x_q \partial x_j} - X_q^i \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_q \partial x_j} \right) = A_1(\lambda_{i1}) + \cdots + A_r(\lambda_{ir}) + \lambda_{i1} \sum_j \frac{\partial X_j^1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_{ir} \sum_j \frac{\partial X_j^r}{\partial x_j}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$B\left(\sum_j \frac{\partial X_j^i}{\partial x_j}\right) - A_i\left(\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}\right) = A_1(\lambda_{i1}) + \cdots + A_r(\lambda_{ir}) + \lambda_{i1}\sum_j \frac{\partial X_j^1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_{ir}\sum_j \frac{\partial X_j^r}{\partial x_j}.$$

Nun aber ist

$$\sum_j \frac{\partial X_j^i}{\partial x_j} = -A_i(\log M)^*),$$

also folgt

$$-B(A_i(\log M)) - A_i\left(\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}\right) = A_1(\lambda_{i1}) + \cdots + A_r(\lambda_{ir}) - \lambda_{i1}A_1(\log M) - \cdots - \lambda_{ir}A_r(\log M),$$

und wenn wir die Gleichung

$$B(A_i(f)) - A_i(B(f)) = \lambda_{i1}A_1 f + \cdots + \lambda_{ir}A_r f$$

berücksichtigen,

$$(12)\quad -A_i(B(\log M)) - A_i\left(\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}\right) = A_1(\lambda_{i1}) + \cdots + A_r(\lambda_{ir}).$$

Um diese Gleichung noch weiter zu transformiren, bilden wir die Jacobi'sche Identität

$$((A_iA_j)B) + ((A_jB)A_i) + ((BA_i)A_j) = 0.$$

Diese ergiebt, wenn wir die Werthe der Grössen $(A_iA_j)$ $(A_jB)$ und $(BA_i)$ einsetzen,

$$-(\lambda_{j1}A_1 + \cdots + \lambda_{jr}A_r,\ A_i) + (\lambda_{i1}A_1 + \cdots + \lambda_{ir}A_r,\ A_j) = 0,$$

und durch Ausführung

$$[A_j(\lambda_{i1}) - A_i(\lambda_{j1})]A_1 + \cdots + [A_j(\lambda_{ir}) - A_i(\lambda_{jr})]A_r = 0,$$

welche Gleichung sich wegen der Unabhängigkeit der Grössen $A_1(f)$ $\cdots$ $A_r(f)$ in die $r$ folgenden zerlegt

$$A_j(\lambda_{i1}) = A_i(\lambda_{j1}),\ \cdots\ A_j(\lambda_{ir}) = A_i(\lambda_{jr}).$$

Setzen wir diese Werthe in (12) ein, so kommt

$$-A_i[B(\log M) + \sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} + \lambda_{11} + \lambda_{22} + \cdots + \lambda_{rr}] = 0,$$

welche Gleichung die Richtigkeit unseres Satzes nachweist.

*) Erst während des Druckes bin ich von Mayer darauf aufmerksam gemacht worden, dass diese Formel, die hier direct auf den Multiplicator des vollständigen Systems $A_i(f) = 0$ angewandt wird, zunächst nur für den gemeinsamen Jacobi'schen Multiplicator der Gleichungen $A_i(f) = 0$ gilt, dass aber unter den Voraussetzungen $(A_iA_k) = 0$ in der That diese beiden Begriffe zusammenfallen. Bei der Redaction des Textes dachte ich mir das gegebene System durch Auflösung nach $r$ Differentialquotienten auf diejenige Form gebracht, für welche die Identität beider Multiplicatoren in Nr. 20 nachgewiesen wurde.

**24.** Wir setzen jetzt voraus, dass wir vermöge des Theorems VIII. einen Multiplicator gefunden haben, und stellen die Frage, ob wir vermöge des eben aufgestellten Satzes eine oder mehrere Lösungen unseres vollständigen Systems bestimmen können. Um diese Frage allgemein behandeln zu können, entwickeln wir zunächst einen Hülfssatz.

Satz 17. *Sind die n Grössen* $A_1(f), \cdots A_n(f)$,

$$A_i(f) = X_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

*durch die Relationen*

$$(13) \quad A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = \lambda_{ik}^1 A_1(f) + \cdots + \lambda_{ik}^n A_n(f)$$

*verbunden, und ist dabei die Determinante*

$$\Delta = (X_1^1 X_2^2 \cdots X_n^n)$$

*von Null verschieden, so ist*

$$A_i(\log\Delta) - \sum_j \frac{\partial X_j^i}{\partial x_j} = \lambda_{i1}^1 + \cdots + \lambda_{i,i-1}^{i-1} + \lambda_{i,i+1}^{i+1} + \cdots + \lambda_{in}^n.$$

Beweis. Setzen wir

$$\Delta_i^k = \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_1^{k-1} & \cdots & X_n^{k-1} \\ A_i(X_1^k) & \cdots & A_i(X_n^k) \\ X_1^{k+1} & \cdots & X_n^{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_1^n & \cdots & X_n^n \end{vmatrix},$$

so ist

$$A_i(\Delta) = \Delta_i^1 + \Delta_i^2 + \cdots + \Delta_i^n = \sum_k \Delta_i^k.$$

Aus (13) aber folgt:

$$A_i(X_q^k) = A_k(X_q^i) + \lambda_{ik}^1 X_q^1 + \cdots + \lambda_{ik}^n X_q^n.$$

Setzen wir daher

$$D_i^k = \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_1^{k-1} & \cdots & X_n^{k-1} \\ A_k(X_1^i) & \cdots & A_k(X_n^i) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_1^n & \cdots & X_n^n \end{vmatrix},$$

so erhalten wir:

$$\Delta_i^k = D_i^k + \lambda_{ik}^k \Delta$$

und folglich

$$A_i(\Delta) = \sum_k D_i^k + \Delta \sum_k \lambda_{ik}^k.$$

Bezeichnen wir aber für einen Augenblick die Unterdeterminante von $\Delta$ hinsichtlich $X_q^k$ durch $(X_q^k)$, so haben wir:

$$D_i^k = \sum_j \sum_q \frac{\partial X_j^i}{\partial x_q} X_q^k (X_j^k),$$

also

$$\sum_k D_i^k = \sum_k \sum_j \sum_q \frac{\partial X_j^i}{\partial x_q} X_q^k (X_j^k) = \sum_j \sum_q \frac{\partial X_j^i}{\partial x_q} \sum_k X_q^k (X_j^k),$$

woraus, da $\sum_k X_j^k (X_j^k) = \Delta$ und $\sum_k X_q^k (X_j^k) = 0$ ist,

$$\sum_k D_i^k = \Delta \sum_j \frac{\partial X_j^i}{\partial x_j}$$

und also

$$A_i(\Delta) = \Delta \sum_j \frac{\partial X_j^i}{\partial x_j} + \Delta \sum_k \lambda_{ik}^k,$$

oder

$$A_i(\log \Delta) = \sum_j \frac{\partial X_j^i}{\partial x_j} + \sum_k \lambda_{ik}^k$$

folgt, womit unser Satz bewiesen ist.

Satz 18. *Sei* $A_1(f) = 0, \cdots A_r(f) = 0$, *wo*

$$A_i(f) = X_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} \text{ und } (A_i A_k) = 0$$

*ist, ein gegebenes vollständiges System mit* $n - r$ *bekannten infinitesimalen Transformationen*

$$B_k(f) = \xi_1^k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n^k \frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad k = 1, \cdots n - r.$$

*Bestimmt man dann vermöge des Theorems VIII. einen Multiplicator, so giebt die Anwendung des Satzes* 16. *nur solche Lösungen, die man einfacher durch Theorem VII. erhält.*

Beweis. Setze ich wie gewöhnlich

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1^1 & \cdots & X_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_1^r & \cdots & X_n^r \\ \xi_1^1 & \cdots & \xi_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^{n-r} & \cdots & \xi_n^{n-r} \end{vmatrix},$$

so ist $M = \frac{1}{\Delta}$ ein Multiplicator; setze ich ferner

$$B_k(A_i(f)) - A_i(B_k(f)) = \lambda_{ki}^1 A_1 f + \cdots + \lambda_{ki}^r A_r f,$$

so ist (Satz 16) der Ausdruck

$$B_k(\log M) + \sum_j \frac{\partial \xi_j^k}{\partial x_j} + \lambda_{k1}^1 + \cdots + \lambda_{kr}^r$$

entweder eine Constante oder eine Lösung des vollständigen Systems.

Der vorangehende Satz erlaubt diesen Ausdruck auf eine andere Form zu bringen. Da nämlich $\Delta$ von Null verschieden ist, und also die Grössen $A_1(f), \cdots A_r(f), B_1(f), \cdots B_{n-r}(f)$ unabhängig sind, so müssen Relationen der Form bestehen:

$$(B_k B_q) = \mu_{kq}^1 B_1(f) + \cdots + \mu_{kq}^{n-r} B_{n-r}(f) + \sum_j \nu_j A_j(f).$$

Folglich ist nach dem vorangehenden Satze

$$B_k(\log \Delta) = \sum_j \frac{\partial \xi_j^k}{\partial x_j} + \lambda_{k1}^1 + \cdots + \lambda_{kr}^r + \mu_{k1}^1 + \cdots + \mu_{k,n-r}^{n-r},$$

und da $M = \frac{1}{\Delta}$ ist, folgt

$$B_k(\log M) + \sum_j \frac{\partial \xi_j^k}{\partial x_j} + \lambda_{k1}^1 + \cdots + \lambda_{kr}^r = -(\mu_{k1}^1 + \cdots + \mu_{k,n-r}^{n-r}).$$

In unserem Falle lehrt also Satz 16. nur, dass der Ausdruck

$$\mu_{k1}^1 + \cdots + \mu_{k,n-r}^{n-r}$$

entweder eine Constante oder eine Lösung unseres vollständigen Systems ist. Und da nach Theorem VII. *eine jede* der Grössen $\mu_{kq}^i$ eine Lösung ist, so giebt Satz 16. wirklich keine neue Lösung.

Nichts destoweniger haben die Sätze 16., 17. eine bedeutende Wichtigkeit, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde.

## § 11.

## Durchführung der Theorie für drei Variabeln.

In diesem Paragraphen zeige ich, indem ich mich auf vollständige Systeme zwischen *drei* unabhängigen Variabeln beschränke, wie man verfahren muss, um den grössten Vortheil aus bekannten infinitesimalen Transformationen zu ziehen.

### I.

**25.** Ist unser vollständiges System zweigliedrig:

$$A_1(f) = X_1 \frac{\partial f}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + Z_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$A_2(f) = X_2 \frac{\partial f}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial f}{\partial y} + Z_2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

so bildet man, wenn *eine* infinitesimale Transformation desselben

$$B(f) = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

bekannt ist, die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix};$$

alsdann ist $\frac{1}{\Delta}$ ein Multiplicator des vollständigen Systems und gleichzeitig ein Integrabilitätsfactor der totalen Gleichung

$$(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1)\,dx + (Z_1 X_2 - Z_2 X_1)\,dy + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)\,dz = 0,$$

deren Integral

$$\Pi = \int \frac{1}{\Delta} \{(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1)dx + (Z_1 X_2 - Z_2 X_1)dy + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)dz\}$$

die gesuchte Lösung des vollständigen Systems ist.

Kennt man *zwei* infinitesimale Transformationen $B_1(f)$ und $B_2(f)$ des vorgelegten Systems, so bildet man die lineare Relation

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 = 0$$

die selbstverständlicherweise zwischen den $A$ und den $B$ bestehen muss; ist nun das Verhältniss $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ keine Constante, so ist es nach Theorem VII. die gesuchte Lösung, die sich somit in diesem Falle ohne Integration bestimmen lässt. — Im Uebrigen könnte man auch vermöge jeder inf. Transformationen einen Integrabilitätsfactor bilden, dann ist das Verhältniss derselben

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}$$

bekanntlich eine Lösung. Es ist selbstverständlich, und man verificirt es auch leicht, dass man in dieser Weise eben die früher aufgestellte Lösung wiederfindet.

Ist dagegen $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ eine Constante, so ist es unmöglich, einen grösseren Vortheil aus den beiden inf. Transformationen als aus der einen zu ziehen. In diesem Falle muss man die beiden Transformationen als wesentlich identisch auffassen.

Gestattet überhaupt ein vollständiges System

$$A_1(f) = 0, \cdots A_r(f) = 0$$

die infinitesimale Transformation $B(f)$, so gestattet es zugleich, wie man unmittelbar verificirt, eine jede Transformation der Form

$$C(f) = \text{Const. } B(f) + \lambda_1 A_1(f) + \cdots + \lambda_r A_r(f),$$

wo die $\lambda$ beliebige Functionen der unabhängigen Variabeln sind.

## II.

**26.** Sei jetzt unser vollständiges System eingliedrig

$$A(f) = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Kennt man nur eine infinitesimale Transformation von $A(f) = 0$, etwa

$$B(f) = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z},$$

so verlangt die Integration von $A(f) = 0$, wie wir jetzt zeigen, die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. O. zwischen zwei Variabeln und eine Quadratur. Die beiden Gleichungen

$$A(f) = 0, \quad B(f) = 0$$

bilden nämlich ein vollständiges System, dessen Lösung $\Pi$ durch die Integration einer Differentialgleichung 1. O. gefunden wird. Sodann führt man $x$, $y$ und $\Pi$ als neue Variabeln ein, und bringt dadurch $A(f)$ und $B(f)$ auf die Form

$$A'(f) = X'\frac{\partial f}{\partial x} + Y'\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$B'(f) = \xi'\frac{\partial f}{\partial x} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y},$$

wobei die Gleichung $A'(f) = 0$ selbstverständlicherweise die inf. Transformation $B'(f)$ gestattet; also ist

$$\Phi = \int^{\cdot} \frac{1}{X'\eta' - Y'\xi'}(Y'dx - X'dy)$$

eine Lösung von $A'(f) = 0$ und also auch von $A(f) = 0$, deren Integration hiermit geleistet ist.

## III.

**27.** Jetzt behandeln wir den wichtigen Fall, dass $A(f) = 0$ zwei bekannte inf. Transformationen $B_1(f)$ und $B_2(f)$ gestattet, und dass dabei keine lineare Relation zwischen $A$, $B_1$ und $B_2$ stattfindet.

Man bildet in diesem Falle den Ausdruck $(B_1 B_2)$, der sich nothwendigerweise linear durch $A$, $B_1$ und $B_2$ ausdrückt:

$$(B_1 B_2) = \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \lambda A = B_3.$$

Hier sind $\mu_1$ und $\mu_2$ entweder Constanten oder auch Lösungen von $A(f) = 0$. Findet man hierdurch oder durch Bildung von $(B_1 B_3)$ und $(B_2 B_3)$ zwei verschiedene Lösungen, so ist das Integrationsgeschäft abgeschlossen. Findet man nur eine Lösung $\Pi_1$, so bildet man vermöge $B_1(f)$ und $B_2(f)$ den Multiplicator $\frac{1}{\Delta}$; alsdann verlangt die Bestimmung einer weiteren Lösung, wie Jacobi gezeigt hat, nur eine

Quadratur. Zu diesem Zwecke hat man die Grössen $x$, $y$ und $\Pi$ als unabhängige Variabeln einzuführen, wodurch $A(f) = 0$ die Form

$$A'(f) = X' \frac{\partial f}{\partial x} + Y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

annimmt. Man bestimmt sodann nach Jacobi's Regel den Integrabilitätsfactor der reducirten Gleichung $A'(f) = 0$ und findet hierauf eine Lösung derselben durch eine Quadratur.

Sind endlich sowohl $\mu_1$ wie $\mu_2$ Constanten, so giebt es keine Lösung von $A(f) = 0$, die sich ohne Quadratur aufstellen lässt. Dann verfährt man verschieden, jenachdem die Constanten $\mu_1$ und $\mu_2$ beide gleich Null sind, oder wenigstens eine von Null verschieden ist.

a) Sind $\mu_1$ und $\mu_2$ beide gleich Null, so ist

$$A(f) = 0, \quad B_1(f) = 0$$

ein vollständiges System mit einer bekannten infinitesimalen Transformation $B_2$; die gemeinsame Lösung ist

$$\Pi_1 = \int \frac{1}{\Delta} [(Z\eta_1 - Y\zeta_1)\, dx + \cdots].$$

Ebenso ist

$$A(f) = 0, \quad B_2(f) = 0$$

ein vollständiges System mit der inf. Transformation $B_1(f)$ und der Lösung

$$\Pi_2 = \int \frac{1}{\Delta} [(Z\eta_2 - Y\zeta_2)\, dx + \cdots].$$

Hiermit sind zwei Lösungen von $A(f) = 0$ gefunden; dabei bemerken wir, dass es gleichgültig ist, in welcher Ordnung diese beiden Quadraturen ausgeführt werden.

b) Sei jetzt jedenfalls eine der beiden Grössen $\mu$, etwa $\mu_2$ von Null verschieden. Alsdann setze ich

$$\mu_1 B_1(f) + \mu_2 B_2(f) = B(f)$$

und ersetze die beiden Transformationen $B_1$ und $B_2$ durch $B$ und $B_1$. Man findet

$$(B_1 B) = \mu_2 B(f) + \mu_2 \lambda A(f).$$

Folglich ist

$$A(f) = 0, \quad B(f) = 0$$

ein vollständiges System mit einer bekannten infinitesimalen Transformation $B_1(f)$. Also findet man die Lösung $\Pi_1$ dieses Systems durch eine Quadratur. Führt man darnach $x$, $y$ und $\Pi_1$ als unabhängige Variabeln sein, so erhält man an Stelle von $A(f) = 0$ eine äquivalente Gleichung

$$A'(f) = 0 = X' \frac{\partial f}{\partial x} + Y' \frac{\partial f}{\partial y}$$

mit einer bekannten inf. Transformation $B'(f)$, und findet also die Lösung $\Pi_2$ von $A'(f) = 0$ durch eine zweite Quadratur. Hiermit sind zwei Lösungen von $A(f) = 0$, nämlich $\Pi_1$ und $\Pi_2$ gefunden. Dabei ist zu bemerken, dass es in diesem Falle nur eine einzige Lösung, $\Pi_1$ nämlich, giebt, die sich durch *eine* Quadratur bestimmen lässt. Um $\Pi_2$ zu finden muss man dagegen *zwei* Quadraturen ausführen.

## IV.

**28.** Kennt man zwei infinitesimale Transformationen $B_1(f)$ und $B_2(f)$ von $A(f) = 0$ und besteht dabei eine lineare Relation

$$\alpha A(f) + \beta_1 B_1(f) + \beta_2 B_2(f) = 0,$$

so ist $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ eine Lösung von $A(f)=0$. Ich bilde den Ausdruck $(B_1 B_2)$, der sich immer linear durch $A(f)$ und $B_1(f)$ ausdrücken lässt:

$$(B_1 B_2) = \delta B_1(f) + \varepsilon A(f).$$

Ist $\delta$ keine Constante oder keine Function der früher gefundenen Lösung $\frac{\beta_1}{\beta_2}$, so ist hiermit eine zweite Lösung gefunden, womit Alles fertig ist. Im entgegengesetzen Falle muss man $x$, $y$ und $\frac{\beta_1}{\beta_2} = \omega$ als neue Variabeln einführen. Hierdurch nimmt $A(f) = 0$ die Form

$$A'(f) = X' \frac{\partial f}{\partial x} + Y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

an und die inf. Transformationen, von denen wir nur die eine zu berücksichtigen brauchen, erhalten die Form

$$B'(f) = \xi' \frac{\partial f}{\partial x} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi(\omega) \frac{\partial f}{\partial \omega}.$$

Ist $\varphi$ von Null verschieden, so lässt sich kein weiterer Vortheil aus den inf. Transformationen ziehen. Ist dagegen $\varphi = 0$, so stellt man den Integrabilitätsfactor von $A'(f) = 0$ auf, und findet sodann die fehlende Lösung durch eine Quadratur.

Aus dem Obenstehenden fliesst u. A. der Satz:

Satz 19. *Gestattet die Gleichung*

$$A(f) = X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

*zwei bekannte inf. Transformationen $B_1(f)$ und $B_2(f)$, die keine lineare Relation der Form*

$$\alpha A + \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 = 0$$

*erfüllen, so kann die Integration von $A(f) = 0$ immer vermöge blosser Quadraturen geleistet werden.*

## § 12.

## Behandlung einiger speciellen Fälle.

Eine allgemeine Integrationstheorie eines $r$-gliedrigen vollständigen Systems

$$A_1(f) = 0, \cdots A_r(f) = 0$$

mit $n$ unabhängigen Variabeln und mit $n-r$ bekannten inf. Transformationen

$$B_1(f), \cdots B_{n-r}(f),$$

die keine lineare Relation

$$\sum \alpha A(f) + \sum \beta B(f) = 0$$

erfüllen, lässt sich erst dann geben, wenn die Theorie der Transformationsgruppen weiter entwickelt worden ist.

Hier werde ich nur einen allgemeinen Fall angeben, der sich vermöge $n-r$ Quadraturen erledigen lässt. Zuerst betrachte ich einen Unterfall.

### I.

**29.** Sind die inf. Transformationen durch Relationen der Form

$$(B_i B_k) = \sum \alpha_{ik,s} A_s(f).$$

verbunden, so bilden die Gleichungen

$$A_1(f) = 0, \cdots A_r(f) = 0, \quad B_1(f) = 0, \cdots B_{k-1}(f) = 0, \quad B_{k+1}(f) = 0, \cdots B_{n-r}(f) = 0$$

ein vollständiges System mit einer bekannten inf. Transformation $B_k(f)$. Man stellt den Multiplicator $\frac{1}{\Delta}$ dieses $(n-1)$-gliedrigen Systems auf, und findet sodann vermöge einer Quadratur eine Lösung $\Pi_k$ desselben, die eo ipso die Gleichungen $A_i(f)=0$ befriedigt. Lässt man $k$ successiv die Werthe 1, 2, $\cdots n-r$ annehmen, so erhält man auf diese Weise $n-r$ von einander unabhängige Lösungen

$$\Pi_1 \Pi_2 \cdots \Pi_{n-r},$$

und hat damit also die Integration des vorgelegten $r$-gliedrigen Systems vermöge $n-r$ Quadraturen absolvirt. *In diesem Falle giebt es offenbar $n-r$ von einander unabhängige Lösungen, deren jede durch eine Quadratur bestimmt wird.*

### II.

**30.** Es bestehen jetzt Relationen der Form

$$(B_i B_k) = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=k-1} \beta_{ik}^{\varrho} B_\varrho(f) + \sum \alpha_{ik}^{s} A_s(f),$$

wo $\beta_{ik}^{\varrho} = \text{const.}$ und $i$ und $k$ der Beschränkung

$$i < k$$

unterworfen sind. Auch in diesem Falle, der offenbar den soeben erledigten umfasst, ist es möglich, das Integrationsgeschäft vermöge $n-r$ successiver Quadraturen zu erledigen.

Man bildet zunächst das vollständige System

$$A_1(f) = 0, \cdots A_r(f) = 0, \quad B_1(f) = 0, \cdots B_{n-r-1}(f) = 0$$

mit der bekannten inf. Transformation $B_{n-r}f$, bestimmt den Multiplicator $\frac{1}{\Delta}$ und findet durch eine Quadratur eine gemeinsame Lösung $\Pi_1$ der aufgestellten $n-1$ Gleichungen. Sodann führt man $x_1 \cdots x_{n-1}$ und $\Pi_1$ als neue unabhängige Variabeln ein und bringt hierdurch die $A_k(f)$ und $B_1(f) \cdots B_{n-r-1}(f)$ auf die Form

$$A_k'(f) = X_{k1}' \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_{k,n-1}' \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = 0,$$

$$B_k'(f) = \xi_{k1}' \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_{k,n-1}' \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}},$$

wobei die $A_k'(f)$ und $B_i'(f)$ durch dieselben Relationen wie die entsprechenden Grössen $A_k(f)$ und $B_i(f)$ verbunden sind. Also ist

$$A_1'(f) = 0, \cdots A_r'(f) = 0, \quad B_1'(f) = 0, \cdots B_{n-r-2}'(f) = 0$$

ein vollständiges System mit einer bekannten inf. Transformation $B_{n-r-1}'(f)$; daher finden wir die gemeinsame Lösung $\Pi_2$ dieser $n-2$ Gleichungen durch eine Quadratur. Indem man in dieser Weise fortfährt, findet man successiv alle $n-r$ Lösungen der Gleichungen $A_i(f) = 0$ vermöge $n-r$ Quadraturen.

In diesem Falle giebt es im Allgemeinen nur *eine* Lösung, deren Bestimmung nur eine Quadratur verlangt.

**31.** Bis jetzt ist es mir noch nicht gelungen, das allgemeine im Anfange dieses Paragraphen aufgestellte Problem durch Quadraturen zu erledigen. Und ich vermuthe sogar, dass eine solche Erledigung nicht allgemein möglich ist. Dagegen kann man in jedem speciellen Falle das allgemeine Integrationsproblem in mehrere einfachere zerlegen. Bei einer anderen Gelegenheit werde ich diese Andeutung ausführen. Ein besonderes Interesse bietet die Anwendung dieser Theorie auf gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen zwei Variabeln mit mehreren bekannten infinitesimalen Berührungstransformationen.

Ist $n - r = 3$, so kann entweder das betreffende Problem auf den in diesem Paragraphen betrachteten Fall reducirt, und somit durch Quadratur erledigt werden, oder aber es kann die folgende Gestalt erhalten. Die Gleichung

$$A(f) = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + X_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$$

soll integrirt werden, und man kennt 3 inf. Transformationen derselben $B_1(f)$, $B_2(f)$ und $B_3(f)$, die durch Relationen der Form

$$(B_1 B_2) = B_1 + \lambda A,$$
$$(B_1 B_3) = B_2 + \mu A,$$
$$(B_2 B_3) = B_3 + \nu A$$

verbunden sind. Diesen speciellen Fall habe ich nicht durch Quadraturen zu erledigen vermocht. Dagegegen kann man ihn, indem man nur die Transformationen $B_1$ und $B_2$ berücksichtigt, durch die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. O. zwischen zwei Variabeln erledigen. Wie dies geschieht, ist in dem Vorangehenden angegeben.

Den Fall $n - r = 4$ kann ich immer auf den Fall $n - r = 3$ reduciren, und daher ist höchstens die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. O. zwischen 2 Variabeln nothwendig.

Der Fall $n - r = 5$ verlangt im ungünstigsten Falle die successive Integration zweier Differentialgleichungen 1. O. u. s. w.

## § 13.

## Directe Bestimmung der letzten Lösung der Gleichung $(f_1 f) = 0$.

**32.** Jacobi hat bekanntlich gezeigt, dass die letzte Lösung der Gleichung $(f_1 f) = 0$ vermöge einer Quadratur gefunden werden kann. So schön und überraschend dieser Satz auch ist, und so grossartig die analytischen Hülfsmittel sind, vermöge deren Jacobi dieses Resultat erreicht, so kann man doch einen doppelten Einwurf gegen seine Begründung dieser Theorie machen. Einerseits kann man nämlich einwenden, dass sie nicht direct ist, andererseits lässt sich nicht läugnen, dass sie die Sache mehr complicirt, als nothwendig ist.

Im ersten Abschnitte (Paragraph 2.) habe ich eine neue und äusserst einfache Begründung dieser Jacobi'schen Theorie als Corollar aus einer allgemeineren Theorie gezogen. Handelt es sich darum die Gleichung $f_1 = \alpha_1$ zu integriren, so glaube ich behaupten zu können, dass meine Behandlung, die übrigens auch eine Quadratur erspart, sich nicht wesentlich verbessern lässt. Wünscht man dagegen nur zu beweisen, dass sich die letzte Lösung der Gleichung $f_1 = \alpha_1$ durch Quadraturen leisten lässt, so kann man vielleicht auch gegen meine Bestimmung den Einwurf machen, dass sie nicht direct ist. Daher werde ich in diesem Paragraphen eine directe und zugleich einfache Bestimmung der letzten Lösung der Gleichung $(f_1 f) = 0$ geben. Dabei stütze ich mich einerseits auf meinen Satz über die Aequivalenz zwischen einer infinitesimalen Transformation und einem Integrabilitätsfactor einer gewöhn-

lichen Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln. Andererseits setze ich das Poisson-Jacobi'sche Theorem als bekannt voraus.

**33.** Sei vorgelegt die Gleichung

$$f_1(x_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n) = \alpha_1$$

und seien $f_1 f_2 \cdots f_{2n-2}$ bekannte Lösungen der Gleichung

$$(f_1 f) = 0$$

aus denen sich keine weiteren Lösungen durch Anwendung der Poisson-Jacobi'schen Theorems herleiten lassen.

Setze ich nun

$$(f_1 f) = A(f) = 0$$

und

$$(f_2 f) = B_2(f), \cdots (f_{2n-2} f) = B_{2n-2}(f),$$

so sind, wenn ich mit $f_0$ eine beliebige Lösung von $A(f) = 0$ bezeichne, auch die Grössen $B_2(f_0), \cdots B_{2n-2}(f_0)$ Lösungen. Wende ich daher die im Anfange dieses Abschnittes eingeführte Terminologie an, so kann ich sagen, dass ich einerseits $2n-2$ Lösungen $f_1 \cdots f_{2n-2}$ von $A(f)=0$, und andererseits $2n-3$ inf. Transformationen $B_2(f), \cdots B_{2n-2}(f)$ dieser Gleichung kenne.

Statt $x_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n$ führe ich neue unabhängige Variabeln ein, nämlich $f_1 f_2 \cdots f_{2n-2}$ zusammen mit zwei weiteren Grössen $u_1$ und $u_2$. Hierdurch wird

$$\begin{aligned}
A(f) &= (f_1 u_1)\frac{\partial f}{\partial u_1} + (f_1 u_2)\frac{\partial f}{\partial u_2} = 0,\\
B_2(f) &= (f_2 u_1)\frac{\partial f}{\partial u_1} + (f_2 u_2)\frac{\partial f}{\partial u_2} + (f_2 f_1)\frac{\partial f}{\partial f_1} + \cdots + (f_2 f_{2n-2})\frac{\partial f}{\partial f_{2n-2}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
B_{2n-2}(f) &= (f_{2n-2} u_1)\frac{\partial f}{\partial u_1} + (f_{2n-2} u_2)\frac{\partial f}{\partial u_2} + (f_{2n-2} f_1)\frac{\partial f}{\partial f_1} + \cdots + (f_{2n-2} f_{2n-2})\frac{\partial f}{\partial f_{2n-2}}.
\end{aligned}$$

Setze ich sodann, indem ich unter $\varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_{2n-2}$ beliebige Functionen von $f_1 f_2 \cdots f_{2n-2}$ verstehe

$$C(f) = \varphi_2 B_2(f) + \cdots + \varphi_{2n-2} B_{2n-2}(f),$$

so ist klar, dass $C(f)$ immer eine infinitesimale Transformation darstellt, die $A(f) = 0$ in sich selbst überführt. Es fragt sich, ob die $\varphi_k$ derart gewählt werden können, dass der analytische Ausdruck von $C(f)$ nur die Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial u_2}$, dagegen keine von den Grössen

$$\frac{\partial f}{\partial f_1}\ \frac{\partial f}{\partial f_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial f_{2n-2}}$$

enthält. Diese Frage kommt darauf hinaus, ob die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\varphi_2(f_2f_1) \quad + \varphi_3(f_3f_1) \quad + \cdots + \varphi_{2n-2}(f_{2n-2}f_1) \quad = 0,\\
&\varphi_2(f_2f_2) \quad + \varphi_3(f_3f_2) \quad + \cdots + \varphi_{2n-2}(f_{2n-2}f_2) \quad = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots

unmittelbar wesentliche Vereinfachungen in der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. bewirkt. Hinterher fand ich, dass es noch einfacher ist, diese neuen Entdeckungen, wie ich dies im ersten Abschnitte dieser Abhandlung gethan habe, unabhängig von der Theorie der infinitesimalen Transformationen darzustellen. Nichtsdestoweniger halte ich es für richtig, diese Resultate zugleich auf dem Wege herzuleiten, auf dem sie zuerst gefunden wurden. Allerdings wird der aufmerksame Leser bemerken, dass die Darstellung des ersten Abschnittes nicht allein in formeller, sondern auch in reeller Rücksicht besser als die nun folgende ist. So z. B. giebt meine Theorie der inf. Transformationen allerdings den allgemeinsten Fall, in dem man die fehlenden Lösungen des Systems

$$(f_1 f) = 0, \quad \cdots \quad (f_q f) = 0, \quad \text{wo } (f_i f_k) = 0$$

durch Quadraturen bestimmen kann. Dagegen lehrt sie nicht unmittelbar, dass hierzu nur *eine* Quadratur erforderlich ist.

**35.** Sei

$$f_1 = \alpha_1, \quad \cdots \quad f_q = \alpha_q$$

ein vorgelegtes Involutionssystem und seien $\varphi_{q+1} \cdots \varphi_r$ bekannte, von einander und von $f_1 \cdots f_q$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems

$$(f_1 \varphi) = 0, \quad \cdots \quad (f_q \varphi) = 0, \quad \text{wo } (f_i f_k) = 0.$$

Setzen wir nun

$$(f_k \varphi) = A_k(\varphi), \quad (\varphi_k \varphi) = B_k(\varphi)$$

und bezeichnen für einen Augenblick eine beliebige Lösung der Gleichungen $A_k(\varphi) = 0$ mit $\varphi^0$, so werden auch sämmtliche Grössen $B_k(\varphi^0)$ Lösungen der Gleichungen $A_k(\varphi) = 0$. Wir kennen daher, können wir sagen, nicht allein $r$ Lösungen $f_1 \cdots f_q \, \varphi_{q+1} \cdots \varphi_r$ des vollständigen Systems $A_k(\varphi) = 0$, sondern auch $r - q$ infinitesimale Transformationen $B_{q+1}(\varphi) \cdots B_r(\varphi)$, die unser vollständiges System invariant lassen.

In diesem Abschnitte haben wir nun gelehrt, den Umstand, dass gleichzeitig gewisse Lösungen und gewisse inf. Transformationen eines zur Integration vorgelegten vollständigen Systems bekannt sind, zu verwerthen. Wir werden den aufgestellten Regeln folgen.

Zuerst sollen wir (§ 8. n. 16.) versuchen durch ausführbare Operationen weitere Lösungen und weitere inf. Transformationen unseres Systems aufzustellen. Zu diesem Zwecke haben wir die Ausdrücke $B_k(\varphi_i)$ und $B_i(B_k(\varphi)) - B_k(B_i(\varphi))$, die bez. Lösungen und inf. Transformationen unseres vollständigen Systems darstellen, zu bilden. Es ist

$$B_k(\varphi_i) = (\varphi_k \varphi_i),$$

$$B_i(B_k(\varphi)) - B_k(B_i(\varphi)) = ((\varphi_i \varphi_k) \varphi);$$

dass aber $(\varphi_k \varphi_i)$ eine Lösung ist, lehrt eben das Poisson-Jacobi'sche Theorem. Und dass $((\varphi_i \varphi_k) \varphi)$ eine inf. Transformation unseres

vollständigen Systems darstellt, oder anders ausgesprochen, dass $((\varphi_i \varphi_k)\varphi)$ gleichzeitig mit $\varphi$ eine Lösung darstellt, kommt wiederum darauf hinaus, dass $(\varphi_i \varphi_k)$ eine Lösung ist. Endlich haben wir zu untersuchen, ob Relationen der Form

$$\sum_k \lambda_k (f_k \varphi) + \sum_k \mu_k (\varphi_k \varphi) = 0$$

stattfinden. Wäre dies der Fall, so beständen Functionalrelationen zwischen $f_1 \cdots f_q$ und den Lösungen $\varphi_{q+1} \varphi_{q+2} \cdots$, was indess ausgeschlossen ist. Vorläufig geben also unsere allgemeinen Regeln nur das Poisson-Jacobi'sche Theorem, das übrigens als bekannt vorausgesetzt wurde. Seien $\varphi_{q+1} \cdots \varphi_r \cdots \varphi_s$ diejenigen unabhängigen Lösungen, die wir in dieser Weise erhalten, und seien

$$(\varphi_{q+1} \varphi) = B_{q+1}(\varphi), \cdots (\varphi_s \varphi) = B_s(\varphi)$$

die entsprechenden inf. Transformationen.

Jetzt sollen wir die Grössen

$$f_1 \cdots f_q \varphi_{q+1} \cdots \varphi_s$$

zusammen mit $2n - s$ passend gewählten weiteren Grössen $u_1 \cdots u_{2n-s}$ als unabhängige Variabeln anstatt $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ einführen. Dies giebt

$$A_k(\varphi) = (f_k \varphi) = \sum_i (f_k u_i) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i},$$

$$B_k(\varphi) = (\varphi_k \varphi) = \sum_i (\varphi_k \varphi_i) \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} + \sum_i (\varphi_k u_i) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}.$$

Wir wissen, dass das vollständige System der $A_k(\varphi) = 0$ jede infinitesimale Transformation der allgemeinen Form

$$C(\varphi) = \sum_k \pi_k (f_1 \cdots f_q \ \varphi_{q+1} \cdots \varphi_s) B_k(\varphi)$$

gestattet; und wir sollen versuchen die Grössen $\pi_k$ derart zu wählen, dass der Ausdruck $C(\varphi)$ nur die Differentialquotienten von $\varphi$ hinsichtlich der $u_i$, dagegen keine Differentialquotienten hinsichtlich der $\varphi_i$ enthält. Es fragt sich, ob die $s - q$ Gleichungen

$$(14) \quad \pi_{q+1} (\varphi_{q+1} \varphi_k) + \cdots + \pi_s (\varphi_s \varphi_k) = 0, \quad (k = q+1, \cdots s)$$

befriedigt werden können, ob also die Determinante

$$D = [(\varphi_{q+1} \varphi_{q+1}) \cdots (\varphi_s \varphi_s)]$$

verschwindet, oder von Null verschieden ist.

Setzen wir voraus, dass die Gruppe $f_1 \cdots f_q \ \varphi_{q+1} \cdots \varphi_s$ ausser den $f$ noch $m$ ausgezeichnete Functionen $\Omega_1 \cdots \Omega_m$ enthält, so verschwindet sowohl $D$ wie ihre Unterdeterminanten erster, zweiter $\cdots$ $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, während es jedenfalls eine nicht verschwindende

Unterdeterminante $m^{\text{ter}}$ Ordnung giebt. Und folglich können die Gleichungen (14) befriedigt werden; man kann sogar $m$ Grössen $\pi$, etwa $\pi_{q+1} \cdots \pi_{q+m}$, arbiträr wählen, alsdann drücken sich die übrigen $\pi$ linear durch sie aus:

$$\pi_{q+m+j} = \psi^j_{q+1} \pi_{q+1} + \cdots + \psi^j_{q+m} \pi_{q+m}.$$

Die allgemeinste infinitesimale Transformation $C(\varphi)$ besitzt daher die Form

$$C(\varphi) = \pi_{q+1} C_1(\varphi) + \cdots + \pi_{q+m} C_m(\varphi),$$

wo die $C_k(\varphi)$ ganz bestimmte Grössen, die $\pi_k$ dagegen arbiträre Functionen der $f$ und $\varphi$ bezeichnen. Insbesondere sind $C_1(\varphi), \cdots C_m(\varphi)$ selbst unabhängige inf. Transformationen der verlangten Form, die unser vollständiges System invariant lassen.

Fehlen nun mehr als $m$ Lösungen der Gleichungen $A_k(\varphi) = 0$, so sollen wir nach unseren allgemeinen Regeln das vollständige System

$$A_1(\varphi) = 0, \cdots A_q(\varphi) = 0, \quad C_1(\varphi) = 0, \cdots C_m(\varphi) = 0$$

aufstellen und eine gemeinsame Lösung desselben vermöge einer Operation

$$2n - s - q - m$$

bestimmen. Aus der gefundenen Lösung, verbunden mit den früheren hat man dann eventuell neue Lösungen vermöge des Poisson-Jacobi'schen Theorems zu bestimmen u. s. w. Man wird, wie man sieht, genau zu der in § 3. entwickelten Methode geführt. Wie damals bestimmt man daher successive vermöge der Operationen

$$2n - s - q - m, \quad 2n - s - q - m - 2 \cdots 6, 4, 2$$

eine so grosse Anzahl weiterer Lösungen

$$\varphi_{s+1} \cdots \varphi_t,$$

dass die Gruppe $f_1 \cdots f_q \varphi_{q+1} \cdots \varphi_s \cdots \varphi_t$ $n$-gliedrige Involutionssysteme enhält.

Hiermit hat unser Problem die folgende Gestalt gewonnen: Vorgelegt ist das $q$-gliedrige vollständige System

$$(f_k \varphi) = A_k(\varphi) = 0$$

und man kennt $2n - q - m$ Lösungen $f_1 \cdots f_q \varphi_{q+1} \cdots \varphi_{2n-q-m}$ desselben, die eine Gruppe bilden, welche ausser $f_1 \cdots f_q$ noch $m$ ausgezeichnete Functionen $\Omega_1 \cdots \Omega_m$ enthält. Man kennt zugleich die inf. Transformationen $B_{q+1}(\varphi) = (\varphi_{q+1}\varphi), \cdots B_{2n-q-m}(\varphi) = (\varphi_{2n-q-m}\varphi)$.

Nun führt man wiederum statt $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ neue Variabeln ein, nämlich $f_1 \cdots f_q \varphi_{q+1} \cdots \varphi_{2n-q-m}$ zusammen mit $q+m$ weiteren Grössen $u_1 u_2 \cdots u_{q+m}$, und findet so

$$A_k(\varphi) = \sum_i (f_k u_i) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$$

$$B_k(\varphi) = \sum_i (\varphi_k \varphi_i) \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} + \sum_i (\varphi_k \varphi_i) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}.$$

Man bestimmt wie früher durch lineare Combination der $B_k(\varphi)$ die allgemeinste inf. Transformation

$$C(\varphi) = \pi_{q+1} C_1(\varphi) + \cdots + \pi_{q+m} C_m(\varphi)$$

die nur Differentialquotienten hinsichtlich der $u_i$ enthält. Wir werden zeigen, dass die inf. Transformationen $C_k(\varphi)$ paarweise die Relation $C_i(C_k(\varphi)) - C_k(C_i(\varphi)) = 0$ erfüllen.

Da die ausgezeichneten Functionen $\Omega$ Functionen von den $f$ und $\varphi$ sind, so folgt, dass die $(\Omega_k \varphi)$ sich folgendermassen ausdrücken lassen

$$(\Omega_k \varphi) = \sum_i \Theta_{ki}(f_1 \cdots f_q \varphi_{q+1} \cdots \varphi_{2n-q-m}) B_i(\varphi) + \sum \alpha_k A_k(\varphi),$$

wo die $\alpha_k$ Functionen der $f$ und $\varphi$ sind; auf der anderen Seite ist

$$(\Omega_k \varphi) = \sum_i (\Omega_k u_i) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}.$$

Also bestehen $m$ Relationen von der Form

$$(\Omega_k \varphi) = \sum_i \pi_{ki}(f_1 \cdots f_q \varphi_{q+1} \varphi_{q+2} \cdots) C_i(\varphi) + \sum \alpha_k A_k(\varphi)$$

und, da keine lineare Relation zwischen den $(\Omega_k \varphi)$ und den $A_k(\varphi)$ bestehen darf, so folgt einerseits, dass die infinitesimalen Transformationen $C_i(\varphi)$ von einander unabhängig sind, andererseits, dass diese Grössen sich linear durch die $(\Omega_k \varphi)$ und die $A_k(\varphi)$ ausdrücken:

$$C_i(\varphi) = \sum_k \psi_{ik}(f_1 \cdots f_q \varphi_{q+1} \cdots \varphi_{2n-q-m}) (\Omega_k \varphi) + \sum_k \beta_k A_k(\varphi).$$

Bildet man daher die $C_i(C_k(\varphi)) - C_k(C_i(\varphi))$ und berücksichtigt dabei, dass die $C_i(\varphi)$ nur Differentialquotienten hinsichtlich der $u$ enthalten, dass ferner alle $(\Omega_i \Omega_k)$ verschwinden, so erkennt man, dass alle

$$C_i(C_k(\varphi)) - C_k(C_i(\varphi)) = 0$$

sind.

Hiermit hat unser Problem die folgende Gestalt gewonnen: Vorgelegt ist ein $q$-gliedriges vollständiges System zwischen $q + m$ Variabeln

$$A_k(\varphi) = \sum_i (f_k u_i) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = 0,$$

und man kennt $m$ Ausdrücke $C_1(\varphi), \cdots C_m(\varphi)$, welche die Gleichungen

$$A_i(C_k(\varphi)) - C_k(A_i(\varphi)) = \sum_q \lambda_{ikq} A_q(\varphi)$$
$$C_i(C_k(\varphi)) - C_k(C_i(\varphi)) = 0$$

erfüllen. Man soll das vollständige System integriren. Nach § 12., Nr. 29. geschieht dies, indem man das vollständige System

$$A_1(\varphi)=0, \cdots A_q(\varphi)=0, \quad C_1(\varphi)=0, \cdots C_{r-1}(\varphi)=0,$$
$$C_{r+1}(\varphi)=0, \cdots C_m(\varphi)=0,$$

oder auch die entsprechende totale Differentialgleichung

$$W_{r,1}du_1+\cdots+W_{r,m+q}du_{m+q}=0$$

aufstellt und darnach die durch die Ausdrücke

$$A_k(\varphi)=\sum_i U_{ki}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}, \quad C_k(\varphi)=\sum_i U_{ki}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$$

bestimmte Determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1,m+q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{q,1} & U_{q,2} & \cdots & U_{q,m+q} \\ V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1,m+q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{m,1} & V_{m,2} & \cdots & V_{m,m+q} \end{vmatrix}$$

bildet. Alsdann ist $\frac{1}{\Delta}$ ein Integrabilitätsfactor, also

$$L_r=\int\frac{1}{\Delta}(W_{r,1}du_1+\cdots+W_{r,m+q}du_{m+q})$$

ein Integral unserer totalen Gleichung und gleichzeitig eine Lösung der $A_k(\varphi)=0$. Giebt man $r$ successiv die Werthe $1, 2\cdots m$, so erhält man $m$ Lösungen $L_1\cdots L_m$, die von einander wie von den $f$ und $\varphi$ unabhängig und somit die fehlenden Lösungen des Systems $A_k(\varphi)=0$ sind.

Hiermit haben wir das angekündigte Resultat erreicht.

---

**36.** Auch die Ergebnisse des § 5. fliessen als Corollar aus meiner allgemeinen Theorie der infinitesimalen Transformationen.

Sei

$$N_1=\alpha_1, \cdots N_q=\alpha_q$$

ein Involutionssystem nullter Ordnung, und seien $N_1\cdots N_q\ H_{q+1}\cdots H_{2n-q-m}$ homogene Lösungen des Systems

$$(N_1H)=0, \cdots (N_qH)=0,$$

die eine Gruppe bilden, welche ausser $N_1\cdots N_q$ noch $m$ ausgezeichnete Functionen, sämmtlich von nullter Ordnung, enthält und daher die kanonische Form $X_1\cdots X_n\ P_{q+m+1}\cdots P_n$ besitzt. Alsdann sind die ausgezeichneten Functionen dieser Gruppe die gemeinsamen Lösungen des vollständigen Systems

$(N_1\Phi) = 0, \cdots (N_q\Phi) = 0, \quad (H_{q+1}\Phi) = 0, \cdots (H_{2n-q-m}\Phi) = 0,$

ausserdem befriedigen sie die Gleichung

$$\sum p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0,$$

die somit eine algebraische Consequenz der vorhergehenden Gleichungen ist. Also besteht eine lineare Relation:

(15) $\alpha_1(N_1\Phi) + \cdots + \alpha_q(N_q\Phi) + \beta_{q+1}(H_{q+1}\Phi) + \cdots - \sum p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0,$

die wir aufstellen können. Setzen wir nun

$$(N_k\Phi) = A_k(\Phi), \quad (H_{q+i}\Phi) = B_{q+i}(\Phi), \quad \sum p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = B(\Phi),$$

so gestattet, können wir sagen, das vollständige System $A_k(\Phi) = 0$ die infinitesimalen Transformationen $B_i(\Phi)$. In Folge dessen sind die $\beta$ (Theorem VII.) Lösungen der $A_k(\Phi) = 0$.

Ich behaupte, dass man in dieser Weise sämmtliche fehlenden Lösungen der $A_k(\Phi) = 0$ findet. Zum Beweis setze ich

$$N_1 = X_1, \ldots N_q = X_q,$$

und denke mir die Gruppe der $N$ und $H$ auf ihre kanonische Form

$$X_1 \cdots X_q \cdots X_{q+m+1} \cdots X_n \; P_{q+m+1} \cdots P_n$$

gebracht. Hierdurch nimmt die Gleichung (15) die Form an:

$$\alpha_1'(X_1\Phi) + \cdots + \alpha_q'(X_q\Phi) + \beta_{q+1}'(X_{q+1}\Phi) + \cdots + \beta_n'(X_n\Phi)$$
$$+ \beta_{n+1}'(P_{q+m+1}\Phi) + \cdots + \beta_{2n-q-m}'(P_n\Phi) - \sum_k P_k \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} = 0,$$

oder ausgeführt:

$$\alpha_1' \frac{\partial \Phi}{\partial P_1} + \cdots + \alpha_q' \frac{\partial \Phi}{\partial P_q} + \beta_{q+1}' \frac{\partial \Phi}{\partial P_{q+1}} + \cdots + \beta_n' \frac{\partial \Phi}{\partial P_n}$$
$$- \beta_{n+1}' \frac{\partial \Phi}{\partial X_{q+m+1}} + \cdots - \beta_{2n-q-m}' \frac{\partial \Phi}{\partial X_n} - \sum_k P_k \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} = 0,$$

woraus

$$\alpha_1' = P_1, \cdots \alpha_q' = P_q, \quad \beta_{q+1}' = P_{q+1}, \cdots \beta_n' = P_n, \quad \beta_{n+k}' = 0.$$

Man sieht, dass $\beta_{q+1}' \cdots \beta_{q+m}'$ die fehlenden Lösungen des Systems

$$(X_1\Phi) = 0, \cdots (X_q\Phi) = 0$$

sind, während die übrigen $\beta'$ Functionen der bereits bekannten Lösungen sind. Berücksichtigt man daher, dass die beiden Grössenreihen

$$\beta_{q+1} \cdots \beta_{2n-q-m},$$
$$\beta_{q+1}' \cdots \beta_{2n-q-m}'$$

in solcher gegenseitigen Beziehung stehen, dass sich jede Grösse der einen Reihe durch die Grössen der zweiten Reihe und die bekannten

Lösungen ausdrückt, so folgt, dass auch die Grössen $\beta_{q+1} \cdots \beta_{2n-q-m}$ die fehlenden Lösungen liefern, wie behauptet wurde.

Um den Zusammenhang zwischen dieser und meiner alten Begründung möglichst klar hervortreten zu lassen, füge ich noch das Folgende hinzu.

Die Gleichung (15) gilt identisch für jedes $\Phi$. Setzen wir $\Phi$ successive gleich $x_1 \cdots x_n\ p_1 \cdots p_n$, so findet man die $2n$ Gleichungen

$$\sum_k \alpha_k \frac{\partial N_k}{\partial p_i} + \sum_k \beta_k \frac{\partial H_k}{\partial p_i} = 0,$$

$$\sum_k \alpha_k \frac{\partial N}{\partial x_i} + \sum_k \beta_k \frac{\partial H_k}{\partial x_i} = p_i,$$

deren Inbegriff offenbar mit (15) äquivalent ist. Diese Gleichungen lassen sich in die eine Gleichung

$$\sum_k \alpha_k dN_k + \sum_k \beta_k dH_k = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n,$$

die daher mit (15) äquivalent ist, zusammenfassen. In Nummer 1. (Satz 3.) sahen wir aber eben, dass die $\beta$ die fehlenden Lösungen der Gleichungen $(N_1\Phi) = 0, \cdots (N_q\Phi) = 0$ sind.

**37.** Die Theorie der Nummer 12. ergiebt sich noch unmittelbarer aus der Theorie der infinitesimalen Transformationen.

Sei wiederum

$$N_1 = \alpha_1, \ \ldots \ N_q = \alpha_q$$

ein vorgelegtes Involutionssystem nullter Ordnung und seien $H_{q+1} \ldots H_r$ homogene Lösungen der Gleichungen

$$(N_1\Phi) = 0, \ \ldots \ (N_q\Phi) = 0,$$

die zusammen mit $N_1 \ldots N_q$ eine Gruppe bilden, welche ausser $N_1 \ldots N_q$ noch $m$ ausgezeichnete Functionen, sämmtlich von nullter Ordnung, enthalte.

Setzen wir

$$(N_k\Phi) = A_k(\Phi), \quad (H_k\Phi) = B_k(\Phi), \quad \sum p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = B(\Phi),$$

so gestattet, können wir sagen, das vollständige System $A_k(\Phi) = 0$ die infinitesimalen Transformationen $B_k(\Phi)$. Und wenn wir, wie in Nr. 12., die Voraussetzung machen, dass die Polargruppe der Gruppe $N_1 \ldots N_q\ H_{q+1} \ldots H_r$ nicht nur Functionen nullter Ordnung enthalte, so bilden die Gleichungen

$$A_k(\Phi) = 0, \quad B_k(\Phi) = 0, \quad B(\Phi) = 0$$

ein vollständiges System. Es besteht somit keine lineare Relation zwischen den $A_k(\Phi)$, $B_k(\Phi)$ und $B(\Phi)$.

Nach den Regeln von § 8. führen wir neue Variabeln $N_1 \ldots N_q$ $H_{q+1} \ldots H_r$ $u_1 \ldots u_{2n-r}$ ein, und finden so:

$$A_k(\Phi) = \sum_i (N_k u_i) \frac{\partial \Phi}{\partial u_i},$$

$$B_k(\Phi) = \sum_i (H_k H_i) \frac{\partial \Phi}{\partial H_i} + \sum_i (H_k u_i) \frac{\partial \Phi}{\partial u_i},$$

$$B(\Phi) = \sum_i H_i \frac{\partial \Phi}{\partial H_i} + \sum_i \left( \sum_k p_k \frac{\partial u_i}{\partial p_k} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}.$$

Hiernach sollen wir durch lineare Combination der $B_k(\Phi)$ die allgemeinste inf. Transformation

$$C(\Phi) = \pi_{q+1} C_1(\Phi) + \pi_{q+2} C_2(\Phi) + \cdots$$

suchen, die nur Differentialquotienten hinsichtlich der $u_i$ enthält; und darnach das vollständige System

$$A_1(\Phi) = 0, \ldots A_q(\Phi) = 0, \quad C_1(\Phi) = 0, \quad C_2(\Phi) = 0, \ldots$$

aufstellen und eine Lösung desselben bestimmen u. s. w. Dies ist aber eben die in Nr. 12. auseinander gesetzte Methode.

## Abschnitt III.

### Giebt es noch bessere Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen 1. O.?

In Euler's Integralrechnung werden mehrere specielle partielle Differentialgleichungen 1. O. integrirt. Lagrange zeigte in einer berühmten Arbeit, die in den Abhandlungen der Akademie zu Berlin für 1772 gedruckt ist, dass die Integration der allgemeinen Gleichung

$$q = f(x\, y\, z\, p)$$

auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. Er stellt das simultane System

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{q - p\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}}$$

auf und sucht ein Integral desselben. Gelingt es, *ein* solches zu finden, so verlangt die Erledigung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung nur die Integration einer linearen totalen Differentialgleichung

$$dz - A dx - B dy = 0,$$

in der $A$ und $B$ bekannte Functionen von $x$, $y$ und $z$ sind.

Die Mathematiker strebten lange ohne Erfolg eine allgemeine Integrationsmethode der allgemeinen Gleichung

$$F(z\,x_1 \cdots x_n\; p_1 \cdots p_n) = 0$$

zu finden. Merkwürdig ist es dabei, dass Pfaff, dem dies zuerst gelang (Abhandl. der Akademie zu Berlin 1814—1815), den Umweg machte, das vorliegende Problem als speciellen Fall eines anscheinend weit schwierigeren Problems aufzufassen. Pfaff zeigte nämlich, dass jeder $2n$-gliedrige Ausdruck

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

auf eine $n$-gliedrige Form

$$F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n$$

gebracht werden kann, und zwar in der Weise, dass man successive eine Reihe simultaner Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen vollständig integrirt. Und da das Problem, die Gleichung

$$p_n = f(z\,x_1 \cdots x_n\; p_1 \cdots p_{n-1})$$

zu integriren, darauf hinauskommt, den Ausdruck

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_{n-1} dx_{n-1} - f dx_n$$

auf eine $n$-gliedrige Form zu bringen, so giebt die Erledigung des soeben besprochenen allgemeinen Problems zugleich eine allgemeine Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O. Um die Gleichung

$$F(z\,x_1 \cdots x_n\; p_1 \cdots p_n) = 0$$

nach dieser Methode zu integriren, muss man successive ein simultanes System, bestehend aus $2n-1$ Gleichungen, ein System mit $2n-3$ Gleichungen, eins mit $2n-5$ Gleichungen u. s. w., zuletzt *eine* gewöhnliche Differentialgleichung 1. O. zwischen zwei Variabeln integriren. Bezeichne ich daher die Operation, *ein* Integral eines simultanen Systems von $q$ gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. O. zu bestimmen, durch die Zahl $q$, so dass die vollständige Integration eines solchen Systems die Operationen

$$q,\; q-1,\; q-2,\; \cdots 3,\; 2,\; 1$$

erfordert, so verlangt, kann ich sagen, die Integration der Gleichung $F = 0$ nach der Pfaff'schen Methode die in folgendem Schema angegebenen Operationen:

Die Pfaff'sche Methode.

$$\begin{array}{r}
2n-1,\; 2n-2,\; 2n-3,\; 2n-4,\; 2n-5,\; \cdots 3,\; 2,\; 1,\\
2n-3,\; 2n-4,\; 2n-5,\; \cdots 3,\; 2,\; 1,\\
2n-5,\; \cdots 3,\; 2,\; 1,\\
\cdots\cdots\cdots\\
3,\; 2,\; 1,\\
1.
\end{array}$$

Cauchy, der Pfaff's Theorie nicht kannte, gab im Jahre 1818 eine neue äusserst einfache Methode, die darauf hinauskommt, dass es hinreichend ist, das erste Pfaff'sche System zu integriren. Diese Cauchy'sche Methode, die man als eine Verallgemeinerung der von Monge herrührenden Theorie der Charakteristiken der Gleichung $f(zxypq) = 0$ aufzufassen hat, scheint mir hinsichtlich der zu Grunde liegenden Gedanken die einfachste Methode zu sein, die gegeben worden ist, und zugleich die einfachste Methode, die überhaupt gegeben werden kann. Allerdings verlangt sie schwierigere Integrationsoperationen als mehrere spätere Methoden.

Jacobi, der für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. so ausserordentlich viel geleistet hat, veröffentlichte 1837 (Crelle's Journal Bd. 17) die Grundzüge einer neuen Methode, die ich die *Jacobi'sche Methode* nenne. Erst 1862 (Crelle's Journal Bd. 60), mehrere Jahre nach Jacobi's Tode, veröffentlichte Clebsch eine ausgeführte Redaction dieser Methode, die unter Jacobi's nachgelassenen Manuscripten gefunden worden war. In dem langen Zeitraume 1837 — 1862 gingen die Bestrebungen der Mathematiker, die sich mit dieser Disciplin beschäftigten, zum grössten Theile darauf hinaus, die Jacobi'sche Methode nach Jacobi's Andeutungen zu reconstruiren. Dies gelang Bour (Journal de l'École Polytechn. 39e cahier), der sich überhaupt in mehreren Richtungen um die allgemeine Theorie verdient gemacht hat. Um die Cauchy'sche und die Jacobi'sche Methode zu vergleichen, stelle ich die nach beiden Methoden nothwendigen Operationen in dem folgenden Schema zusammen.

| Die Cauchy'sche Methode. | Die Jacobi'sche Methode. |
|---|---|
| $2n-1$ | $2n-1 \quad 2n-3 \quad 2n-5 \cdots 3 \quad 1$ |
| $2n-2$ | $2n-3 \quad 2n-5 \cdots 3 \quad 1$ |
| $2n-3$ | $2n-5 \cdots 3 \quad 1$ |
| . . . . | . . . . . |
| 3 | $3 \quad 1$ |
| 2 | 1 |
| 1 | |

Wie man sieht, verlangt Jacobi's Methode, wenn $n > 2$ ist, eine grössere Anzahl Integrationsoperationen, die jedoch *eine geringere Ordnung haben* als Cauchy's Methode. Zu bemerken ist übrigens, dass häufig mehrere Integrationsoperationen bei der Jacobi'schen Methode wegfallen können. Man hält jedenfalls die Jacobi'sche Methode für einfacher als die Cauchy'sche.

Man betrachtet allgemein die Jacobi'sche Methode als ein Meisterwerk; und diese Auffassung ist ohne Zweifel wohl begründet. Doch

glaube ich, dass die zur Begründung dieser Methode entwickelten grossartigen Hülfstheorien in noch höherem Grade als die Methode selbst einen bleibenden Werth behalten werden. Insbesondere möchte ich das Poisson-Jacobi'sche Theorem neben der Lagrange'schen, der Pfaff'schen und der Cauchy'schen Integrationstheorie als die wichtigste Entdeckung bezeichnen, die überhaupt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. gemacht worden ist.

Im Jahre 1863 veröffentlichte Weiler in Schlömilch's Journal eine wesentliche Vereinfachung der Jacobi'schen Methode. Da Weiler's Darstellung seiner Methode, die mir leider unzugänglich gewesen ist, nicht hinlänglich klar schien, unternahm es Clebsch in einer bekannten Abhandlung (Crelle's Journal Bd. 65), eine neue Darstellung der Weiler'schen Methode zu geben. Nach späteren Untersuchungen von Mayer (Mathem. Annalen Bd. IX) ist jedoch diese Clebsch'sche Methode von der Weiler'schen, die Mayer selbst in der citirten Abhandlung aufs Neue entwickelt hat, verschieden. Doch stimmen diese beiden Methoden hinsichtlich der Zahl und der Ordnung der nothwendigen Integrationsoperationen, wie das folgende Schema zeigt, überein.

| Die Weiler'sche Methode. | Die Clebsch'sche Methode. |
|---|---|
| $2n-1$ | $2n-1$ |
| $2n-3$ $2n-3$ | $2n-3$ $2n-3$ |
| $2n-5$ $2n-5$ | $2n-5$ $2n-5$ |
| . . . . . | . . . . . |
| 3 3 | 3 3 |
| 1 1 | 1 1 |

Im Jahre 1872 endlich, genau ein Jahrhundert nach dem Erscheinen von Lagrange's oben citirter bahnbrechender Arbeit, veröffentlichten Mayer (Math. Ann. Bd. V) und ich (Gesellschaft der Wissensenschaften zu Christiania) gleichzeitig und unabhängig von einander zwei verschiedene Theorien, die dieselbe Reduction in der Zahl und der Ordnung der nothwendigen Integrationsoperationen erzielten. Mayer's Arbeit enthielt ein merkwürdiges Theorem, das sogenannte *Mayer'sche Theorem*, welches ihm erlaubte, nicht allein die Jacobi'sche Integrationsmethode, sondern auch die allgemeine Theorie des Pfaff'schen Problems wesentlich zu vereinfachen. Meine Methode nimmt gewissermassen eine Zwischenstelle zwischen der Cauchy'schen und der Jacobi'schen ein; sie basirt auf einer Verallgemeinerung der Cauchy'schen Methode.

| Die Mayer'sche Methode. | Meine Methode. |
|---|---|
| $2n-1$ | $2n-1$ |
| $2n-3$ | $2n-3$ |
| $2n-5$ | $2n-5$ |
| ⋮ | ⋮ |
| 3 | 3 |
| 1 | 1 |

Bei der Jacobi'schen, der Weiler'schen, der Clebsch'schen, der Mayer'schen und meiner Methode stellt man successive eine Reihe simultaner Systeme auf, und sucht jedesmal *ein* Integral. Hierbei kann es gelegentlich eintreffen, dass man gleichzeitig mehrere Integrale eines solchen Systems findet; man kennt überdies Operationen, die dazu dienen, aus einem bekannten Integrale neue herzuleiten. Es stellt sich daher das Problem, den Umstand, dass man gleichzeitig mehrere Integrale gefunden hat, zur Vereinfachung des zurückstehenden Integrationsgeschäfts möglichst zu verwerthen. Dieses Problem behandelte ich eingehend in meiner „Invariantentheorie der Berührungstransformationen"; ich zeigte, dass sich aus dem besprochenen Umstande im Allgemeinen ein sehr grosser Vortheil ziehen lässt. Und im ersten Abschnitte meiner jetzigen Arbeit habe ich gelehrt, bekannte Integrale in noch viel höherem Grade zu verwerthen.

---

Es stellt sich nun die Frage, ob es denkbar ist, dass eine spätere Zeit noch bessere Integrationstheorien der partiellen Differentialgleichungen entdecken werde. Ich zweifle nicht, dass jeder Mathematiker, der die jetzige Lage dieser Disciplin kennt, dazu geneigt sein wird, eine solche Frage ohne Weiteres mit Nein zu beantworten. Hierauf ist jedoch wenig Gewicht zu legen. Denn in der Entwickelungsgeschichte dieser Theorie hat es sich mehreremal wiederholt, dass die mathematische Welt die Theorie für fertig gehalten hat. Schon Jacobi fand sich veranlasst*) gegen die Ansicht aufzutreten, dass mit Lagrange's und Pfaff's Arbeiten diese Theorie abgeschlossen wäre. Dagegen meinte er, dass sie noch ein fruchtbares Gebiet für Forschung sei. Und die Arbeiten Jacobi's haben die Richtigkeit seines Urtheils gezeigt. Es ist mir auf der anderen Seite keineswegs bekannt, dass Jacobi irgendwo die Auffassung ausgesprochen hat, dass mit seinen Arbeiten diese Disciplin zum Abschluss gebracht worden sei. Nichtsdestoweniger verbreitete sich die Ansicht, dass nun in dieser Theorie Nichts mehr zu machen wäre, und auch die Entdeckungen von Weiler und von Clebsch vermochten nicht, diese Auffassung zu erschüttern.

---

*) Vorlesungen über Dynamik, p. 304.

Um nun die Frage, ob noch einfachere Integrationsmethoden als die bis jetzt bekannten überhaupt möglich sind, rationell behandeln zu können, scheint es mir zunächst nothwendig, diese Frage näher zu präcisiren. Ich stelle dann ausdrücklich fest, dass ich bei der Vergleichung zweier Integrationsmethoden nur auf die nothwendigen Integrationsoperationen Rücksicht nehmen werde, während ich von den sogenannten ausführbaren Operationen, das heisst von Differentiationen und Eliminationen ganz absehe. Ich betrachte dabei eine Operation $q$ als schwieriger, als eine Operation $q - 1$. Ich finde es ferner nothwendig, als Axiom festzustellen, dass die Integration der allgemeinen Gleichung $f\left(x\, y\, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ nicht durch ausführbare Operationen geleistet werden kann, woraus als Corollar hervorgeht, dass auch nicht die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung 1. O. eine ausführbare Operation sein kann. Endlich stelle ich als Axiom fest, dass es nicht zufällig ist, sondern aus der Natur der Sache hervorgeht, dass bei allen bekannten Methoden die erste Operation, welche zur Integration der gegebenen Gleichung

$$f(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = a$$

erforderlich ist, darauf hinausläuft, eine gemeinsame Lösung eines solchen vollständigen Systems mit den unabhängigen Variabeln $x_1 \cdots x_n$ $p_1 \cdots p_n$ zu finden, welches zu $f = a$ in einer durch Berührungstransformationen invarianten Beziehung steht.

Indem ich diese Axiome und den aufgestellten Massstab zu Grunde lege, gelingt es mir nachzuweisen, dass keine allgemeine Integrationsmethode sich mit einfacheren Operationen als die Mayer'sche und die meinige begnügen kann; dass ferner die von mir gegebenen Theorien den grösstmöglichen Nutzen aus mehreren bekannten Integralen zu ziehen lehren.

Hiermit ist die Frage, ob noch einfachere Methoden existiren, wenn nicht erledigt, so doch jedenfalls darauf zurückgeführt, die Richtigkeit der aufgestellten Axiome zu untersuchen.

## § 15.

### Infinitesimale Berührungstransformationen und vollständige Systeme.

**38.** Ich sage, dass eine Function $\Pi(x_1 \cdots x_n)$ die infinitesimale Transformation

$$\delta x_k = \xi_k(x_1 \cdots x_n)\, \delta t, \quad (k = 1 \cdots n)$$

gestattet, wenn die transformirte Function

$$\Pi(x_1 + \xi_1 \delta t, \cdots x_n + \xi_n \delta t)$$

identisch gleich $\Pi$ ist, wenn also

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}\xi_1 + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial x_n}\xi_n = 0$$

ist.

Bezeichnen wir die infinitesimale Transformation $\delta x_k = \xi_k \delta t$ wieder mit dem Symbole

$$B(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

so können wir diese und die entsprechende, früher (Nr. 15.) in Bezug auf ein vollständiges System gegebene Definition also formuliren:

Definition. *Die Function $\Pi(x_1 \ldots x_n)$ gestattet die inf. Transformation $B(f)$, wenn $B(\Pi)$ gleich Null ist.*

Definition. *Ein vollständiges System gestattet die inf. Transformation $B(f)$, wenn $B(\Phi)$ gleichzeitig mit $\Phi$ eine Lösung des Systems ist.*

**39.** Im Folgenden haben wir nur inf. Berührungstransformationen zwischen $x_1 \ldots x_n\ p_1 \ldots p_n$ zu betrachten. Wir bestimmen zuerst die allgemeine Form einer solchen Transformation:

$$x_i' = x_i + A_i \delta t, \quad p_k' = p_k + B_k \delta t.$$

Die Grössen $A$ und $B$ befriedigen bekanntlich (Math. Ann. Bd. VIII, p. 236) die Gleichungen:

$$(x_i + A_i\delta t,\ x_k + A_k\delta t) = 0, \quad (x_i + A_i\delta t,\ p_k + B_k\delta t) = 0,$$
$$(p_i + B_i\delta t,\ p_k + B_k\delta t) = 0, \quad (x_i + A_i\delta t,\ p_i + B_i\delta t) = 1,$$

oder ausgeführt:

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_k} = \frac{\partial A_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial B_i}{\partial x_k} = \frac{\partial B_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial B_k}{\partial p_i};$$

diese Gleichungen werden aber in allgemeinster Weise befriedigt, wenn man setzt:

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad B_k = -\frac{\partial F}{\partial x_k},$$

wo $F$ eine beliebige Function von $x_1 \ldots x_n\ p_1 \ldots p_n$ bezeichnet. Also:

Satz 20. *Eine jede infinitesimale Berührungstransformation besitzt die Form*

(1) $$\delta x_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta t, \quad \delta p_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta t,$$

*wo $F$ eine beliebige Function von $x_1 \ldots x_n\ p_1 \cdots p_n$ ist.*

Halten wir an der eingeführten Bezeichnungsweise fest, so ist die infinitesimale Berührungstransformation (1) mit

$$B(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = (Ff)$$

zu bezeichnen. Wir nennen diese Transformation kurzweg die inf. Berührungstransformation $F$.

Angewandt auf inf. Berührungstransformationen geben die aufgestellten Definitionen die beiden folgenden Sätze.

Satz 21. Eine Function $\Phi(x_1 \ldots x_n\ p_1 \ldots p_n)$ gestattet die inf. Berührungstransformation $F$, wenn $(F\Phi)$ gleich Null ist.

Satz 22. Ein vollständiges System mit den unabhängigen Variabeln $x_1 \ldots x_n\ p_1 \ldots p_n$ gestattet die inf. Berührungstransformation $F$, wenn $(F\Phi)$ immer gleichzeitig mit $\Phi$ eine Lösung desselben ist.

**40.** Wir werden das allgemeinste vollständige System bestimmen, das zu einer vorgelegten Function $X(x_1 \ldots x_n\ p_1 \ldots p_n)$ in solcher Beziehung steht, dass alle inf. Berührungstransformationen, die $X$ invariant lassen, gleichzeitig das vollständige System in sich selbst überführen. Um dieses Problem zu erledigen, werden wir zunächst einige Hülfssätze entwickeln, wobei wir wie früher mit den Buchstaben $X_1 \ldots X_n\ P_1 \ldots P_n$ immer kanonische Variabeln bezeichnen.

Satz 23. *Gestattet ein vollständiges System alle inf. Transformationen der Form $F(X_1 \ldots X_n\ P_2 \ldots P_n)$ und ist dabei $X_2$ eine Lösung desselben, so sind auch die übrigen in $F$ enthaltenen Grössen Lösungen.*

Beweis. Nach Voraussetzung gestattet unser vollständiges System unter Anderen auch die infinitesimalen Transformationen:

$$X_k P_2 \text{ und } P_i P_2, \text{ wo } i > 1,$$

also sind (Satz (22))

$$(X_2, X_k P_2) \text{ und } (X_2, P_i P_2),$$

das heisst $X_k$ und $P_i$ Lösungen, was eben zu beweisen war.

Satz 24. Wenn ein vollständiges System eine Lösung von der Form $u\varphi(v)$ zulässt, wo $\varphi$ eine willkürliche Function ist, so sind $u$ und $v$ selbst Lösungen des Systems.

Denn im Besondern sind dann auch $u$ und $uv$ Lösungen, also ist auch ihr Quotient $v$ eine solche.

Satz 25. *Besitzt ein vollständiges System, das alle inf. Transformationen der Form $\Omega(X_2)$ gestattet, eine Lösung, deren analytischer Ausdruck in den kanonischen Variabeln $X_1 \ldots X_n\ P_1 \ldots P_n$ die Grösse $P_2$ enthält, so ist $X_2$ eine Lösung desselben.*

Beweis. Sei $\Phi$ eine Lösung von der angegebenen Art. Wenden wir dann auf $\Phi$ die infinitesimale Transformation $\Omega(X_2)$ an, so erhalten wir die neue Lösung

$$(\Omega\Phi) = \Omega_2'(X_2)\ \frac{\partial\Phi}{\partial P_2}.$$

Diese enthält aber eine willkürliche Function von $X_2$ als Factor, also ist nach dem vorhergehenden Satze $X_2$ selbst eine Lösung.

Theorem IX. *Es giebt nur zwei vollständige Systeme, die zu einer vorgelegten Function $X_1$ in einer durch Berührungstransformationen invarianten Beziehung stehen. Das eine ist*

$$(X_1\Phi) = 0,$$

*das andere hat keine andere Lösung als $X_1$.*

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass das betreffende vollständige System jedenfalls eine Lösung besitzt, deren analytischer Ausdruck in den Variabeln $X_1 \ldots X_n\ P_1 \ldots P_n$ eine von den Grössen $X_2 \ldots X_n\ P_2 \ldots P_n$, etwa $P_2$, enthält. Berücksichtigen wir sodann, dass unser vollständiges System alle infinitesimalen Transformationen der Form $F(X_1 \ldots X_n\ P_2 \ldots P_n)$, im Besondern also auch der Form $\Omega(X_2)$ gestatten soll, weil diese die gegebene Function $X_1$ invariant lassen, so sehen wir aus Satz 25., dass $X_2$ selbst eine Lösung sein muss. Hieraus aber folgt (Satz 23.), dass sämmtliche Grössen $X_1 \ldots X_n$ $P_2 \ldots P_n$ Lösungen sein müssen, und daher kann das betreffende vollständige System nur die *eine* Gleichung

$$(X_1\Phi) = 0$$

enthalten.

Giebt es daher noch andere vollständige Systeme, die zu $X_1$ in einer durch Berührungstransformationen invarianten Beziehung stehen, so müssen sämmtliche Lösungen derselben Functionen von $X_1$ und $P_1$ allein sein. Sei $\Phi$ eine solche Lösung, die $P_1$ enthält. Auf $\Phi$ wenden wir die inf. Transformation $X_1\Omega(X_2)$ an und erhalten dadurch die neue Lösung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P_1}\Omega(X_2),$$

die eine arbiträre Function von $X_2$ als Factor enthält. Also muss $X_2$ selbst eine Lösung sein. Dies steht aber im Widerspruche mit dem Vorangehenden. Und also giebt es keine Lösung, die $P_1$ enthält; das heisst $X_1$ ist die einzige Lösung.

## § 16.

## Bestimmung der besten Integrationsmethode.

**41.** Zunächst entwickle ich einige allgemeine Sätze.

Satz 26. Stehen zwei Integrationsprobleme, die sich durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erledigen lassen, in solcher gegenseitigen Beziehung, dass man, wenn ein Problem der einen Kategorie vorgelegt ist, immer vermöge ausführbarer Operationen ein Problem der zweiten Kategorie aufstellen kann, dessen Erledigung diejenige des vorgelegten Problems nach sich zieht, so ist das Minimum der nothwendigen Integrationsoperationen für beide Kategorien dasselbe.

Dieser Satz ist unmittelbar evident.

In den folgenden Sätzen werden unter partiellen Differentialgleichungen und Involutionssystemen immer nur solche verstanden, welche die unbekannte Function selbst nicht enthalten.

Satz 27. Die Integration eines zwei-gliedrigen Involutionssystems mit $n$ unabhängigen Variabeln

$$X_1(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = a_1, \quad X_2(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = a_2$$

lässt sich auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung 1. O. mit nur noch $n-1$ unabhängigen Variabeln zurückführen. —

Dies ist ja der Fundamentalsatz der neuen Integrationsmethode, die ich 1872 veröffentlichte.

Satz 28. Die Integration einer gegebenen partiellen Differentialgleichung 1. O. mit $n-1$ unabhängigen Variabeln

$$f(x_1 \cdots x_{n-1}\, p_1 \cdots p_{n-1}) = b$$

lässt sich zurückführen auf die Integration eines zwei-gliedrigen Involutionssystems mit $n$ unabhängigen Variabeln. —

Denn die Integration des Involutionssystems

$$f = b, \quad p_n = \text{Const.}$$

zieht diejenige der Gleichung $f = b$ nach sich.

Theorem X. *Die einfachste Integrationsmethode eines zwei-gliedrigen Involutionssystems mit n unabhängigen Variabeln braucht genau so viele und so hohe Integrationsoperationen als die einfachste Integrationsmethode der allgemeinen partiellen Differentialgleichung 1. O. mit $n-1$ unabhängigen Variabeln.*

Dieses wichtige Theorem ist eine directe Consequenz aus den vorhergehenden Sätzen dieser Nummer.

**42.** Um jetzt die Frage nach der einfachsten Integrationsmethode beantworten zu können, scheint es nothwendig, zwei Forderungssätze aufzustellen.

Erster Forderungssatz. Die Integration der allgemeinen Differentialgleichung

$$f\left(xy\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

lässt sich nicht durch ausführbare Operationen leisten.

Aus diesem Satze folgt als Corollar, dass auch nicht die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. O. allgemein geleistet werden kann.

Zweiter Forderungssatz. Die einfachste Integrationsmethode der allgemeinen Gleichung

$$X(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = a$$

beginnt mit der Bestimmung einer Lösung eines vollständigen Systems mit den unabhängigen Variabeln $x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n$, welches zu $X$ in einer durch Berührungstransformationen invarianten Beziehung steht.

**43.** Indem ich diese beiden Forderungssätze admittire, bestimme ich leicht die einfachste Integrationsmethode der allgemeinen Gleichung

$$X_1^1 (x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = a_1 .$$

Zuerst soll man nach unserem zweiten Forderungssatze ein vollständiges System aufstellen, das mit $X_1^1$ invariant verknüpft ist. Es giebt nur ein solches System, nämlich

$$(X_1^1 \Phi) = 0,$$

dessen Integration sich nicht allgemein leisten lässt. Daher bestimmen wir vermöge einer Operation $2n-2$ eine Lösung $X_2^1$ von $(X_1^1 \Phi)=0$. Sodann stellen wir die dem Involutionssysteme

$$X_1^1 = a_1, \quad X_2^1 = a_2$$

äquivalente Gleichung mit $n-1$ unabhängigen Variabeln

$$X_1^2 = \text{Const.}$$

auf, und behandeln sie in entsprechender Weise. Man wird, wie man sieht, eben auf meine neue Methode geführt.

Um jetzt das allgemeinste vorgelegte Gleichungssystem in einfachster Weise zu integriren, bemerken wir, dass jedes Gleichungssystem durch ausführbare Operationen auf ein äquivalentes *Involutionssystem* reducirt werden kann. Sodann reduciren wir das gefundene Involutionssystem auf eine einzige *äquivalente Gleichung**) und behandeln sie nach meiner Methode.

Wir werden also auch in dem allgemeinen Falle auf meine neue Methode als die einfachste geführt. Erinnern wir uns daher, dass diese meine Methode hinsichtlich der Zahl und der Ordnung der nothwendigen Integrationsoperationen mit der Mayer'schen völlig übereinstimmt, so können wir das folgende merkwürdige Theorem aussprechen.

Theorem XI. *Stellt man als Axiome fest: erstens, dass die Integration der allgemeinen Gleichung* $f(xy\, \frac{dy}{dx}) = 0$ *sich*

---

*) Ein $q$-gliedriges Involutionssystem mit $n$ unabhängigen Variabeln kann, wie ich gezeigt habe, auf eine einzige partielle Differentialgleichung 1. O. mit nur noch $n-q+1$ unabhängigen Variabeln zurückgeführt werden. Umgekehrt lässt sich die Gleichung

$$f(x_1 \cdots x_{n-q+1}\, p_1 \cdots p_{n-q+1}) = a$$

auf ein $q$-gliedriges Involutionssystem zurückführen. Denn die Integration des Involutionssystems

$$f = a, \quad p_{n-q+2} = a_{n-q+2}, \cdots p_n = a_n$$

zieht diejenige der Gleichung $f = a$ nach sich.

*nicht vermöge ausführbarer Operationen leisten lässt, zweitens, dass die einfachste Integrationsmethode der allgemeinen Gleichung*

$$f(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = a$$

*mit der Bestimmung einer Lösung eines mit f invariant verknüpften vollständigen Systems zwischen den unabhängigen Variabeln $x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n$ anfangen muss, so lässt sich beweisen, dass keine Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O. sich mit einfacheren Integrationsoperationen begnügen kann, als die Mayer'sche oder die meinige.*

## § 17.

### Beste Verwerthung der zufälligen Umstände.

**44.** Integrirt man eine oder mehrere partielle Differentialgleichungen 1. O. nach der Mayer'schen oder nach meiner Methode, so wird man bekanntlich häufig in den Fall kommen, dass man gleichzeitig mehrere Integrale der zur Anwendung kommenden simultanen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen findet. Es stellt sich daher naturgemäss die Frage, wie man das Eintreten eines solchen Umstandes am vortheilhaftesten zur Vereinfachung des zurückstehenden Integrationsgeschäftes verwerthen kann. Ich werde zeigen, indem ich mich auf die Axiome und Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen stütze, dass die von mir in dieser Abhandlung gegebenen Theorien das Grösstmögliche leisten.

Sei vorgelegt das Involutionssystem

$$X_1 = a_1, \cdots X_q = a_q$$

und seien gefunden eine Anzahl Lösungen $f_{q+1} \cdots f_r$ des Systems

$$(X_1 f) = 0, \cdots (X_q f) = 0,$$

die zusammen mit $X_1 \cdots X_q$ eine Gruppe von der kanonischen Form

$$X_1 \cdots X_q \cdots X_{q'} \cdots X_{q''}\, P_{q'+1} \cdots P_{q''} \tag{2}$$

bilden. Die Regeln des Paragraph 3. erlauben dieses Involutionssystem vermöge der Operationen

$$2(n-q''),\ 2(n-q'')-2, \cdots 6,\ 4,\ 2 \tag{3}$$

zu erledigen. Ich werde beweisen, dass keine Methode sich mit einfacheren Integrationsoperationen begnügen kann.

Gäbe es in der That eine solche bessere Methode, so könnte man sie auf das allgemeine $q$-gliedrige Involutionssystem

$$f_1 = \alpha_1, \cdots f_q = \alpha_q \tag{4}$$

zwischen den Variabeln $x_1 \cdots x_{n-q''+q}\, p_1 \cdots p_{n-q''+q}$ anwenden. Obgleich nämlich die $f$ nur die eben genannten Grössen enthalten, so

könnte man sie doch als Functionen von $x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n$ auffassen. Dann aber wären die Grössen

$$f_1 \cdots f_q\, x_{n-q''+q+1} \cdots x_{n-q''+q'},$$
$$x_{n-q''+q'+1} \cdots x_n\, p_{n-q''+q'+1} \cdots p_n$$

die offenbar eine Gruppe der kanonischen Form (2) bilden, bekannte Lösungen des Systems $(f_1 f) = 0, \cdots (f_q f) = 0$. Und also könnte das Involutionssystem (4) vermöge der vorausgesetzten besseren Integrationsmethode durch einfachere Operationen als (3) integrirt werden. Nun aber lehrt Theorem XI., dass die Integration des allgemeinen $q$-gliedrigen Involutionssystems zwischen $n - q'' + q$ Variabeln eben die Operationen (3) verlangt. Daher schliessen wir:

Theorem XII. *Die in dieser Abhandlung* (§ 3.) *entwickelten Theorien erlauben aus bekannten Lösungen des Systems*

$$(X_1 f) = 0, \cdots (X_q f) = 0$$

*den grösstmöglichen Vortheil für die Integration des gegebenen Involutionssystems*

$$X_1 = a_1, \cdots X_q = a_q$$

*zu ziehen.*

## § 18.

### Gleichungen, die die unbekannte Function explicite enthalten.

Ich werde jetzt zeigen, dass auch meine Methode zur Integration von Gleichungen, die die unbekannte Function explicite enthalten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, von Gleichungen der Form

$$N\left(x_1 \cdots x_n\, \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = 0,$$

so einfach wie möglich ist.

**45.** Zunächst entwickeln wir einige Sätze über vollständige Systeme, die gewisse *homogene* inf. Berührungstransformationen gestatten.

Satz 29. Eine jede homogene inf. Berührungstransformation besitzt die Form

$$\delta x_i = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial p_i}\, \delta t, \quad \delta p_i = -\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i}\, \delta t,$$

wo $\mathsf{H}$ eine beliebige Function von $x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n$ bezeichnet, die hinsichtlich der $p$ homogen von erster Ordnung ist.

Den Beweis dieses Satzes habe ich bereits in Math. Ann. Bd. VIII, p. 239 gegeben.

Satz 30. Gestattet ein vollständiges System alle inf. homogenen Transformationen der Form $\mathsf{H}(X_1 \cdots X_n\, P_2 \cdots P_n)$ und ist dabei irgend eine nichtausgezeichnete Function nullter Ordnung der Gruppe

$X_1 \cdots X_n P_2 \cdots P_n$), etwa $X_2$ eine Lösung, so sind sämmtliche Functionen nullter Ordnung der Gruppe Lösungen des Systems.

Beweis. Unser vollständiges System gestattet die inf. Transformationen

$$X_k P_2 \text{ und } \frac{P_i^2}{P_i}, \text{ wo } i > 1,$$

also sind (Satz 22) die Ausdrücke

$$(X_2, X_k P_2) \text{ und } \left(X_2, \frac{P_i^2}{P_i}\right), \text{ wo } i > 1,$$

oder ausgeführt

$$X_k \text{ und } \frac{P_i}{P_i}, \text{ wo } i > 1,$$

Lösungen, womit unser Satz bewiesen ist.

Satz 31. Besitzt ein vollständiges System, das alle inf. Transformationen der Form $\Omega(X_2) P_2$ gestattet, eine Lösung, deren analytischer Ausdruck in den Variabeln $X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n$ jedenfalls eine der beiden Grössen $X_2$ und $P_2$ enthält, so ist $X_2$ eine Lösung des Systems.

Beweis. Sei $\Phi$ eine Lösung, die entweder $X_2$ oder $P_2$ enthält. Wir wenden auf $\Phi$ die inf. Transformation $\Omega(X_2) P_2$ an und finden so die neue Lösung

$$(\Phi, \Omega(X_2) P_2) = \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} \Omega(X_2) - \frac{\partial \Phi}{\partial P_2} \Omega'(X_2) P_2.$$

Geben wir nun der willkürlichen Function $\Omega(X_2)$ successive die Werthe 1, $X_2$ und $X_2^2$, so erhalten wir die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} &= L, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} X_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial P_2} P_2 &= L_1, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} X_2^2 - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial P_2} P_2 X_2 &= L_2, \end{aligned}$$

die unter allen Umständen $X_2$ als Function der Lösungen $L$, $L_1$ und $L_2$ bestimmen. Folglich ist $X_2$ selbst eine Lösung, wie behauptet wurde.

Theorem XIII. *Steht ein vollständiges System zu einer Function nullter Ordnung $X_1$ in einer durch homogene Berührungstransformationen invarianten Beziehung, so sind zwei Fälle möglich: Entweder sind sämmtliche Functionen nullter Ordnung, die mit $X_1$ in Involution liegen, Lösungen des Systems, oder aber das betreffende vollständige System hat keine andere Lösung als $X_1$.*

Beweis. Setzen wir zunächst voraus, dass das betreffende vollständige System jedenfalls eine Lösung besitzt, deren analytischer Ausdruck in den Variabeln $X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n$ eine der Grössen $X_2 \cdots X_n$

$P_2 \cdots P_n$, etwa $X_2$ oder $P_2$ enthält. Berücksichtigen wir sodann, dass unser vollständiges System alle inf. Tansformationen der Form $\Omega(X_2) P_2$ gestattet, so können wir schliessen (Satz 31), dass $X_2$ und also auch (Satz 30) alle Grössen nullter Ordnung der Gruppe $X_1 \cdots X_n P_2 \cdots P_n$ Lösungen desselben sind.

Nehmen wir anderseits an, dass sämmtliche Lösungen unseres vollständigen Systems blosse Functionen von $X_1$ und $P_1$ seien. Enthielte nun eine solche Lösung die Grösse $P_1$, so würden wir durch Anwendung der homogenen inf. Transformation $X_1 \Omega(X_2) P_2$ finden, dass auch $X_2$ eine Lösung wäre. Da indess dies unserer Voraussetzung widerspricht, so kann das betreffende vollständige System keine andere Lösung als $X_1$ haben.

**46.** Um jetzt gewisse vorgelegte Gleichungen nullter Ordnung in einfachst möglicher Weise zu integriren, stellen wir zunächst das äquivalente Involutionssystem auf, und reduciren dieses sodann auf eine einzige Gleichung. Es kommt also alles darauf an, eine vorgelegte Gleichung der allgemeinen Form

$$X_1 \left( x_1 \cdots x_n \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n} \right) = a_1$$

durch die einfachst möglichen Operationen zu integriren. Um dieses Problem behandeln zu können, ist es nothwendig den folgenden Forderungssatz aufzustellen.

Dritter Forderungssatz. Die einfachste Integrationsmethode der allgemeinen Gleichung

$$X_1 \left( x_1 \cdots x_n \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n} \right) = a$$

beginnt mit der Bestimmung einer Lösung eines vollständigen Systems mit den unabhängigen Variabeln $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$, das zu $X_1$ in einer durch homogene Berührungstransformationen invarianten Beziehung steht.

Da nun die Integration desjenigen vollständigen Systems, dessen einzige Lösung $X_1$ ist, eine ausführbare Operation ist, so lehrt Theorem XIII., dass die einfachste Integrationsmethode der Gleichung

$$X_1 \left( x_1 \cdots x_n \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n} \right) = a$$

mit der Bestimmung einer von $X_1$ verschiedenen Lösung des Systems

$$(X_1 \Phi) = 0, \qquad \sum_k p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = 0$$

anfangen muss. Ist eine solche Lösung $X_2$ gefunden, so stellt man die dem Systeme

$$X_1 = a_1, \quad X_2 = a_2$$

äquivalente Gleichung mit $n-1$ unabhängigen Variabeln auf, und behandelt sie in entsprechender Weise u. s. w. Man wird, wie man sieht, auf meine neue Methode geführt. Dies giebt

Theorem XIV. *Die einfachste Integrationsmethode eines $q$-gliedrigen Involutionssystems nullter Ordnung zwischen $n$ Variabeln verlangt die Operationen* $2(n-q)-1,\ 2(n-q)-3,\ \cdots 5,\ 3,\ 1.$

**47.** Es stellt sich jetzt das Problem, ein vorgelegtes Involutions-System nullter Ordnung

$$X_1 = a_1, \cdots X_q = a_q \tag{5}$$

in möglichst einfacher Weise zu integriren, wenn man bereits gewisse Lösungen der Gleichungen

$$(X_1\Phi) = 0, \cdots (X_q\Phi) = 0$$

kennt.

Setzen wir zunächst voraus, dass die bekannten Lösungen eine homogene Gruppe von der kanonischen Form

$$X_1 \cdots X_q \cdots X_{q'} \cdots X_{q''}\ P_{q'+1} \cdots P_{q''}$$

bilden. Die Regeln des § 5. erlauben in diesem Falle das Integrationsgeschäft vermöge der Operationen

$$2n-2q''-1,\ \ 2n-2q''-3, \cdots 5,\ 3,\ 1, \tag{6}$$

zu absolviren. Existirte nun eine bessere Integrationsmethode, so liess sich beweisen, indem man wie in § 17. räsonnirte, dass auch die Integration des allgemeinen $q$-gliedrigen Involutionssystems nullter Ordnung zwischen

$$x_1 \cdots x_{n-q''+q}\, p_1 \cdots p_{n-q''+q}$$

durch einfachere Operationen als (6) geleistet werden könnte. Nun haben wir aber gefunden, dass das letztbesprochene Problem im Allgemeinen die Operationen (6) verlangt. Folglich kann auch das Involutionssystem (5) nicht durch einfachere Operationen erledigt werden.

Setzen wir andererseits voraus, dass die bekannten Lösungen eine homogene Gruppe von der kanonischen Form

$$X_1 \cdots X_q \cdots X_{q'} \cdots X_{q''}\ P_{q'+1} \cdots P_{q''+1}$$

bilden, und nehmen wir an, dass sich die Integration des Involutionssystems (5) in diesem Falle durch einfachere Operationen als die früher (§ 5.) angegebenen:

$$2n-2q''-2,\ \ 2n-2q''-4, \cdots 6,\ 4,\ 2 \tag{7}$$

leisten liesse. Ich werde zeigen, dass eine solche Annahme mit den Ergebnissen des vorangehenden Paragraphs im Widerspruche steht.

Sei in der That

$$Y_1 = \alpha_1, \cdots Y_q = \alpha_q$$

ein allgemeines Involutionssystem (nicht eben von nullter Ordnung) zwischen den Variabeln

$$y_1 \cdots y_{n-1}\, \pi_1 \cdots \pi_{n-1}, \text{ wo } \pi_k = \frac{\partial z}{\partial y_k},$$

und seien

$$(8) \qquad Y_1 \cdots Y_q \cdots Y_{q'} \cdots Y_{q''}\, Q_{q'+1} \cdots Q_{q''}$$

bekannte kanonische Lösungen der Gleichungen $(Y_1\Phi)=0, \cdots (Y_q\Phi)=0$. Ich führe neue Variabeln ein durch die Gleichungen

$$y_k = x_k', \quad z = x_n', \quad \pi_k = -\frac{p_k'}{p_n'}$$

und verwandle hierdurch das vorgelegte Involutionssystem in ein System nullter Ordnung

$$X_1' = \alpha_1, \cdots X_q' = \alpha_q.$$

Indem ich dieselbe Substitution in den Grössen (8) ausführe, erhalte ich aus denselben $2q''-q'$ Lösungen nullter Ordnung der Gleichungen

$$(9) \qquad (X_1'\Phi) = 0, \cdots (X_q'\Phi) = 0,$$

die verbunden mit der evidenten Lösung $p_n'$ eine Gruppe von der kanonischen Form

$$X_1 \cdots X_q \cdots X_{q'} \cdots X_{q''}\, P_{q'+1} \cdots P_{q''}\, P_{q''+1}$$

bilden. Liessen sich nun die fehlenden Lösungen von (9) einfacher als durch die Operationen (7) bestimmen, so hätte man eo ipso eine einfachere Integrationsmethode des Systems $Y_k = \alpha_k$ als die in § 3. auseinandergesetzte. Da nun aber das System $Y_k = \alpha_k$ nach den Ergebnissen des § 17. im Allgemeinen die Operationen (7) verlangt, so erkennen wir, dass auch das allgemeine System nullter Ordnung

$$X_1 = \alpha_1, \cdots X_q = \alpha_q,$$

mit den bekannten Lösungen

$$X_1 \cdots X_q \cdots X_{q'} \cdots X_{q''}\, P_{q'+1} \cdots P_{q''+1}$$

des Systems $(X_1\Phi) = 0, \ldots (X_q\Phi) = 0$, dieselben Operationen verlangt.

Hiermit ist gezeigt, dass die in dieser Abhandlung entwickelten Theorien das Grösstmögliche leisten, vorausgesetzt natürlich, dass die aufgestellten Axiome richtig sind.

Will man daher versuchen noch einfachere Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen 1. O. zu entdecken, so scheint es naturgemäss die Frage so zu stellen: *Sind die aufgestellten Axiome richtig?* Es ist übrigens möglich die Axiome 2 und 3 durch noch einfachere zu ersetzen, wie in Note 4 angedeutet wird.

## Note 1.

### Synthetische Betrachtungen über Theorem I.

Nachdem ich die neuen Integrationstheorien des ersten Abschnittes durch meine Theorie der infinitesimalen Transformationen gefunden hatte, wie im zweiten Abschnitte gezeigt worden ist, gelang es mir durch synthetische Betrachtungen die im ersten Abschnitte entwickelte einfache Begründung dieser Theorien aufzufinden. In dieser Note werde ich die einfachen synthetischen Ueberlegungen, die mich zu Theorem I. führten, auseinandersetzen.

Sei vorgelegt eine beliebige Gleichung nullter Ordnung

$$N_1(x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n) = 0$$

und seien $N_1 \ldots N_r$ bekannte Lösungen nullter Ordnung der Gleichung $(N_1 \Phi) = 0$. Ich setze überdies voraus, dass die Gleichungen

$$N_1 = \alpha_1 = \text{Const.}, \ \ldots \ N_r = \alpha_r = \text{Const.}$$

eine Schaar vereinigter Elemente bestimmen, die (Math. Ann. Bd. IX, p. 253) eine $M_{2n-1-r}$, oder wenn ich

$$2n - 1 - r = q$$

setze, eine $M_q$ bilden. Gebe ich den $\alpha_k$ benachbarte Werthe $\alpha_k + \Delta\alpha_k$, so erhalte ich eine benachbarte Elementmannigfaltigkeit, die $M_q'$ heissen mag. Und es ist einleuchtend, dass sowohl $M_q'$ wie $M_q$ von charakteristischen Streifen der vorgelegten Gleichung erzeugt ist.

Nehme ich nun ein beliebiges auf $M_q$ gelegenes Element, so liegt dasselbe im Allgemeinen nicht vereinigt mit den benachbarten Elementen der Mannigfaltigkeit $M_q'$. Es giebt im Allgemeinen $\infty^{q-1}$ Elemente, welche diese Bedingung erfüllen. Dieselben bilden eine Mannigfaltigkeit $M_{q-1}$, und nach meinen früheren Untersuchungen (Math. Ann. Bd. IX, p. 264, Satz 11) ist auch diese $M_{q-1}$ von charakteristischen Streifen erzeugt. Lassen wir die Verhältnisse der Grössen $\Delta\alpha_k$ variiren, so erhalten wir im Allgemeinen mehrfach unendlich viele Elementmannigfaltigkeiten $M_{q-1}$, die sämmtlich von charakteristischen Streifen erzeugt sind. Zwei solche $M_{q\ 1}$ haben im Allgemeinen $\infty^{q-2}$ Elemente gemein; die entsprechende $M_{q-2}$ ist wiederum von charakteristischen Streifen erzeugt u. s. w.

Es liesse sich leicht durch synthetische Betrachtungen nachweisen, dass eine fortgesetzte Anwendung der gegebenen Operationen zuletzt die charakteristischen Streifen giebt. Das Obenstehende genügt jedenfalls zum Nachweis des genauen Zusammenhangs zwischen Theorem I. meiner jetzigen Arbeit und Satz 11 meiner Abhandlung in Bd. IX. dieses Journals.

## Note 2.

## Zur Theorie der Berührungstransformationen.

Ich benutze diese Gelegenheit zur Erledigung einer Lücke in der Theorie der Berührungstransformationen, die sich zugleich in der verwandten Theorie der vollständigen Lösungen, so wie auch in der allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems fühlbar gemacht hat.

In allen diesen Theorien handelt es sich bekanntlich darum, eine Gleichung der Form

$$(1) \qquad p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = p_1' dx_1' + \cdots + p_n' dx_n'$$

in allgemeinster Weise zu befriedigen, dabei vorausgesetzt, dass $x_1' \ldots x_n'$ $p_1' \ldots p_n'$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n\ p_1 \ldots p_n$, die selbst unabhängige Variabeln sind, aufgefasst werden.

In früheren Arbeiten (Math. Ann. Bd. VIII, p. 238) habe ich gezeigt, dass die $x_i' p_i'$ die folgenden Relationen erfüllen

$$(x_i' x_k') = (x_i' p_k') = (p_i' p_k') = 0, \quad (x_i' p_i') = 1,$$

$$\sum_k p_k \frac{\partial x_i'}{\partial p_k} = 0, \qquad \sum_k p_k \frac{\partial p_i'}{\partial p_k} = p_i',$$

dass ferner Grössen $x_i' p_i'$, die diese Gleichungen befriedigen, die Bedingungsgleichung (1) erfüllen.

Schon längst kannte man eine andere allgemeine Methode zur Auffindung von Grössensystemen $x_i' p_i'$, welche die Gleichung (1) befriedigen. Man nehme in der That $q$ beliebige Relationen zwischen den $x_k$ und $x_i'$ an:

$$(2) \qquad \Omega_1 (x_1 \ldots x_n\ x_1' \ldots x_n') = 0, \ \ldots \ \Omega_q = 0$$

und setze sodann

$$(3) \qquad p_k = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}, \qquad p_k' = -\sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k'}.$$

Alsdann folgt durch Differentiation von (2)

$$\sum_k \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_k \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k'} dx_k' = 0$$

und durch Benutzung von (3)

$$\sum_k p_k dx_k - \sum_k p_k' dx_k' = 0.$$

Bestimmen daher die Gleichungen (2) und (3) die Grössen $x_i' p_i'$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n\ p_1 \ldots p_n$, so befriedigen die hervorgehenden Werthe $x_i' p_i'$ die Bedingungsgleichung (1).

Es ist aber denkbar, dass die Gleichungen (2) und (3) nicht die $x_i' p_i'$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n\ p_1 \ldots p_n$ bestimmen, sondern gewisse Relationen der Form

$$\psi(x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n) = 0$$

nach sich ziehen. Nach den obenstehenden Entwickelungen ist auch in diesem Falle die Gleichung (1) eine Consequenz von (2) und (3). Dieser Ausnahmfall, der früher kaum berücksichtigt worden ist, soll in dieser Note eingehend untersucht werden. Wir beweisen zunächst, dass sich aus (2) und (3) immer *ebensoviele* Relationen zwischen den Grössen $xp$ als zwischen den Grössen $x'p'$ herleiten lassen.

---

Um zu entscheiden, wie viele Relationen zwischen $x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n$ sich aus den Gleichungen

$$\Omega_1(x_1 \ldots x_n\, x_1' \ldots x_n') = 0, \ \ldots\ \Omega_q = 0,$$

$$p_k = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_k} + \cdots + \lambda_{q-1} \frac{\partial \Omega_{q-1}}{\partial x_k} + \lambda_q \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_k} = \frac{\partial W}{\partial x_k}$$

durch Elimination der Grössen $\lambda_1 \ldots \lambda_q\, x_1' \ldots x_n'$ herleiten lassen, hat man nach einer bekannten Regel die Determinante

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial \Omega_q}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1'} & \frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial x_n \partial x_1'} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_1'} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_n'} & \frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x_n'} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial x_n \partial x_n'} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n'} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial x_n'}
\end{vmatrix}$$

zu bilden. Verschwindet dieselbe nebst allen ihren Unterdeterminanten erster, zweiter, ... $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, während es jedenfalls eine nicht verschwindende Unterdeterminante $m^{\text{ter}}$ Ordnung giebt, so bestimmen die obenstehenden Gleichungen $m$, und auch nicht mehr als $m$ Relationen zwischen $x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n$.

Wünscht man andererseits zu wissen, wie viele Relationen zwischen $x_i' p_i'$ sich aus den Gleichungen

$$\Omega_1 = 0, \ \ldots\ \Omega_q = 0, \quad p_k' = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k'}$$

herleiten lassen, so muss man ganz analoge Betrachtungen anstellen. Man bildet die mit der obenstehenden analoge Determinante und untersucht, ob sie und ihre Unterdeterminanten verschwinden. Nun aber ist die neue Determinante mit der alten identisch, nur mit dem formalen Unterschiede, dass die Reihen und Colonnen vertauscht sind. Folglich

giebt es $m$ und auch nicht mehr Relationen zwischen $x_1' \ldots x_n' \; p_1' \ldots p_n'$. Dies giebt den

Satz. *Ist es möglich aus den Gleichungen*

$$\Omega_1(x_1 \ldots x_n \, x_1' \ldots x_n') = 0, \; \ldots \; \Omega_q = 0,$$

$$p_k = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}, \qquad p_k' = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k'}$$

*$m$ Relationen zwischen $x_1 \ldots x_n \, p_1 \ldots p_n$ herzuleiten, so ziehen diese Gleichungen immer auch genau dieselbe Anzahl Relationen zwischen $x_1' \ldots x_n' \, p_1' \ldots p_n'$ nach sich.*

---

Die Gleichungen (2) und (3) ziehen nach dem Obenstehenden immer die Relation

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = p_1' dx_1' + \cdots + p_n' dx_n'$$

nach sich. Fassen wir daher für einen Augenblick $x_1' \ldots x_n'$ als Parameter auf, so wird durch diese Gleichungen

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0.$$

Dies können wir so aussprechen, dass die Gleichungen

$$\Omega_1 = 0, \; \ldots \; \Omega_q = 0, \qquad p_k = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}$$

durch Elimination der $\lambda_i$ eine Anzahl Relationen zwischen $x_1 \ldots x_n$ $p_1 \ldots p_n$ und den Parametern $x_1' \ldots x_n'$ geben

$$\Theta_k(x_1 \ldots x_n \, p_1 \ldots p_n \, x_1' \ldots x_n') = 0,$$

welche die Gleichung $\sum_k p_k dx_k = 0$ identisch erfüllen. Eliminirt man sodann die $x_i'$, so lassen sich (Math. Ann. Bd. IX, p. 277) die hervorgehenden $m$ Relationen zwischen $x_1 \ldots x_n \, p_1 \ldots p_n$ auf die Form eines $m$-gliedrigen Involutionssystems bringen. Ich werde der Kürze wegen voraussetzen, dass dieses Involutionssystem sich nach $m$ von den Grössen $p$, etwa nach $p_1 \ldots p_m$ auflösen lässt, so dass es die Form

$$p_1 - h_1 = 0, \; \ldots \; p_m - h_m = 0 \tag{4}$$

annimmt, wo

$$(p_i - h_i, \, p_k - h_k) = 0$$

ist.

In ganz entsprechender Weise erkennt man, dass die $m$ zwischen $x_1' \ldots x_n' \, p_1' \ldots p_n'$ bestehenden Relationen sich auf die Form eines Involutionssystems, etwa

$$p_1' - h_1' = 0, \; \ldots \; p_m' - h_m' = 0, \text{ wo } (p_i' - h_i', \, p_k' - h_k') = 0$$

bringen lassen.

In die früher gefundene Relation

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = p_1' dx_1' + \cdots + p_n' dx_n'$$

substituiren wir statt $p_1 \ldots p_m\, p_1' \ldots p_m'$ die Werthe dieser Grössen, nämlich $h_1 \ldots h_m\, h_1' \ldots h_m'$. Dies giebt

$$\sum_{k=1}^{k=m} h_k dx_k + \sum_{k=m+1}^{k=n} p_k dx_k = \sum_{k=1}^{k=m} h_k' dx_k' + \sum_{k=m+1}^{k=n} p_k' dx_k',$$

in welcher Gleichung sowohl die linke, wie die rechte Seite eine $(n-m)$-gliedrige Form annehmen kann. Da nämlich (4) ein Involutionssystem ist, so giebt es solche Functionen $\Phi_1 \ldots \Phi_{n-m}\, F_1 \ldots F_{n-m}$ von $x_1 \ldots x_n$ $p_{m+1} \ldots p_n$, dass

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{k=m} h_k dx_k + \sum_{k=m+1}^{k=n} p_k dx_k = \Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-m} dF_{n-m}$$

wird. Ebenso seien $\Phi_1' \ldots \Phi_{n-m}'\, F_1' \ldots F_{n-m}'$ Functionen von $x_1' \ldots x_n'$ $p_{m+1}' \ldots p_n'$, die

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{k=m} h_k' dx_k' + \sum_{k=m+1}^{k=n} p_k' dx_k' = \Phi_1' dF_1' + \cdots + \Phi_{n-m}' dF_{n-m}'$$

ergeben. Hierdurch kommt

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-m} dF_{n-m} = \Phi_1' dF_1' + \cdots + \Phi_{n-m}' dF_{n-m}'.$$

Lässt man hier die $\Phi_i F_i$ ein bestimmtes Grössensystem, das (5) befriedigt, bedeuten, so kann man immer unter den Grössensystemen $\Phi_i' F_i'$, die (6) befriedigen, ein solches wählen, dass

$$\Phi_i = \Phi_i', \quad F_i = F_i'$$

wird.

Aus den Gleichungen (2), (3) lassen sich daher jedenfalls $2n$ unabhängige Relationen zwischen $x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n$ und $x_1' \ldots x_n'\, p_1' \ldots p_n'$ herleiten, nämlich

$$p_k - h_k = 0, \quad p_k' - h_k' = 0, \quad \Phi_i = \Phi_i', \quad F_i = F_i'.$$

Es fragt sich, ob man noch mehr solche Relationen finden kann. Um diese Frage zu beantworten, berücksichtigen wir, dass $\Omega_1 \ldots \Omega_q$ unabhängige Functionen von $x_1 \ldots x_n\, x_1' \ldots x_n'$ sind, und dass daher die Gleichungen

$$p_k = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}, \qquad p_k' = -\sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k'}$$

sich hinsichtlich $\lambda_1 \ldots \lambda_q$ auflösen lassen. Hieraus schliessen wir, dass diese Gleichungen verbunden mit $\Omega_1 = 0, \ldots \Omega_q = 0$ nicht mehr als $2n$ von den $\lambda_i$ freie Relationen geben können.

Berücksichtigen wir endlich, dass die Grössen $\Phi_i$ und $F_i$ wegen (5) die Relationen

$$(p_i - h_i, \Phi_k) = 0, \quad (p_i - h_i, F_k) = 0,$$
$$(\Phi_i \Phi_k) = (\Phi_i F_k) = (F_i F_k) = 0, \quad (F_k \Phi_k) = 1$$

erfüllen, und dabei hinsichtlich der $p$ homogen bez. von erster und nullter Ordnung sind, so können wir das folgende Theorem aussprechen:

Theorem XV. *Aus den Gleichungen*

$$\Omega_1 (x_1 \ldots x_n x_1' \ldots x_n') = 0, \ldots \Omega_q = 0,$$
$$p_k = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}, \qquad p_k' = -\sum_i \lambda_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_k'}$$

*lassen sich immer $2n$ und niemals mehr Relationen zwischen den Grössen $x_1 \ldots p_n x_1' \ldots p_n'$ ableiten. Können diese Relationen hinsichtlich $x_1' \ldots p_n'$, und demzufolge auch hinsichtlich $x_1 \ldots p_n$ aufgelöst werden, so bestimmen sie eine gewöhnliche Berührungstransformation. Lassen sich dagegen aus ihnen $m$ Relationen zwischen $x_1 \ldots p_n$ herleiten, so sind auch $x_1' \ldots p_n'$ durch $m$ Relationen verbunden. Diese beiden $m$-gliedrigen Gleichungssysteme sind, aufgefasst als partielle Differentialgleichungen, $m$-gliedrige Involutionssysteme. Seien*

$$p_1 = h_1, \ldots p_m = h_m \text{ und } p_1' = h_1', \ldots p_m' = h_m'$$

*diese Involutionssysteme. Die fehlenden $2n - 2m$ Relationen zwischen $x_1 \ldots p_n x_1' \ldots p_n'$ können dann die Form erhalten*

$$F_i = F_i', \quad \Phi_i = \Phi_i', \quad (i = 1 \ldots n - m),$$

*wo $F_i$ und $\Phi_i$ Functionen bez. nullter und erster Ordnung von $x_1 \ldots p_n$, welche die Gleichungen*

$$(p_i - h_i, F_k) = 0, \quad (p_i - h_i, \Phi_k) = 0,$$
$$(F_i F_k) = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0, \quad (F_i \Phi_i) = 1$$

*erfüllen, wo ferner $F_i'$ und $\Phi_i'$ Functionen von $x_1' \ldots p_n'$ sind, welche die entsprechenden Relationen erfüllen.*

Dieses Theorem bleibt mit den nothwendigen Aenderungen noch bestehen, wenn die beiden Involutionssysteme, welche die zwischen $x_1 \ldots p_n$ und die zwischen $x_1' \ldots p_n'$ bestehenden Relationen ausdrücken, sich nicht auf die specielle Form $p_k = h_k$ und $p_k' = h_k'$ bringen lassen.

## Note 3.

### Zur Theorie des Integrabilitätsfactors.

Ich werde zunächst Theorem V. durch mehrere möglichst einfache Beispiele illustriren.

Sei

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

die allgemeine *homogene* Differentialgleichung 1. O. Ziehe ich eine Gerade durch den Anfangspunkt und construire zu jeder Integralcurve die Tangente in ihrem Schnittpunkte mit dieser Geraden, so sind alle diese Tangenten parallel. Hieraus liesse sich mit voller Stringenz schliessen, dass jede Integralcurve durch eine beliebige Aehnlichkeitstransformation, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist:

$$x' = \alpha x, \quad y' = \alpha y,$$

insbesondere also durch die infinitesimale Transformation

$$\delta x = x\delta t, \quad \delta y = y\delta t$$

in eine neue Integralcurve übergeführt wird. Man verificirt übrigens, dass unsere Differentialgleichung die betreffende inf. Transformation gestattet, indem man in

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{X}{X\eta - Y\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Y}{X\eta - Y\xi}\right)$$

die Substitution

$$X = 1, \quad Y = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad \xi = x, \quad \eta = y$$

macht, und sich überzeugt, dass der hervorgehende Ausdruck identisch verschwindet. Hiermit ist der folgende, übrigens längst bekannte Satz bewiesen:

Satz. *Ist die Gleichung* $Ydx - Xdy = 0$ *homogen, so ist* $\frac{1}{Xy - Yx}$ *ein Integrabilitätsfactor.*

Als zweites Beispiel betrachte ich die lineare Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0. \tag{1}$$

Auch jetzt ist es leicht eine Transformation und zwar zunächst eine endliche anzugeben, welche jede Integralcurve in eine solche transformirt. Es sei nämlich $z$ eine Function, welche die reducirte Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + Xy = 0$$

befriedigt, das heisst es sei

$$z = e^{-\int X dx}.$$

Ist dann $y = y_1$ irgend eine Lösung von (1), so ist bekanntlich auch $y = y_1 + cz$, wo $c$ eine beliebige Constante bezeichnet, eine Lösung. Dies kommt darauf hinaus, dass die Transformation

$$y' = y + cz = y + ce^{-\int X dx},$$
$$x' = x$$

jede Integralcurve von (1) in eine solche überführt. Wählen wir insbesondere $c$ infinitesimal, so erhalten wir eine infinitesimale Transformation

$$\delta y = e^{-\int X dx} \cdot \delta t, \quad \delta x = 0,$$

welche (1) invariant lässt. Folglich ist, wenn wir setzen

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -(Xy + X_1) \\ 0 & e^{-\int X dx} \end{vmatrix} = e^{-\int X dx},$$

die Grösse $\frac{1}{\Delta}$, das heisst $e^{\int X dx}$, ein Integrabilitätsfactor. Also:

*Die lineare Gleichung* $dy + (Xy + X_1)dx = 0$ *wird durch Multiplication mit* $e^{\int X dx}$ *ein vollständiges Differential.*

Sei endlich $Xdy - Ydx = 0$ eine vorgelegte Differentialgleichung, deren Integralcurven durch eine infinitesimale Rotation um den Anfangspunkt

$$\delta x = y\delta t, \quad \delta y = -x\delta t$$

unter sich vertauscht werden. Alsdann ist die Determinante $\Delta$ gleich $Xx + Yy$. Dies giebt:

*Gestattet die Gleichung* $Xdy - Ydx = 0$ *eine infinitesimale Rotation um den Anfangspunkt, so ist* $\frac{1}{Xx+Yy}$ *ein Integrabilitätsfactor.*

Dieser Satz erlaubt z. B. die Krümmungslinien einer Schraubenfläche zu bestimmen. Wählen wir nämlich die Schraubenaxe als $z$-Axe, und schreiben die Gleichung der Fläche in der Form

$$z = f(xy),$$

so definirt die bekannte Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$[pqt - (1+q^2)s]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\frac{dy}{dx} + [(1+p^2)s - pqr] = 0$$

die Projectionen dieser Curven auf einer zur Schraubenaxe senkrechten Ebene. Wir führen die infinitesimale Schraubenbewegung aus, welche die Fläche in sich verschiebt. Hierbei werden die Krümmungslinien und also auch die Projectionen dieser Curven unter sich vertauscht, und zwar werden die Projectionen durch eine infinitesimale Rotation transformirt. Bringen wir daher die obenstehende Differentialgleichung auf die Form $Xdy - Ydx = 0$, so ist $\frac{1}{Xx+Yy}$ ein Integrabilitätsfactor.

In ganz entsprechender Weise findet man die Krümmungslinien, oder die Haupttangentencurven auf einer jeden Fläche, die eine beliebige lineare Transformation, welche den imaginären Kugelkreis invariant lässt, gestattet.

Hier mag auch die Bemerkung ihren Platz finden, dass unsere Betrachtungen sich ohne weiteres auf infinitesimale Berührungstransformationen ausdehnen lassen. Gestattet nämlich die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(xy)$$

die inf. *Berührungs*transformation

$$\delta x = \xi\left(xy\,\frac{dy}{dx}\right)\delta t, \quad \delta y = \eta\left(xy\,\frac{dy}{dx}\right)\delta t, \quad \delta\frac{dy}{dx} = \zeta\left(xy\,\frac{dy}{dx}\right)\delta t,$$

so ist es klar, dass sie auch die infinitesimale *Punkt*transformation

$$\delta x = \xi\,(xyf)\,\delta t, \quad \delta y = \eta\,(xyf)\,\delta t$$

gestattet; und folglich ist $\frac{1}{X\eta - Y\xi}$ ein Integrabilitätsfactor*).

## Geometrische Interpretation des Integrabilitätsfactors.

Sei $\delta x = \xi\,\delta t$, $\delta y = \eta\,\delta t$ eine infinitesimale Transformation, welche $Y dx - X dy = 0$ in sich selbst überführt. Ich wähle einen beliebigen Punkt $x$, $y$, ziehe die Tangente zu der hindurchgehenden Integralcurve, und trage vom Punkte $x$, $y$ aus auf derselben die Länge $\sqrt{X^2 + Y^2}$ ab. Die Projectionen dieser Linie längs der $x$ und $y$-Axe sind bez. $X$ und $Y$. Ich ziehe ferner die Gerade, nach welcher unser Punkt sich vermöge der infinitesimalen Transformation bewegt, und trage auf derselben die Länge $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ mit den Projectionen $\xi$ und $\eta$ ab. Die beiden besprochenen Geraden bestimmen ein Parallelogramm, dessen Flächenraum bekanntlich gleich $X\eta - Y\xi$, das heisst gleich dem inversen Integrabilitätsfactor ist. Zuweilen ist es noch bequemer anstatt dieses Parallelogramms das äquivalente Rechteck zu betrachten, dessen Seiten bez. $\sqrt{X^2 + Y^2}$ und die Projection $\Delta N$ der Geraden $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ auf die Normale sind. Also

*Der Integrabilitätsfactor der Gleichung $X dy - Y dx = 0$ ist gleich dem reciproken Inhalte eines Rechteckes, dessen eine Seite die Länge $\sqrt{X^2 + Y^2}$ auf der Tangente ist, während die andere der Distanz im betreffenden Punkte $xy$ zwischen der hindurchgehenden Integralcurve und einer benachbarten proportional ist***).

Sind z. B. die Integralcurven Parallelcurven, so ist die genannte Distanz constant, und der Integrabilitätsfactor somit gleich $\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$.

---

*) Es ist klar, dass diese Bemerkung sich auf beliebige totale Gleichungen: $X_1 dx_1 + \cdots + X_n dx_n = 0$ ausdehnen lässt.

**) Der Jacobi'sche Multiplicator einer linearen partiellen Differentialgleichung gestattet eine ähnliche Interpretation.

Die gefundene geometrische Interpretation des Integrabilitätsfactors erlaubt eine jede Gleichung

$$X dy - Y dx = 0,$$

deren Integralcurven *isotherme* Curven sind, zu integriren. Nach unserer Voraussetzung ist es nämlich möglich, die Ebene $xy$ in der Weise mit consecutiven Integralcurven und Trajectorien zu bedecken, dass für einen beliebig gewählten Punkt die Distanz zwischen zwei benachbarten Integralcurven gleich der Distanz zwischen den beiden benachbarten Trajectorien ist. Bringt man daher die Differentialgleichung der Trajectorien auf die Form

$$X dx + Y dy = 0,$$

so haben unsere beiden Differentialgleichungen einen gemeinsamen Integrabilitätsfactor $M$, den man folgendermassen findet. $M$ genügt den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(MY)}{\partial x} - \frac{\partial(MX)}{\partial y} = 0$$

oder ausgeführt

$$X\frac{\partial M}{\partial x} + Y\frac{\partial M}{\partial y} + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0,$$

$$Y\frac{\partial M}{\partial x} - X\frac{\partial M}{\partial y} + M\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0,$$

woraus

$$\frac{\partial}{\partial x}\log M = \frac{-X\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - Y\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)}{X^2 + Y^2} = A,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\log M = \frac{-Y\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + X\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)}{X^2 + Y^2} = B,$$

und

$$M = e^{\int (A dx + B dy)}.$$

Hiermit ist ein Integrabilitätsfactor durch eine Quadratur gefunden. Also:

*Weiss man, dass die Integralcurven einer vorgelegten Gleichung* $X dy - Y dx = 0$ *isotherme Curven in der* $xy$*-Ebene sind, so findet man einen Integrabilitätsfactor vermöge einer Quadratur; eine zweite Quadratur giebt die Integralcurven selbst.*

Sind zwei Gleichungen

$$X dy - Y dx = 0, \quad X' dy' - Y' dx' = 0$$

vorgelegt, die zwei Integrabilitätsfactoren $M$ und $M'$ besitzen, deren Verhältniss eine bekannte Function von $x$ und $y$ ist

$$\frac{M'}{M} = \varphi(xy),$$

so verlangt die Bestimmung von $M'$ und $M$ nur eine Quadratur. Es gelten nämlich die beiden Relationen

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(M\varphi X')}{\partial x} + \frac{\partial(M\varphi Y')}{\partial y} = 0,$$

welche die Differentialquotienten von $\log M$ hinsichtlich $x$ und $y$ bestimmen. Eine jede der vorgelegten Differentialgleichungen lässt sich daher durch zwei Quadraturen erledigen. Diese Bemerkung erlaubt, wie ich nicht näher auszuführen brauche, eine Schaar isothermer Curven, die auf irgend einer Fläche liegen, und durch eine Gleichung

$$Xdy - Ydx = 0$$

definirt sind, vermöge zwei consecutiver Quadraturen zu bestimmen. Schneidet man z. B. eine beliebige Minimalfläche durch parallele Ebenen, so bilden die Schnittcurven, und also auch die Trajectorien derselben eine Schaar isothermer Curven. Daher können die letzten Curven durch zwei Quadraturen bestimmt werden. Man kann ferner allein aus dem Umstande, dass die Krümmungslinien oder Haupttangentencurven einer Minimalfläche isotherme Curven sind, eine Methode zu ihrer Bestimmung herleiten. *Hierbei ist es nicht nothwendig, wie man sonst pflegt, zuerst die auf der Fläche gelegenen Curven, deren Länge gleich Null ist, zu bestimmen.*

## Note 4.

Ich werde andeuten, wie man die durch meinen zweiten Forderungssatz festgestellten Voraussetzungen durch noch allgemeinere ersetzen kann. Dabei beschränke ich mich der Kürze wegen auf Gleichungen der Form

(1) $$f(z\,x\,y\,p\,q) = 0.$$

Ich setze wie gewöhnlich

(2) $$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

und bilde die Gleichungen

(3) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial q}s = 0,$$

(4) $$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial p}s + \frac{\partial f}{\partial q}t = 0.$$

Ich suche das allgemeinste vollständige System zwischen den unabhängigen Variabeln $z\,x\,y\,p\,q\,r\,s\,t$, welches jede Berührungstransformation gestattet, die (1) und in Folge dessen (3) und (4) invariant lässt. Ich habe gefunden, was ich hier nicht näher ausführe, dass es

nur ein solches System giebt, dessen Integration keine ausführbare Operation ist, diejenige Gleichung nämlich, die die charakteristischen Streifen bestimmt *). Hätte man die Differentialquotienten dritter, vierter, ... $m^{ter}$ Ordnung von $z$ mitgenommen, so würde man ebenso nur diejenige Gleichung, die die charakteristischen Streifen bestimmt, erhalten haben.

Für Gleichungen mit $n$ unabhängigen Variabeln gilt ein entsprechender Satz.

Christiania, 15. October 1876.

---

*) Indem ich die schönen Untersuchungen von Bäcklund in diesem Journale (Bd. IX) berücksichtige, kann ich sagen, dass die Gleichung der charakteristischen Streifen das einzige vollständige System ist, das eine jede Transformation zwischen $z\,x\,y\,p\,q\,r\,s\,t$ gestattet, die (1) und (2) invariant lässt.

# Zur Theorie des Logarithmischen und des Newton'schen Potentials*).

Von C. Neumann in Leipzig.

## § 1.

### Erste Mittheilung.

Unter diesem Titel beabsichtige ich eine Reihe von Mittheilungen zu machen über die vielfach behandelten Probleme der conformen Abbildung, des stationären Temperaturzustandes, des elektrostatischen und elektrodynamischen Gleichgewichts, und *gewisse allgemeine, von der Wahl eines geeigneten Coordinatensystems unabhängige Methoden* darzulegen, durch welche diese Probleme fast in allen Fällen gelöst werden können, wie die Begrenzung des zu behandelnden Gebietes auch beschaffen sein mag.

Ich werde diese Methoden, welche nicht nur zur Vermeidung des (mit Recht für bedenklich erklärten) Dirichlet'schen Princips, sondern auch in vielfachen andern Beziehungen von Wichtigkeit sein dürften, hier nur in flüchtigen Umrissen hinzeichnen; die dabei erforderlichen Begründungen, Entwicklungen und Beweise aber einer andern ausführlicheren Exposition vorbehalten.

---

Die unendliche Ebene mag — nach dem Vorgange Riemann's — angesehen werden als eine *geschlossene* Fläche, etwa als eine unendlich grosse Kugelfläche. Auf dieser Fläche sei eine in sich zurücklaufende Curve $S$ gegeben, welche mit all' ihren Punkten in der Endlichkeit liegt. Von den beiden Theilen, in welche die geschlossene Fläche durch diese Curve zerlegt wird, mag der den unendlich fernen Punkt der Fläche enthaltende Theil mit $\mathfrak{Q}$, der andere mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden.

---

*) Aus den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. der Wiss. vom 21. April und 31. October 1870.

Das Problem der conformen Abbildung kann bekanntlich mit Bezug auf die Fläche $\mathfrak{P}$ angesehen werden als ein Specialfall von folgendem *allgemeinern Problem:*

*Es soll eine Function $\varphi$ der rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$ ermittelt werden, welche I) innerhalb $\mathfrak{P}$ überall der Gleichung* $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$ *genügt, welche II) sammt ihren Ableitungen* $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ *innerhalb $\mathfrak{P}$ überall eindeutig und stetig ist, und welche endlich III) am Rande von $\mathfrak{P}$, d. i. auf der Curve $S$ vorgeschriebene Werthe $f$ besitzt.*

Um andrerseits das Problem der conformen Abbildung mit Bezug auf die Fläche $\Omega$ aussprechen zu können, bedarf es einiger Vorbereitungen. Es seien $x$, $y$ die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen zu $\Omega$ gehörigen Punktes, und es werde gesetzt:

$$(x+iy)(\xi+i\eta)=1, \quad (i=\sqrt{-1}),$$

mithin

$$x=\frac{+\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \xi=\frac{+x}{x^2+y^2},$$

$$y=\frac{-\eta}{\xi^2+\eta^2}, \quad \eta=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Alsdann werden durch Angabe $\xi$, $\eta$ die Werthe von $x$, $y$ eindeutig bestimmt sein. Man kann daher als Coordinaten eines zu $\Omega$ gehörigen Punktes die Grössen $x$, $y$, mit demselben Recht aber auch die Grössen $\xi$, $\eta$ benutzen. Bei Einführung dieser neuen Coordinaten $\xi$, $\eta$ lässt sich nun das Problem der conformen Abbildung mit Bezug auf die Fläche $\Omega$, oder vielmehr das zugehörige *allgemeinere Problem* folgendermassen aussprechen:

*Es soll eine Function $\psi$ der Coordinaten $x$, $y$ oder $\xi$, $\eta$ ermittelt werden, welche I) innerhalb $\Omega$ überall der Gleichung* $\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=0$ *Genüge leistet, welche II) sammt ihren Ableitungen* $\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$ *innerhalb $\Omega$ überall eindeutig und stetig ist, und welche endlich III) am Rande von $\Omega$, d. i. auf der Curve $S$ die vorgeschriebenen Werthe $f$ besitzt. Der grösseren Bequemlichkeit willen mag angenommen werden, dass diese vorgeschriebenen Randwerthe $f$ für $\psi$ dieselben sind, wie für $\varphi$.*

Was nun die Lösung dieser beiden Probleme anbelangt, so mag — wenigstens vorläufig — vorausgesetzt werden, dass die gegebene Curve $S$ überall convex und überall stetig gekrümmt sei, andrerseits, dass die vorgeschriebenen Werthe $f$ längs der Curve $S$ überall stetig zusammenhängen.

Als positive Richtung der Curve $S$ werde diejenige festgesetzt, welche angezeigt ist durch eine positive Umlaufung der Fläche $\mathfrak{P}$.

Gleichzeitig mögen die in positiver Richtung aufeinanderfolgenden Punkte der Curve bezeichnet werden mit

$$a, b, c, d, \ldots s, \ldots;$$

demgemäss werden $ab$, $bc$, $cd$, ... die aufeinanderfolgenden unendlich kleinen Elemente der Curve vorstellen. Endlich mögen unter

$$f_a, f_b, f_c, f_d, \ldots f_s, \ldots$$

die Werthe verstanden werden, welche die gegebene Function $f$ besitzt in jenen Punkten $a, b, c, d, \ldots s, \ldots$

---

Es sei $z$ ein beliebig gegebener (innerhalb $\mathfrak{P}$, oder innerhalb $\Omega$, oder auch auf der Curve $S$ gelegener) Punkt; ferner seien $za$, $zb$, $zc$, $zd$, ... die von $z$ aus nach den einzelnen Punkten der Curve gezogenen Radiivectores. Unter dem *Moment des Curvenelements ab in Bezug auf z* mag diejenige Drehung verstanden werden, welche für den Radiusvector $za$ durch jenes Element $ab$ indicirt ist. Ist also $\vartheta$ der absolute Betrag des Winkels $azb$, so wird jenes Moment den Werth $+\vartheta$ oder den Werth $-\vartheta$ besitzen, jenachdem der Radiusvector $za$ bei Durchlaufung des Winkelraumes $azb$ eine positive oder eine negative Drehung auszuführen hat. Bezeichnet man diese den einzelnen Elementen

$$ab, bc, cd, \ldots$$

mit Bezug auf $z$ zugehörigen Momente mit

$$(ab)_z, (bc)_z, (cd)_z, \ldots,$$

und bezeichnet man ferner die Summe aller dieser Elementarmomente mit $\Sigma_z$

$$\Sigma_z = (ab)_z + (bc)_z + (cd)_z + \cdots,$$

so wird, wie leicht zu erkennen, der Werth von $\Sigma_z$ sehr verschieden sein je nach der Lage des Punktes $z$, nämlich $= 2\pi$, $= \pi$ oder $= 0$ sein, jenachdem der Punkt $z$ innerhalb $\mathfrak{P}$, auf $S$ oder innerhalb $\Omega$ sich befindet.

Unter dem *Moment der gegebenen Function f in Bezug auf z* mag verstanden werden die Summe sämmtlicher Elementarmomente der gegebenen Curve $S$, jedes multiplicirt mit dem zugehörigen Werthe $f$.

Dieses Moment, es mag $\Omega_z$ heissen, wird also den Werth haben:

$$\Omega_z = f_a(ab)_z + f_b(bc)_z + f_c(cd)_z + \cdots,$$

die Summation ausgedehnt über sämmtliche Elemente der Curve. Der Punkt $z$ kann drei wesentlich verschiedene Lagen besitzen, und mag demgemäss verschieden bezeichnet werden, nämlich mit $p$, mit $s$, oder mit $q$, je nachdem er innerhalb $\mathfrak{P}$, auf $S$, oder innerhalb $\Omega$ sich be-

findet. Entsprechend diesen verschiedenen Lagen des Punktes $z$ sind bei dem Momente $\Omega_z$ dreierlei Werthe zu unterscheiden, die Werthe $\Omega_p$, $\Omega_s$ und $\Omega_q$. Diese Werthe gehen keineswegs stetig in einander über, und mögen daher zur leichtern Unterscheidung durch verschiedene Buchstaben markirt werden; es werde nämlich gesetzt:

$$\Omega_p = U_p, \quad \Omega_s = V_s, \quad \Omega_q = W_q.$$

Halten wir fest an der schon genannten Voraussetzung, dass $f$ längs $S$ stetig ist, so sind die Functionen $U_p$, $V_s$, $W_q$ ebenfalls stetig, und zwar die erste für sämmtliche Punkte $p$, die zweite für sämmtliche Punkte $s$, endlich die dritte für sämmtliche Punkte $q$. Zugleich treten in Betreff dieser Functionen folgende merkwürdige Relationen*) zu Tage:

$$U_s = V_s + \pi f_s.$$
$$W_s = V_s - \pi f_s,$$

Dabei ist unter $s$ ein beliebiger Punkt der Curve $S$ zu verstehen; $f_s$ und $V_s$ sind die *Werthe* der Functionen $f$ und $V$ in diesem Punkt; andererseits repräsentiren $U_s$ und $W_s$ die *Grenzwerthe*, gegen welche $U_p$ und $W_q$ convergiren, falls die Punkte $p$ und $q$ näher und näher an $s$ heranrücken.

Zweckmässig erscheint es, die Bezeichnung der Momente $U_p$, $V_s$, $W_q$ noch ein wenig zu modificiren, nämlich zu setzen:

$$\frac{U_p}{2\pi} = u_p, \quad \frac{V_s}{\pi} = v_s, \quad \frac{W_q}{2\pi} = w_q,$$

jenen Momenten also einen gewissen Divisor beizugesellen, welcher für $U$ und $W$ den Werth $2\pi$, für $V$ hingegen den Werth $\pi$ besitzt. In unmittelbarem Anschluss an eine allgemein übliche Ausdrucksweise, mag es gestattet sein, die Grösse $u_p$ zu bezeichnen als das *arithmetische Mittel der gegebenen Functionswerthe $f$ in Bezug auf den Punkt $p$.* Und ebenso mögen $v_s$ und $w_q$ bezeichnet werden als die *arithmetischen Mittel jener Werthe $f$ in Bezug auf $s$ und $q$.*

Bei Einführung dieser *arithmetischen Mittel* an Stelle der *Momente* gewinnen die vorhin angegebenen Relationen folgende Gestalt:

$$2u_s = v_s + f_s,$$
$$2w_s = v_s - f_s.$$

*) Der strenge Beweis dieser Relationen wird ungemein erleichtert durch Benutzung eines eleganten von P. du Bois-Reymond gefundenen Satzes (Borch. Journal Bd. 69, p. 82), für welchen später eine einfachere Deduction gegeben worden ist von H. Hankel (Schlömilch's Zeitschrift Jahrg. 14, p. 436), vgl. auch Meyer's Aufsatz (Math. Annalen Bd. VI, p. 313).

Ebenso wie aus den gegebenen Werthen $f$ die Functionen

$$u_p,\ v_s,\ w_q$$

abgeleitet wurden; in genau derselben Weise mögen aus den Werthen $v$ die Functionen

$$u_p',\ v_s',\ w_q'$$

entspringen [so dass also unter $u_p'$, $v_s'$, $w_q'$ die arithmetischen Mittel der Werthe $v$ in Bezug auf die Punkte $p$, $s$, $q$ zu verstehen sind]; in genau derselben Weise mögen ferner aus den Werthen $v'$ die Functionen

$$u_p'',\ v_s'',\ w_q''$$

entspringen; u. s. w. u. s. w.

Nun lässt sich nachweisen, dass die Functionen

$$f_s,\ v_s,\ v_s',\ v_s'',\ \ldots\ v_s^{(n)},\ \ldots$$

*in stetiger Weise gegen eine Constante convergiren*, nämlich nachweisen, dass sämmtliche Werthe der Function $v_s^{(n)}$ von einander um weniger als eine a priori gegebene beliebig kleine Grösse differiren werden, falls man nur $n$ gehörig gross macht. Um auf diesen Gegenstand genauer eingehen zu können, mögen $a$ und $s$ irgend zwei Punkte der gegebenen Curve $S$ sein, von denen der erstere nach Belieben gewählt, aber *fest*, der zweite hingegen längs der Curve *beweglich* ist. Alsdann lässt sich nachweisen, dass bei einer solchen Bewegung des Punktes $s$ die Differenz

$$v_s^{(n)} - v_a^{(n)}$$

ihrem absoluten Betrage nach niemals grösser werden kann als das Product

$$(M-m)\,\varkappa^{n+1}.$$

Hier ist $M-m$ eine den gegebenen Functionswerthen $f$ eigenthümliche Constante; denn es bedeutet $M$ den *grössten*, und $m$ den *kleinsten* unter jenen Werthen. Andererseits ist $\varkappa$ eine der gegebenen Curve $S$ eigenthümlich zugehörige Constante, welche leicht genauer definirt werden kann, und deren Werth nothwendig *kleiner* als 1, nämlich jederzeit ein *positiver ächter Bruch ist*. Somit kann das Product

$$(M-m)\,\varkappa^{n+1}$$

durch Vergrösserung von $n$ beliebig nahe an 0 herangedrückt werden, wodurch alsdann gleichzeitig sämmtliche Werthe von $v_s^{(n)}$ beliebig nahe an $v_a^{(n)}$ herangedrückt werden.

---

Nunmehr endlich kann die Lösung der vorgelegten Probleme augenblicklich hingestellt werden. Die Werthe nämlich, welche die gesuchten

Functionen $\varphi$ und $\psi$ in irgend zwei Punkten $p$ und $q$ besitzen, sind folgende:

$$\varphi_p = v_a^{(2n+1)} + 2\left[u_p - u'_p + u''_p - u'''_p \cdots - u_p^{(2n+1)}\right],$$
$$\psi_q = v_a^{(2n+1)} - 2\left[w_q + w'_q + w''_q + w'''_q \cdots + w_q^{(2n+1)}\right],$$

wo $v_a^{(2n+1)}$ den Werth der Function $v_s^{(2n+1)}$ in dem (vorhin genannten) *festen* Punkte $a$ repräsentirt, mithin eine *Constante* ist. Es lässt sich nämlich zeigen, dass die durch diese Formeln bestimmten Functionen $\varphi_p$ und $\psi_q$ einerseits den Bedingungen I) und II) mit absoluter Strenge entsprechen, und dass sie andrerseits, was die Bedingung III) betrifft, Randwerthe besitzen, deren Abweichungen von den vorgeschriebenen Randwerthen $f$ nirgends grösser sein können als

$$(M-m)\,\varkappa^{2n+2}.$$

Während also die Bedingungen I) und II) beständig in absoluter Strenge befriedigt sind, kann gleichzeitig, durch Vergrösserung der Zahl $n$, die Bedingung III) in jedem gewünschten Grade der Annäherung erfüllt werden.

Zu bemerken ist, dass die Functionen $\varphi_p$ und $\psi_q$ mit Leichtigkeit sich darstellen lassen als die Logarithmischen Potentiale einer gewissen *Massenbelegung* der Curve $S$. Man findet nämlich:

$$\varphi_p = v_a^{(2n+1)} + \int ds\, \varrho_s^{(2n)} L_{sp},$$
$$\psi_q = v_a^{(2n+1)} + \int ds\, \varrho_s^{(2n)} L_{sq},$$

die Integrationen hinerstreckt über alle Elemente $ds$ der Curve $S$. Dabei sind unter $L_{sp}$ und $L_{sq}$ die natürlichen Logarithmen derjenigen Abstände zu verstehen, welche $ds$ besitzt von $p$ und von $q$ aus. Die Function $\varrho_s^{(2n)}$ repräsentirt die Dichtigkeit der genannten Massenbelegung, und besitzt einen Werth, welcher darstellbar ist nach Belieben entweder durch die Formel

$$\varrho_s^{(2n)} = \frac{2}{\pi} \frac{\partial\left[u_s + u''_s + u''''_s \cdots + u_s^{(2n)}\right]}{\partial N},$$

oder durch die Formel:

$$\varrho_s^{(2n)} = \frac{2}{\pi} \frac{\partial\left[w_s + w''_s + w''''_s \cdots + w_s^{(2n)}\right]}{\partial N},$$

wo $N$ die auf $ds$ errichtete, in die Fläche $\mathfrak{B}$ hineinlaufende Normale repräsentiren soll.

Endlich mag bemerkt werden, dass die Functionen $\varphi_p$ und $\psi_q$ sich auch darstellen lassen als die Logarithmischen Potentiale gewisser *Doppelbelegungen* der Curve $S$. Man findet nämlich die Formeln:

$$\varphi_p = v_a^{(2n+1)} + \int \frac{ds\,[-f_s + v_s - v_s' \cdots + v_s^{(2n)}]}{\pi} \frac{\partial L_{sp}}{\partial N},$$

$$\psi_q = v_a^{(2n+1)} + \int \frac{ds\,[+f_s + v_s + v_s' \cdots + v_s^{(2n)}]}{\pi} \frac{\partial L_{sq}}{\partial N},$$

wo $L_{sp}$, $L_{sq}$, $N$ die schon genannten Bedeutungen besitzen, und die Integrationen hinerstreckt sind über sämmtliche Elemente $ds$ der Curve $S$.

---

Die hier exponirte Methode kann füglich bezeichnet werden als die *Methode des arithmetischen Mittels*. Sondern wir, was die gemachten Voraussetzungen anbelangt, diejenigen Voraussetzungen, welche nur leichte Modificationen bedingen, von denen ab, welche bei Anwendung dieser Methode unentbehrlich sind, so bleiben als wirklich nothwendige Voraussetzungen nur noch folgende übrig:

1) das betrachtete Flächengebiet darf nur *eine* Randcurve haben,
2) diese Randcurve muss *überall convex* sein.

Die durch diese Voraussetzungen ausgeschlossenen Fälle *mehrerer* Randcurven und *beliebig gestalteter* Randcurven lassen sich aber auf den hier behandelten Fall einer *einzigen, überall convexen* Randcurve reduciren. Die zu dieser Reduction erforderliche Methode, welche ihrer Beschaffenheit nach etwa zu bezeichnen sein würde als die *Methode der Combination*, beabsichtige ich in einer folgenden Mittheilung darzulegen. Sodann endlich gedenke ich die analogen Methoden zu exponiren für diejenigen Probleme, welche sich auf den *Raum*, d. i. auf ein Gebiet von *drei* Dimensionen beziehen.

## § 2.

## Zweite Mittheilung.

Bei den zunächst noch zu besprechenden Problemen der *Ebene* handelt es sich jedesmal um die Ermittelung einer Function der rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, welche gewissen charakteristischen Bedingungen Genüge leistet. Obwohl diese Bedingungen bereits in meiner *„ersten Mittheilung"* angegeben sind, so wird es doch zweckmässig sein, dieselben — sie mögen mit (II.) bezeichnet werden — hier nochmals in einfacherer und zugleich strengerer Form hinzustellen.

Mit Bezug auf eine in der Ebene beliebig gegebene, endliche oder unendliche Fläche $\mathfrak{T}$, von welcher nur vorauszusetzen ist, dass ihre *Rand*punkte sämmtlich im Endlichen liegen, lassen sich diese Bedingungen so aussprechen:

(II.) *Von einer Function wird verlangt, sie solle in ganzer Erstreckung der gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ eindeutig und gleichmässig stetig sein. — Ueberdies wird, falls die Fläche $\mathfrak{T}$ unendlich ist, gleichzeitig noch verlangt, der Werth der Function solle für sämmtliche Punkte, die ins Unendliche sich entfernen, convergiren gegen irgend eine endliche [jedoch nicht vorgeschriebene] Constante.*

*Ferner wird verlangt, dass die Ableitungen der Function eindeutig und gleichmässig stetig sind in Erstreckung eines jeden Gebietes, welches vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt, und dass gleichzeitig in Erstreckung eines jeden solchen Gebietes die Function der Gleichung genüge $\Delta = 0$.*

Unter den Ableitungen der Function sind dabei, falls die Function mit $\Phi$ bezeichnet wird, sämmtliche Ausdrücke:

$$\frac{\partial^{p+q}\Phi}{\partial x^p \partial y^q}$$

zu verstehen, in denen $p + q$ gleich 1 oder 2 ist; während andererseits unter der Gleichung $\Delta = 0$ die bekannte Differentialgleichung $\Delta\Phi = 0$, d. i. die Gleichung:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

zu verstehen ist. — Es mag bemerkt sein, dass diese Bedingungen (II.) und die aus ihnen fliessenden Consequenzen, um einen festen Anhaltpunkt zu gewinnen, in möglichst sorgfältiger Weise von mir erörtert worden sind in den Mathematischen Annalen, Bd. III, Seite 325.

In meiner *„ersten Mittheilung"* wurde der Fall ins Auge gefasst, dass die Fläche $\mathfrak{T}$ eine Fläche *einfachster Gattung* ist, dass sie nämlich nur eine einzige Randcurve besitzt, und dass diese Curve überall convex oder überall concav ist. In der That lässt sich zeigen, dass die damals angegebenen Operationen bei einer solchen Fläche einfachster Gattung, *falls der Rand derselben keine Eckpunkte hat*, zu einer Function führen, welche den eben genannten Bedingungen (II.) vollständig Genüge leistet, und ausserdem am Rande der Fläche vorgeschriebene Werthe besitzt. Selbstverständlich ist über diese vorgeschriebenen Randwerthe vorauszusetzen, dass sie eindeutig und gleichmässig stetig sind. — *Ist hingegen der Rand einer solchen Fläche mit einzelnen Eckpunkten behaftet*, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

A. Der Rand ist zusammengesetzt aus Linien, unter denen wenigstens eine sich befindet, die *gekrümmt* ist.

B. Der Rand besteht aus lauter *geraden* Linien.

Bα. Die Anzahl dieser Linien ist grösser als 4.

Bβ. Die Anzahl derselben ist $= 4$ oder $= 3$.

In den Fällen A. und Bα. führen die angegebenen Operationen mit geringen und leicht sich ergebenden Modificationen ebenfalls zum gewünschten Ziel. Im Falle Bβ. erscheinen hingegen dieselben nicht anwendbar, weil in diesem Falle die Convergenz des Verfahrens zweifelhaft wird. Mit voller Sicherheit jedoch kann dieser Fall Bβ. behandelt werden mit Hülfe der Methoden der Combination, von denen in meiner *„ersten Mittheilung"* bereits die Rede war, und die im Folgenden näher angegeben werden sollen. — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

Eine weitere Wiedergabe des nun folgenden ziemlich umfangreichen Inhalts dieser *„zweiten Mittheilung"* scheint mir indessen nicht zweckmässig zu sein, schon deswegen, weil ich in nicht mehr ferner Zeit den ganzen Gegenstand in sorgfältiger Ausarbeitung und zugleich in einer mehr ansprechenden Form darlegen zu können hoffe.

Leipzig, Februar 1877.

# Ueber einige elliptische Integrale.

Von

A. Enneper in Göttingen.

---

Bedeutet $c$ eine reelle Constante, so ist bekanntlich:

$$(1) \qquad \int_0^c f(u)\,du = \int_0^c f(c-u)\,du.$$

Diese sehr einfache Gleichung aus den Elementen der Theorie der bestimmten Integrale ist im Folgenden bei einigen elliptischen Integralen zu Grunde gelegt, deren Deduction auf anderem Wege weniger einfach sein möchte.

Es seien $k$ und $k'$ Modul und Complementärmodul der elliptischen Integrale, nach dem Vorgange von Jacobi sind die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung respective durch $\mathsf{K}$ und $\mathsf{E}$ bezeichnet. Es ist dann also, unter Zuziehung der Gleichung (1), für $c = \mathsf{K}$ und $f(u) = \Delta^2 \operatorname{am} u$:

$$(2) \qquad \mathsf{E} = \int_0^{\mathsf{K}} \Delta^2 \operatorname{am} u\,du = \int_0^{\mathsf{K}} \frac{k'^2}{\Delta^2 \operatorname{am} u}\,du.$$

Man setze:

$$(3) \qquad S = \int_0^{\mathsf{K}} \Delta^2 \operatorname{am} u \cdot \log \Delta \operatorname{am} u\,du.$$

Die Anwendung der Gleichung (1) auf das Integral $S$ giebt:

$$(4) \qquad S = \int_0^{\mathsf{K}} \frac{k'^2}{\Delta^2 \operatorname{am} u} \log \frac{k'}{\Delta \operatorname{am} u}\,du$$

$$= \log k' \cdot \int_0^{\mathsf{K}} \frac{k'^2}{\Delta^2 \operatorname{am} u}\,du - \int_0^{\mathsf{K}} \frac{k'^2}{\Delta^2 \operatorname{am} u} \log \Delta \operatorname{am} u\,du.$$

Man setze rechts für den Factor von $\log k'$ aus (2) seinen Werth $\mathsf{E}$ ein und addire darauf die Gleichungen (3) und (4). Es folgt so:

$$(5)\quad 2S = \mathsf{E}\cdot\log k' + \int_0^{\mathsf{K}} \left[\Delta^2 \operatorname{am} u - \frac{k'^2}{\Delta^2 \operatorname{am} u}\right] \log \Delta \operatorname{am} u \, du.$$

Nun ist:

$$(6)\quad \Delta^2 \operatorname{am} u - \frac{k'^2}{\Delta^2 \operatorname{am} u} = k^2 \frac{\cos^2 \operatorname{am} u}{\Delta^2 \operatorname{am} u} - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u$$

$$= k^2 \cos \operatorname{am} u \frac{d \frac{\sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}}{du} - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u.$$

Durch partielle Integration folgt:

$$\int_0^{\mathsf{K}} k^2 \cos \operatorname{am} u \cdot \log \Delta \operatorname{am} u \cdot \frac{d \frac{\sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}}{du} du$$

$$= \int_0^{\mathsf{K}} k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \cdot \log \Delta \operatorname{am} u \, du + \int_0^{\mathsf{K}} \frac{k^4 \sin^2 \operatorname{am} u \cos^2 \operatorname{am} u}{\Delta^2 \operatorname{am} u} du.$$

In der vorstehenden Gleichung bringe man das erste Integral rechts auf die linke Seite und berücksichtige die Gleichung (6). Es folgt dann:

$$\int_0^{\mathsf{K}} \left[\Delta^2 \operatorname{am} u - \frac{k'^2}{\Delta^2 \operatorname{am} u}\right] \log \Delta \operatorname{am} u \, du = \int_0^{\mathsf{K}} \frac{k^4 \sin^2 \operatorname{am} u \cos^2 \operatorname{am} u}{\Delta^2 \operatorname{am} u} du$$

$$= \int_0^{\mathsf{K}} \left[1 + k'^2 - \Delta^2 \operatorname{am} u - \frac{k'^2}{\Delta^2 \operatorname{am} u}\right] du.$$

Wegen der Gleichung (2) reducirt sich die rechte Seite der vorstehenden Gleichung auf

$$(1+k'^2)\mathsf{K} - 2\mathsf{E}.$$

Dieses ist aber auch der Werth des Integrals auf der rechten Seite der Gleichung (5). Für das Integral $S$ ergiebt sich hierdurch folgende Gleichung:

$$2S = \mathsf{E}\log k' + (1+k'^2)\mathsf{K} - 2\mathsf{E},$$

oder, durch 2 dividirt, für $S$ seinen Werth aus (3) substituirt:

$$\int_0^{\mathsf{K}} \Delta^2 \operatorname{am} u \cdot \log \Delta \operatorname{am} u \, du = \frac{\mathsf{E}}{2} \log k' + \frac{1+k'^2}{2} \mathsf{K} - \mathsf{E}.$$

Setzt man im Integrale $\operatorname{am} u = w$, so nimmt die vorstehende Gleichung folgende Form an:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 w} \cdot \log \sqrt{1 - k^2 \sin^2 w} \cdot dw = \frac{\mathsf{E}}{2} \log k' + \frac{1+k'^2}{2} \mathsf{K} - \mathsf{E}.$$

Es ist selbstverständlich, dass sich diese Gleichung auch ohne Einführung elliptischer Functionen mittelst der Substitution

$$k' \operatorname{tang} w \cdot \operatorname{tang} v = 1$$

darthun lässt; die elliptischen Functionen erfordern nur einen geringeren Aufwand von Formeln.

Das Integral:

$$(7) \qquad R = \int_0^K \Phi\left[\frac{k'}{\Delta \operatorname{am}(u+a)\,\Delta \operatorname{am}(u-a)}\right] du$$

giebt zu einer ähnlichen Anwendung der Gleichung (1) Veranlassung wie das Integral $S$. Vertauscht man $u$ mit $\mathsf{K} - u$, so geht die Gleichung (7) über in:

$$(8) \qquad R = \int_0^K \Phi\left[\frac{\Delta \operatorname{am}(u+a)\,\Delta \operatorname{am}(u-a)}{k'}\right] du.$$

Nimmt man in den Gleichungen (7) und (8) $\Phi(x) = \operatorname{arctang} x$, bildet die Summe dieser Gleichungen und setzt:

$$\operatorname{arctang} y + \operatorname{arctang} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

so folgt:

$$2R = \int_0^K \frac{\pi}{2} du = \frac{\pi}{2}\mathsf{K},$$

oder

$$R = \frac{\pi}{4}\mathsf{K},$$

d. i.:

$$\int_0^K \operatorname{arctang}\left[\frac{k'}{\Delta \operatorname{am}(u+a)\,\Delta \operatorname{am}(u-a)}\right] du = \frac{\pi}{4}\mathsf{K}.$$

Unter Anwendung des Additionstheorems lässt sich diese Gleichung auch schreiben:

$$(9) \qquad \int_0^K \operatorname{arctang}\left[\frac{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} a - k^2 \cos^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u} k'\right] du = \frac{\pi}{4}\mathsf{K}.$$

Setzt man $-k^2 \sin^2 \operatorname{am} a = z$ und $\operatorname{am} u = w$, so nimmt die Gleichung (9) die Form an:

$$(10) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctang}\left[\frac{1+z\sin^2 w}{1+z-(z+k^2)\sin^2 w} k'\right]}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 w}}\, dw = \frac{\pi}{4}\mathsf{K}.$$

Es bedeutet $z$ in dieser Gleichung eine beliebige reelle oder imaginäre Grösse. Als besondere Fälle sind bemerkenswerth $z = 0$, $z = \infty$ und $z = k$. So folgt für $z = k$ aus (10):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctang}\left[\frac{1+k\sin^2 w}{1-k\sin^2 w}\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\right]}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}\,dw = \frac{\pi}{4}\mathsf{K}.$$

Die Gleichung (10) lässt sich noch etwas umformen. Man bringe beide Terme der Gleichung auf dieselbe Seite, setze

$$\mathsf{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}},$$

$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctang} 1$ und $\operatorname{arctang} 1 - \operatorname{arctang} x = \operatorname{arctang} \frac{1-x}{1+x}$, hierdurch nimmt die Gleichung (10) folgende Form an:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctang}\left[\frac{1+z-k'}{1+z+k'}\,\frac{1-(1+k')\sin^2 w}{1-(1-k')\sin^2 w}\right]}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}\,dw = 0.$$

Setzt man in den beiden Gleichungen (7) und (8) $\Phi(x) = \log x$, so erhält man für ihre Summe $2R = 0$, oder

$$\int_0^{\mathsf{K}} \log\left[\frac{1-k^2\sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u}{1-k^2\sin^2 \operatorname{am} a - k^2\cos^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u}\,k'\right] du = 0,$$

welche Gleichung sich auch mittelst der elliptischen Integrale dritter Gattung ergiebt.

# Zur Eliminationstheorie.

Von

M. Nöther in Erlangen*).

Die wichtige Frage nach der Anzahl der Schnittpunkte einer Raumcurve mit einer Fläche lässt sich leicht dadurch erledigen, dass man dieselbe, etwa durch Darstellung der Raumcurve durch das Gleichungssystem (2) dieser Note, zurückführt auf die Frage nach dem Schnitt einer ebenen Curve $C$ mit einer zu einer Schaar gehörigen ebenen Curve; denn es ist nach den bekannten Principien direct möglich, die in singuläre Punkte von $C$ fallende Anzahl von festen Schnittpunkten der Schaar mit $C$ zu bestimmen**).

Der Beweis des allgemeineren Satzes von dem Grade des Schnittes zweier Gebilde bei beliebig vielen Variabeln, der auf dem vorstehenden Wege nicht mehr erledigt werden kann, ist zuerst von H. Halphen in einem Aufsatze: „Recherches de géométrie à $n$ dimensions", Bull. de la Soc. mathém. de France, t. II, p. 34, versucht worden. Die Idee ist die, durch Zufügung weiterer Variabeln und einer Reihe von linearen Gleichungen die Eliminationsaufgabe auf eine solche von einer Variabeln aus zwei Gleichungen zurückzubringen. Aber der Beweis muss dann in einer anderen strengeren Gestalt geführt werden***), die übrigens zugleich einfacher ist, und die ich im Folgenden mittheile.

Ein System von irgend einer Anzahl von Gleichungen

$$\pi_1 = 0, \quad \pi_2 = 0, \quad \cdots \tag{1}$$

zwischen den homogen eingehenden Variabeln

$$x_1, \; x_2, \; \cdots \; x_r$$

*) S. die Note in den Sitzungsber. der phys.-med. Soc. zu Erlangen, vom 4. Dec. 1876.

**) Ein solcher Beweis ist in dem von H. Lindemann bearbeiteten Werke: „Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch" auf p. 399 versucht. Aber derselbe ist in dieser Form nicht zulässig, da das angenommene Absondern eines Factors nicht stattfindet.

***) Der Halphen'sche Beweis wird schon ungültig, wenn daselbst $2i-2>n$ wird.

gehört zu einem Gebilde $\Gamma_m$ von $m$ Dimensionen, wenn man, bei allgemein gewähltem Coordinatensystem, durch die Elimination von

$$x_{m+3},\ x_{m+4},\ \cdots\ x_r$$

auf ein Gleichungssystem geführt werden kann:

$$(2)\quad f(x_1, x_2, \cdots x_{m+2}) = 0,\quad \varphi x_{m+3} = \psi_{m+3},\ \cdots\ \varphi x_r = \psi_r,$$

wo $f$ eine Gleichung $\mu^{\text{ter}}$ Ordnung in den Variabeln $x_1, \cdots x_{m+2}$, die $\psi$ Functionen $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung, $\varphi$ von der $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Ordnung in denselben Variabeln sind. Das System (2) *definirt* auch das Gebilde $\Gamma_m$, wenn man nur solche $m$- oder mehrfach unendlich vielen Werthsysteme, für welche etwa $f$, $\varphi$ und *alle* $\psi$ verschwinden, weglässt. Dagegen können die Gleichungen (1), ausser dem durch (2) definirten Gebilde $\Gamma_m$, noch weitere $m$- oder mehrfach unendlich viele Werthsysteme gemein haben. Auch ist der Fall eingeschlossen, dass $f$, d. h. $\Gamma_m$ selbst, reducibel ist.

Der Grad des Gebildes $\Gamma_m$ ist gleich der Anzahl der Lösungen des Systems (2) und irgend $m$ linearer Gleichungen, also gleich der Zahl der gemeinsamen Lösungen von

$$f(x_1, \cdots x_{m+2}) = 0$$

mit $m$ Gleichungen der Form

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{m+2} x_{m+2}) \cdot \varphi + \alpha_{m+3}\psi_{m+3} + \cdots + \alpha_r \psi_r = 0,$$

wenn man die von den $\alpha$ unabhängigen festen Lösungen ausnimmt. Wir können annehmen, dass die Gleichungen

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{m+2} = 0$$

für kein Werthsystem des Gebildes $\Gamma_m$ zugleich bestehen. Dann aber giebt $f = 0$, verbunden mit $m$ Gleichungen der Form

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{m+2} x_{m+2} = 0,$$

ebenfalls schon den Grad des Gebildes $\Gamma_m$ an, da diese linearen Gleichungen in Bezug auf $\Gamma_m$ als willkürlich gewählte betrachtet werden können; dieser Grad ist also dem Grad $\mu$ von $f$ gleich.

Zugleich folgt, dass dann auch sämmtliche $\psi_i$ für alle Werthsysteme, für welche $f = 0$, $\varphi = 0$ ist, verschwinden, so zwar, dass das Gebilde $\mu(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades, für welches $f = 0$, $\varphi = 0$ ist, von eben demselben Grade im gemeinsamen Werthsystem von $f = 0$, $\psi_i = 0$ zählt.

Wir betrachten nun ein zweites Gebilde $\Gamma_n$, von $n$ Dimensionen und vom Grade $\nu$, in demselben Coordinatensysteme von allgemeiner Lage analog definirt durch ein System

$$(3)\quad \begin{cases} f'(x_1, x_2, \cdots x_{n+2}) = 0, \\ \varphi' x_{n+3} = \psi'_{n+3},\ \cdots\ \varphi' x_r = \psi'_r, \end{cases}$$

wo $f'$ eine Function $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung von $x_1, x_2, \cdots x_{n+2}$ ist. Man hat dann den Satz:

„dass die Gleichungen (2) und (3) zusammen ein Gebilde von $m+n-r+1$ Dimensionen und vom Grade $\mu \cdot \nu$ definiren, vorausgesetzt: dass $m+n \geq r-1$ ist, und dass die beiden Systeme nicht ein Gebilde von wenigstens $m+n-r+2$ Dimensionen gemein haben".

Zum Beweise betrachten wir an Stelle von (2) und (3) die Systeme

$$(4)\quad \begin{cases} f(x_1, x_2, \cdots x_{m+2}) = 0, & \varphi y_{m+3} = \psi_{m+3}, \cdots \varphi y_r = \psi_r, \\ f'(x_1, x_2, \cdots x_{n+2}) = 0, & \varphi' z_{n+3} = \psi'_{n+3}, \cdots \varphi' z_r = \psi'_r, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} y_{m+3} - x_{m+3} = 0, \cdots y_r - x_r = 0, \\ z_{n+3} - x_{n+3} = 0, \cdots z_r - x_r = 0, \end{cases}$$

welche zusammen alle Lösungen von (2), (3) liefern, wobei nur wieder die etwa von den festen Werthsystemen $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$, sowie $f'=0$, $\varphi'=0$, $\psi'_i=0$ herrührenden in (2), (3) sowohl als in (4), (5) wegzulassen sind. Aber die Elimination in (4) ergiebt sich nun einfach dadurch, dass man eine in $f=0$ und $f'=0$ gemeinsam vorkommende Variable $x_1$ aus diesen beiden Gleichungen eliminirt, was zu einer Gleichung $F=0$ führen möge, und sodann den hierbei berechneten Werth von $x_1$ in die übrigen Gleichungen (4) einsetzt. So ergiebt sich aus (4) das System (für $n > m$):

$$(6)\quad \begin{cases} F(x_2, x_3, \cdots x_{n+2}) = 0, & \Phi x_1 = \Psi, \\ \Phi y_{m+3} = \Psi_{m+3}, \cdots \Phi y_r = \Psi_r, \\ \Phi z_{n+3} = \Psi'_{n+3}, \cdots \Phi z_r = \Psi'_r, \end{cases}$$

in welchem $F=0$ eine Function $\mu \cdot \nu^{\text{ten}}$ Grades in $x_2, x_2, \cdots x_{n+2}$ ist, da sie durch Elimination aus $f=0$, $f'=0$ hervorgegangen ist, und die $\Phi$, $\Psi$, $\Psi'$ Functionen derselben Variabeln sind.

Dieses System von Gleichungen (6) betrachten wir nun als ein homogenes in den Variabeln

$$x_1, x_2, \cdots x_r, \quad y_{m+3}, \cdots y_r, \quad z_{n+3}, \cdots z_r,$$

wobei $F$ in den $r-1$ Variabeln $x_2, x_3, \cdots x_{r-1}$ homogen wird. Alsdann stellt (6) ein Gebilde $\Gamma$ von $r-3$ Dimensionen dar. Der *Grad* desselben wird aber der von $F$, $\mu \cdot \nu$, weil die Gleichungen

$$x_2 = x_3 = \cdots = x_r = 0,$$

für welche weder $f$ noch $f'$ verschwindet, auch für kein Werthsystem von $\Gamma$ bestehen können.

Dabei treten nun die etwa von den festen Werthsystemen $f=0$, $\varphi=0$ herrührenden Werthsysteme in $\Gamma$ nicht mehr so auf, dass sie den Grad von $\Gamma$ afficiren. Denn schon die 3 Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$,

$f'=0$ zusammen liefern nur $\infty^{r-4}$ Verhältnisse der Grössen $x_2:x_3:\cdots:x_r$, während für $\Gamma$ $\infty^{r-3}$ solcher Verhältnisse zu setzen sind. Ebenso bei $f'=0$, $\varphi'=0$.

Nimmt man nun noch zu (6) das System *linearer* Gleichungen (5) hinzu, so erhält man aus $\Gamma$ eine Gebilde von

$$(r-3)-(2r-m-n-4)=m+n-r+1$$

Dimensionen, vom Grade $\mu\cdot\nu$. Dieses ganze Gebilde stellt aber gemeinsame Lösungen von (2), (3) dar, da die speciellen von $f=0$, $\varphi=0$ (bez. $f'=0$, $\varphi'=0$) herrührenden Werthsysteme in $\Gamma$, bei Hinzunahme von (5), zu einem Gebilde von höchstens $m+n-r$ Dimensionen führen können. In Verbindung mit weiteren $m+n-r+1$ beliebigen linearen Gleichungen zwischen den gegebenen Variabeln

$$x_1,\ x_2,\ \cdots x_r$$

erhält man $\mu\cdot\nu$ mit den Coefficienten dieser Gleichungen *variable* Lösungen, weil $x_1=x_2=\cdots=x_r=0$ zu keinem Werthsystem von $\Gamma$ gehört.

Eine Ausnahme kann nur dadurch eintreten, dass das lineare System (5) durch *mehr* als $\infty^{m+n-r+1}$ Werthsysteme des Systems (6) identisch befriedigt wird. Dann wird man erst durch Zufügung von wenigstens $m+n-r+2$ linearen Gleichungen zwischen $x_1, x_2, \cdots x_r$ eine endliche Zahl von Lösungen erhalten können, die im Allgemeinen nicht mehr $=\mu\cdot\nu$ sein wird. — Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Erlangen.

# Nachtrag zu dem Aufsatze: „Ein paar allgemeine metrische Sätze für algebraische Curven."

(S. 341—346 dieses Bandes.)

Von Elling Holst in Christiania.

---

Erst einen Monat, nachdem ich die Correctur meines Aufsatzes gelesen hatte, wurde ich darauf aufmerksam, dass die meisten meiner Formeln schon von Herrn Laguerre 1865 gefunden und in den Comptes Rendus LX, p. 71—73, doch ohne Beweis, veröffentlicht worden sind.

Eine Vergleichung wird indessen zeigen, dass mein Ausgangspunkt sowohl als das Hauptziel meiner Entwickelungen, nämlich die Festsetzung einer allgemeinen *Normalform* für die Gleichung jeder algebraischen Curve, der Mittheilung Laguerre's ferner liegen. In Folge seiner Fragestellung sucht er nicht den analytischen Ausdruck für den constanten Factor, den ich $k$ genannt habe. Er bestimmt ihn, indem er ihn so wählt, dass sein Theorem I. stattfindet ohne explicite auftretende Constante. Unsere Constanten differiren hierdurch um einen Factor $2^n$, was auch aus seinen Formeln sichtbar ist.

Laguerre's „Potenz" und mein $F_N(\alpha, \beta)$ differiren folglich ebenfalls um den Factor $2^n$.

Christiania, Ende Februar 1877.

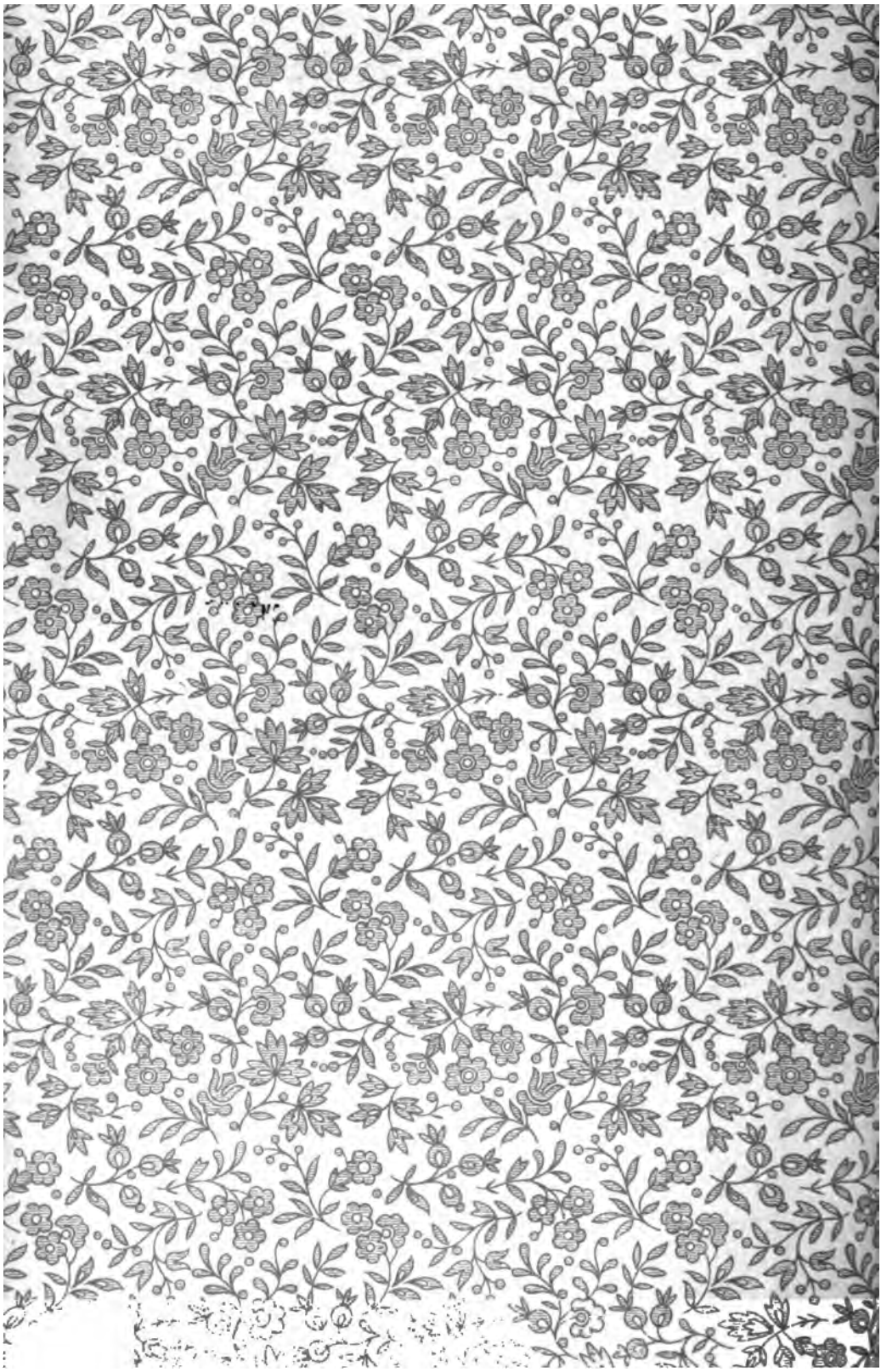
# Nachträgliche Verbesserungen.

## Band X.

S. 590 lies *H. Stahl in Berlin* statt *H. Stahl in Aachen.*

## Band XI.

S. 222 Textzeile 6 v. u. lies *Geraden* statt *Gerade.*
„ 237 Gleichung (34) lies $H(v\varpi - w^2)$ statt $H(v\varpi - u^2)$.
„ 238 ist an Stelle der ersten Note zu setzen:
„Allerdings enthält die $M_3$ *eine* derartige $M_2$. Dementsprechend wird die Gleichung (34) *ein* Integral $f(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = c$ besitzen können."
„ 257 Zeile 7 v. o. lies $\sqrt[4]{4\,D}$ statt $\sqrt{4\,D}$.
„ 259 „ 10 v. u. lies *chacune* statt *schacune.*
„ 271 „ 1 v. u. lies $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{D}$ statt $\left(\frac{4}{3}\right)^{3}\sqrt[4]{D}$.
„ 274 „ 9 v. o. lies *ses* statt *ces.*
„ 279 „ 2 v. o. lies $(x_2' - \frac{1}{2}x_5 - \lambda x_1)^2$ statt $(x_2' - \frac{1}{2}\alpha_5 - \lambda x_1)^2$.
„ 282 „ 16 v. o. lies $b_5$ statt $b_4$.
„ 286 „ 16 v. u. lies *changement* statt *changeant.*



MATHEMATICS-STATISTICS
LIBRARY
NOT TO BE TAKEN
AWAY

28306